

Коротков Анатолий Васильевич

ПЯТНАДЦАТИМЕРНАЯ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Статья посвящена вопросам построения элементов пятнадцатимерной векторной алгебры. В ней рассмотрены, в частности, способы нахождения соотношений векторного произведения двух векторов на основе известной процедуры удвоения октонионов. Установлено выражение для векторного произведения двух векторов через сумму тридцати пяти определителей третьего порядка и, следовательно, найдены свойства векторного произведения двух векторов. Получено выражение для операторов момента импульса и их суммы. Сумма операторов момента импульса совпадает с точностью до коэффициента пропорциональности со всеми нечетными степенями. Четные степени определяют симметрическую матрицу.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/12-2/16.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2012. № 12 (67): в 2-х ч. Ч. II. С. 80-86. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/12-2/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

Список литературы

1. Коротков А. В. Пятнадцатимерная векторная алгебра // Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2011. 36 с.
2. Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2011. 36 с.
3. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.

УДК 512.7

Физико-математические науки

Статья посвящена вопросам построения элементов пятнадцатимерной векторной алгебры. В ней рассмотрены, в частности, способы нахождения соотношений векторного произведения двух векторов на основе известной процедуры удвоения октонионов. Установлено выражение для векторного произведения двух векторов через сумму тридцати пяти определителей третьего порядка и, следовательно, найдены свойства векторного произведения двух векторов. Получено выражение для операторов момента импульса и их суммы. Сумма операторов момента импульса совпадает с точностью до коэффициента пропорциональности со всеми нечетными степенями. Четные степени определяют симметрическую матрицу.

Ключевые слова и фразы: пятнадцатимерная векторная алгебра; векторное произведение двух векторов; сумма определителей третьего порядка; коммутатор; матрицы момента импульса; сумма операторов момента импульса; закон сохранения момента импульса.

Анатолий Васильевич Коротков, к.т.н., д.ф.-м.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

ПЯТНАДЦАТИМЕРНАЯ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА[©]

$$\left\| \begin{array}{ccc} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{array} \right\|$$

На практике широко используется трехмерное векторное исчисление во многих отраслях науки и техники. Менее известно, но хорошо изучено семимерное векторное исчисление. Оно разработано в последнюю четверть XX столетия и рассмотрено в плане векторного семимерного анализа, спинорного и изовекторного исчислений [2; 3].

Трехмерное и семимерное векторные исчисления обладают рядом замечательных свойств и выделяются среди евклидовых векторных пространств наличием операции векторного умножения двух векторов. Другим свойством этих алгебр является отсутствие обратного вектора и деления двух векторов друг на друга. Это, казалось бы, неприятное, свойство, однако, дало трехмерные и семимерные векторные алгебры, широко используется и дает возможность дальнейшего расширения размерности векторных алгебр.

Векторным алгебрам в принципе не свойственно наличие обратных величин и процедуры деления векторов, а, следовательно, полученный в XIX веке замечательный результат в отношении гиперкомплексных чисел с делением не является ограничением для получения многомерных векторных алгебр. Рассмотрим в связи с этим порядок получения пятнадцатимерной векторной алгебры, используя известную процедуру удвоения чисел, которая дала возможность получить из алгебры одномерных чисел (действительных чисел) алгебры двух-, четырех- и восьмимерных чисел - комплексных чисел, кватернионов и октонионов Кэли.

Порядок получения комплексных чисел кватернионов и октонионов связан с процедурой удвоения. Отметим, что задача нахождения пятнадцатимерных векторных алгебр имеет неоднозначное решение. Каждое решение определяется видом процедуры удвоения, так, например, при удвоении действительных чисел можно получить двухмерные комплексные числа:

$$\mathbf{ab} = (a_0 b_0 - b_1 a_1, a_0 b_1 + b_0 a_1),$$

т.е. $\mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0 b_0 - b_1 a_1, a_0 b_1 + b_0 a_1).$

В координатной форме записи операция умножения двух двумерных чисел может быть представлена в виде:

$$\mathbf{ab} = \begin{array}{cc} (a_0 b_0 & -b_1 a_1 \\ a_0 b_1 & +b_0 a_1) \end{array}$$

При удвоении комплексных чисел можно получить четырехмерные кватернионы. При этом произведением двух пар вещественных чисел $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1)$ назовем пару

$$\mathbf{ab} = (a_0 b_0 - b_1 \bar{a}_1, \bar{a}_0 b_1 + b_0 a_1), \text{ т.е. } \mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0 b_0 - b_1 \bar{a}_1, \bar{a}_0 b_1 + b_0 a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения двух четырехмерных кватернионов может быть представлена в виде:

$$ab = \begin{array}{cc|cc} a_0b_0 & -b_1a_1 & -b_2a_2 & -a_3b_3, \\ a_0b_1 & +b_0a_1 & +b_2a_3 & -a_2b_3, \\ a_0b_2 & +b_3a_1 & +b_0a_2 & -a_3b_1, \\ a_0b_3 & -b_2a_1 & +b_0a_3 & +a_2b_1. \end{array}$$

При удвоении кватернионов можно получить восьмимерные октонионы. При этом произведением пар $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ называется пара

$$ab = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1),$$

$$\text{т.е. } ab = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения двух восьмимерных октонионов может быть представлена в виде:

$$ab = \begin{array}{cccc|cccc} (a_0b_0 & -b_1a_1 & -b_2a_2 & -a_3b_3 & -b_4a_4 & -a_5b_5 & -a_6b_6 & -b_7a_7, \\ a_0b_1 & +b_0a_1 & +b_2a_3 & -a_2b_3 & +b_4a_5 & -a_4b_5 & +a_6b_7 & -b_6a_7, \\ a_0b_2 & +b_3a_1 & +b_0a_2 & -a_3b_1 & +b_4a_6 & +a_7b_5 & -a_4b_6 & -b_7a_5, \\ a_0b_3 & -b_2a_1 & +b_0a_3 & +a_2b_1 & +b_4a_7 & -a_6b_5 & -a_4b_7 & +b_6a_5, \\ a_0b_4 & +b_5a_1 & +b_6a_2 & +a_3b_7 & +b_0a_4 & -a_5b_1 & -a_6b_2 & -b_3a_7, \\ a_0b_5 & -b_4a_1 & -b_6a_3 & +a_2b_7 & +b_0a_5 & +a_4b_1 & +a_6b_3 & -b_2a_7, \\ a_0b_6 & -b_7a_1 & -b_4a_2 & +a_3b_5 & +b_0a_6 & +a_7b_1 & +a_4b_2 & -b_3a_5, \\ a_0b_7 & +b_6a_1 & -b_4a_3 & -a_2b_5 & +b_0a_7 & -a_6b_1 & +a_4b_3 & +b_2a_5). \end{array}$$

Указанная процедура удвоения - одна из процедур, позволяющих получать комплексные числа, кватернионы и октонионы. Эта процедура не позволяет получить другие многомерные числовые системы с делением, что было определено еще в XIX веке. Более того, отсутствует не только деление, но также и наличие обратных векторов, а вместе с тем кватернионы теряют свойство коммутативности произведения, а октонионы - также свойство ассоциативности. Это резко ограничивает возможности использования этих систем на практике.

Вместе с тем, получаемые из комплексных чисел, кватернионов и октонионов одно-, трех- и семимерные векторные алгебры, как отмечалось, не требуют наличия свойств деления и обратных векторов, так что применение той же процедуры удвоения приводит к возможности получения шестнадцатимерной алгебры, из которой выделяется пятнадцатимерная векторная алгебра. Применим процедуру удвоения к октонионам. При удвоении октонионов можно получить шестнадцатимерные числа. При этом произведением двух пар октонионов $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ назовем пару

$$ab = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1),$$

$$\text{т.е. } ab = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения 16-мерных ab чисел (при такой процедуре удвоения) может быть представлена в виде произведения ab , приведенного ниже. Там же показаны скалярное (ab) и векторное $[ab]$ произведения двух векторов.

a_0b_0	$-a_1b_1$	$-a_2b_2$	$-a_3b_3$	$-a_4b_4$	$-a_5b_5$	$-a_6b_6$	$-a_7b_7$	$-a_8b_8$	$-a_9b_9$	$-a_{10}b_{10}$	$-a_{11}b_{11}$	$-a_{12}b_{12}$	$-a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_{15}$
a_0b_1	$+a_1b_0$	$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_6b_7$	$+a_7b_6$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{10}b_{10}$	$+a_{11}b_{11}$	$-a_{12}b_{12}$	$+a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
a_0b_2	$+a_2b_0$	$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_3b_7$	$+a_7b_5$	$-a_5b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{13}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
a_0b_3	$+a_3b_0$	$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
a_0b_4	$+a_4b_0$	$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_3b_7$	$+a_7b_3$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
a_0b_5	$+a_5b_0$	$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_5b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
a_0b_6	$+a_6b_0$	$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_3b_5$	$+a_5b_3$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_{12}$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
a_0b_7	$+a_7b_0$	$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
a_0b_8	$+a_8b_0$	$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_{12}b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_{15}b_{15}$
a_0b_9	$+a_9b_0$	$-a_{10}b_{10}$	$+a_{10}b_{10}$	$-a_{11}b_{11}$	$+a_{11}b_{11}$	$-a_{12}b_{12}$	$+a_{12}b_{12}$	$-a_{13}b_{13}$	$+a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_{14}$	$+a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_{15}$	$+a_{15}b_{15}$	$-a_{16}b_{16}$	$+a_{16}b_{16}$
a_0b_{10}	$+a_{10}b_0$	$-a_{12}b_{12}$	$+a_{12}b_{12}$	$-a_{13}b_{13}$	$+a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_{14}$	$+a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_{15}$	$+a_{15}b_{15}$	$-a_{16}b_{16}$	$+a_{16}b_{16}$	$-a_{17}b_{17}$	$+a_{17}b_{17}$	$-a_{18}b_{18}$	$+a_{18}b_{18}$
a_0b_{11}	$+a_{11}b_0$	$-a_{14}b_{14}$	$+a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_{15}$	$+a_{15}b_{15}$	$-a_{16}b_{16}$	$+a_{16}b_{16}$	$-a_{17}b_{17}$	$+a_{17}b_{17}$	$-a_{18}b_{18}$	$+a_{18}b_{18}$	$-a_{19}b_{19}$	$+a_{19}b_{19}$	$-a_{20}b_{20}$	$+a_{20}b_{20}$
a_0b_{12}	$+a_{12}b_0$	$-a_{16}b_{16}$	$+a_{16}b_{16}$	$-a_{17}b_{17}$	$+a_{17}b_{17}$	$-a_{18}b_{18}$	$+a_{18}b_{18}$	$-a_{19}b_{19}$	$+a_{19}b_{19}$	$-a_{20}b_{20}$	$+a_{20}b_{20}$	$-a_{21}b_{21}$	$+a_{21}b_{21}$	$-a_{22}b_{22}$	$+a_{22}b_{22}$
a_0b_{13}	$+a_{13}b_0$	$-a_{18}b_{18}$	$+a_{18}b_{18}$	$-a_{19}b_{19}$	$+a_{19}b_{19}$	$-a_{20}b_{20}$	$+a_{20}b_{20}$	$-a_{21}b_{21}$	$+a_{21}b_{21}$	$-a_{22}b_{22}$	$+a_{22}b_{22}$	$-a_{23}b_{23}$	$+a_{23}b_{23}$	$-a_{24}b_{24}$	$+a_{24}b_{24}$
a_0b_{14}	$+a_{14}b_0$	$-a_{20}b_{20}$	$+a_{20}b_{20}$	$-a_{21}b_{21}$	$+a_{21}b_{21}$	$-a_{22}b_{22}$	$+a_{22}b_{22}$	$-a_{23}b_{23}$	$+a_{23}b_{23}$	$-a_{24}b_{24}$	$+a_{24}b_{24}$	$-a_{25}b_{25}$	$+a_{25}b_{25}$	$-a_{26}b_{26}$	$+a_{26}b_{26}$
a_0b_{15}	$+a_{15}b_0$	$-a_{22}b_{22}$	$+a_{22}b_{22}$	$-a_{23}b_{23}$	$+a_{23}b_{23}$	$-a_{24}b_{24}$	$+a_{24}b_{24}$	$-a_{25}b_{25}$	$+a_{25}b_{25}$	$-a_{26}b_{26}$	$+a_{26}b_{26}$	$-a_{27}b_{27}$	$+a_{27}b_{27}$	$-a_{28}b_{28}$	$+a_{28}b_{28}$

$(ab)=$
 $-a_1b_1 \quad -a_2b_2 \quad -a_3b_3 \quad -a_4b_4 \quad -a_5b_5 \quad -a_6b_6 \quad -a_7b_7 \quad -a_8b_8 \quad -a_9b_9 \quad -a_{10}b_{10} \quad -a_{11}b_{11} \quad -a_{12}b_{12} \quad -a_{13}b_{13} \quad -a_{14}b_{14} \quad -a_{15}b_{15}$
 $[ab]=$

$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_{13}b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
$-a_5b_1$	$+a_{13}b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_{11}b_4$	$+a_4b_{11}$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_{12}$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_{13}b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
$-a_9b_1$	$+a_{13}b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_5$	$-a_6b_{15}$	$+a_{15}b_6$	$-a_{11}b_8$	$+a_8b_{11}$	$-a_{11}b_{12}$	$+a_{12}b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_7b_{13}$	$+a_{13}b_7$	$-a_{11}b_{11}$	$+a_{11}b_1$	$-a_2b_8$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
$-a_3b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	$-a_7b_{12}$	$+a_{12}b_7$	$-a_3b_8$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_{11}b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_3b_{15}$	$+a_{15}b_3$	$-a_2b_{14}$	$+a_{14}b_2$	$-a_4b_8$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_6b_{11}$	$+a_{11}b_6$	$-a_4b_9$	$+a_9b_4$	$-a_5b_8$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_4b_{10}$	$+a_{10}b_4$	$-a_5b_{13}$	$+a_{13}b_5$	$-a_6b_8$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
$-a_{11}b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_{14}b_{14}$	$+a_{14}b_{11}$	$-a_5b_{10}$	$+a_{10}b_5$	$-a_7b_8$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$

Векторное произведение двух векторов можно представить в виде суммы

$$[ab] = [(a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_{15}e_{15})(b_1e_1 + b_2e_2 + \dots + b_{15}e_{15})],$$

т.е. $[ab]=$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_8 & e_9 \\ a_1 & a_8 & a_9 \\ b_1 & b_8 & b_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_{11} & e_{10} \\ a_1 & a_{11} & a_{10} \\ b_1 & b_{11} & b_{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_{13} & e_{12} \\ a_1 & a_{13} & a_{12} \\ b_1 & b_{13} & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_{14} & e_{15} \\ a_1 & a_{14} & a_{15} \\ b_1 & b_{14} & b_{15} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} e_2 & e_4 & e_6 \\ a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2 & e_8 & e_{10} \\ a_2 & a_8 & a_{10} \\ b_2 & b_8 & b_{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2 & e_{14} & e_{12} \\ a_2 & a_{14} & a_{12} \\ b_2 & b_{14} & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2 & e_{15} & e_{13} \\ a_2 & a_{15} & a_{13} \\ b_2 & b_{15} & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2 & e_9 & e_{11} \\ a_2 & a_9 & a_{11} \\ b_2 & b_9 & b_{11} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} e_3 & e_6 & e_5 \\ a_3 & a_6 & a_5 \\ b_3 & b_6 & b_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_3 & e_8 & e_{11} \\ a_3 & a_8 & a_{11} \\ b_3 & b_8 & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_3 & e_{13} & e_{14} \\ a_3 & a_{13} & a_{14} \\ b_3 & b_{13} & b_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_3 & e_{10} & e_9 \\ a_3 & a_{10} & a_9 \\ b_3 & b_{10} & b_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_3 & e_{15} & e_{12} \\ a_3 & a_{15} & a_{12} \\ b_3 & b_{15} & b_{12} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} e_4 & e_5 & e_1 \\ a_4 & a_5 & a_1 \\ b_4 & b_5 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_4 & e_8 & e_{12} \\ a_4 & a_8 & a_{12} \\ b_4 & b_8 & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_4 & e_9 & e_{13} \\ a_4 & a_9 & a_{13} \\ b_4 & b_9 & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_4 & e_{11} & e_{15} \\ a_4 & a_{11} & a_{15} \\ b_4 & b_{11} & b_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_4 & e_{10} & e_{14} \\ a_4 & a_{10} & a_{14} \\ b_4 & b_{10} & b_{14} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} e_5 & e_7 & e_2 \\ a_5 & a_7 & a_2 \\ b_5 & b_7 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_5 & e_8 & e_{13} \\ a_5 & a_8 & a_{13} \\ b_5 & b_8 & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_5 & e_{10} & e_{15} \\ a_5 & a_{10} & a_{15} \\ b_5 & b_{10} & b_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_5 & e_{14} & e_{11} \\ a_5 & a_{14} & a_{11} \\ b_5 & b_{14} & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_5 & e_{12} & e_9 \\ a_5 & a_{12} & a_9 \\ b_5 & b_{12} & b_9 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} e_6 & e_1 & e_7 \\ a_6 & a_1 & a_7 \\ b_6 & b_1 & b_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_6 & e_8 & e_{14} \\ a_6 & a_8 & a_{14} \\ b_6 & b_8 & b_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_6 & e_{15} & e_9 \\ a_6 & a_{15} & a_9 \\ b_6 & b_{15} & b_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_6 & e_{12} & e_{10} \\ a_6 & a_{12} & a_{10} \\ b_6 & b_{12} & b_{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_6 & e_{11} & e_{13} \\ a_6 & a_{11} & a_{13} \\ b_6 & b_{11} & b_{13} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} e_7 & e_3 & e_4 \\ a_7 & a_3 & a_4 \\ b_7 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_8 & e_{15} \\ a_7 & a_8 & a_{15} \\ b_7 & b_8 & b_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_{12} & e_{11} \\ a_7 & a_{12} & a_{11} \\ b_7 & b_{12} & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_9 & e_{14} \\ a_7 & a_9 & a_{14} \\ b_7 & b_9 & b_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_{13} & e_{10} \\ a_7 & a_{13} & a_{10} \\ b_7 & b_{13} & b_{10} \end{vmatrix}$$

тридцати пяти определителей третьего порядка, заданных таблицей в немых индексах:

орт	коммутатор $[a_i b_j] = a_i b_j - a_j b_i$						
e_1	$[2,3]$	$[4,5]$	$[7,6]$	$[8,9]$	$[11,10]$	$[13,12]$	$[14,15]$
e_2	$[4,6]$	$[5,7]$	$[3,1]$	$[8,10]$	$[14,12]$	$[15,13]$	$[9,11]$
e_3	$[6,5]$	$[1,2]$	$[4,7]$	$[8,11]$	$[13,14]$	$[10,9]$	$[15,12]$
e_4	$[5,1]$	$[7,3]$	$[6,2]$	$[8,12]$	$[9,13]$	$[11,15]$	$[10,14]$
e_5	$[7,2]$	$[3,6]$	$[1,4]$	$[8,13]$	$[10,15]$	$[14,11]$	$[12,9]$
e_6	$[1,7]$	$[2,4]$	$[5,3]$	$[8,14]$	$[15,9]$	$[12,10]$	$[11,13]$
e_7	$[3,4]$	$[6,1]$	$[2,5]$	$[8,15]$	$[12,11]$	$[9,14]$	$[13,10]$
e_8	$[9,1]$	$[10,2]$	$[11,3]$	$[12,4]$	$[13,5]$	$[14,6]$	$[15,7]$
e_9	$[11,2]$	$[13,4]$	$[14,7]$	$[1,8]$	$[3,10]$	$[5,12]$	$[6,15]$
e_{10}	$[14,4]$	$[15,5]$	$[9,3]$	$[2,8]$	$[6,12]$	$[7,13]$	$[1,11]$
e_{11}	$[13,6]$	$[10,1]$	$[15,4]$	$[3,8]$	$[5,14]$	$[2,9]$	$[7,12]$
e_{12}	$[9,5]$	$[11,7]$	$[10,6]$	$[4,8]$	$[1,13]$	$[3,15]$	$[2,14]$
e_{13}	$[10,7]$	$[14,3]$	$[12,1]$	$[5,8]$	$[2,15]$	$[6,11]$	$[4,9]$
e_{14}	$[15,1]$	$[12,2]$	$[11,5]$	$[6,8]$	$[7,9]$	$[4,10]$	$[3,13]$
e_{15}	$[12,3]$	$[9,6]$	$[13,2]$	$[7,8]$	$[4,11]$	$[1,14]$	$[5,10]$

Здесь индексами i, j обозначена величина

$$[a_i b_j] = a_i b_j - a_j b_i,$$

а все элементы суммируются по координатно.

Та же таблица может быть представлена в виде суммы 35 определителей третьего порядка

$$[a, b] = \begin{aligned} &|1, 2, 3| + |1, 8, 9| + |1, 11, 10| + |1, 13, 12| + |1, 14, 15| + \\ &+ |2, 4, 6| + |2, 8, 10| + |2, 14, 12| + |2, 15, 13| + |2, 9, 11| + \\ &+ |3, 6, 5| + |3, 8, 11| + |3, 13, 14| + |3, 10, 9| + |3, 15, 12| + \\ &+ |4, 5, 1| + |4, 8, 12| + |4, 9, 13| + |4, 11, 15| + |4, 10, 14| + \\ &+ |5, 7, 2| + |5, 8, 13| + |5, 10, 15| + |5, 14, 11| + |5, 12, 9| + \\ &+ |6, 1, 7| + |6, 8, 14| + |6, 15, 9| + |6, 12, 10| + |6, 11, 13| + \\ &+ |7, 3, 4| + |7, 8, 15| + |7, 12, 11| + |7, 9, 14| + |7, 13, 10| \end{aligned}$$

явно определяющих трех-, семи- и 15-мерные варианты, или же просто:

1,2,3	1,4,5	1,7,6	1,8,9	1,11,10	1,13,12	1,14,15
2,4,6	2,5,7	2,3,1	2,8,10	2,14,12	2,15,13	2,9,11
3,6,5	3,1,2	3,4,7	3,8,11	3,13,14	3,10,9	3,15,12
4,5,1	4,7,3	4,6,2	4,8,12	4,9,13	4,11,15	4,10,14
5,7,2	5,3,6	5,1,4	5,8,13	5,10,15	5,14,11	5,12,9
6,1,7	6,2,4	6,5,3	6,8,14	6,15,9	6,12,10	6,11,13
7,3,4	7,6,1	7,2,5	7,8,15	7,12,11	7,9,14	7,13,10
8,9,1	8,10,2	8,11,3	8,12,4	8,13,5	8,14,6	8,15,7
9,3,10	9,5,12	9,6,15	9,1,8	9,11,2	9,13,4	9,14,7
10,6,12	10,7,13	10,1,11	10,2,8	10,14,4	10,15,5	10,9,3
11,5,14	11,2,9	11,7,12	11,3,8	11,13,6	11,10,1	11,15,4
12,1,13	12,3,15	12,2,14	12,4,8	12,9,5	12,11,7	12,10,6
13,2,15	13,6,11	13,4,9	13,5,8	13,10,7	13,14,3	13,12,1
14,7,9	14,4,10	14,3,13	14,6,8	14,15,1	14,12,2	14,11,5
15,4,11	15,1,14	15,5,10	15,7,8	15,12,3	15,9,6	15,13,2

Операторы момента импульса L (матриц Паули) удовлетворяют соотношениям:

$m([L_2 L_3])$	$+ [L_4 L_5]$	$+ [L_7 L_6]$	$+ n [L_8 L_9]$	$+ [L_{11} L_{10}]$	$+ [L_{13} L_{12}]$	$+ [L_{14} L_{15}]$	$= -i L_1;$
$m([L_4 L_6])$	$+ [L_5 L_7]$	$+ [L_3 L_1]$	$+ n [L_8 L_{10}]$	$+ [L_{14} L_{12}]$	$+ [L_{15} L_{13}]$	$+ [L_9 L_{11}]$	$= -i L_2;$
$m([L_6 L_5])$	$+ [L_1 L_2]$	$+ [L_4 L_7]$	$+ n [L_8 L_{11}]$	$+ [L_{13} L_{14}]$	$+ [L_{10} L_9]$	$+ [L_{15} L_{12}]$	$= -i L_3;$
$m([L_5 L_1])$	$+ [L_7 L_3]$	$+ [L_6 L_2]$	$+ n [L_8 L_{12}]$	$+ [L_9 L_{13}]$	$+ [L_{11} L_{15}]$	$+ [L_{10} L_{14}]$	$= -i L_4;$
$m([L_7 L_2])$	$+ [L_3 L_6]$	$+ [L_1 L_4]$	$+ n [L_8 L_{13}]$	$+ [L_{10} L_{15}]$	$+ [L_{14} L_{11}]$	$+ [L_{12} L_9]$	$= -i L_5;$
$m([L_1 L_7])$	$+ [L_2 L_4]$	$+ [L_5 L_3]$	$+ n [L_8 L_{14}]$	$+ [L_{15} L_9]$	$+ [L_{12} L_{10}]$	$+ [L_{11} L_{13}]$	$= -i L_6;$
$m([L_3 L_4])$	$+ [L_6 L_1]$	$+ [L_2 L_5]$	$+ n [L_8 L_{15}]$	$+ [L_{12} L_{11}]$	$+ [L_9 L_{14}]$	$+ [L_{13} L_{10}]$	$= -i L_7;$
$k([L_9 L_1])$	$+ [L_{10} L_2]$	$+ [L_{11} L_3]$	$+ [L_{12} L_4]$	$+ [L_{13} L_5]$	$+ [L_{14} L_6]$	$+ [L_{15} L_7]$	$= -i L_8;$
$m([L_3 L_{10}])$	$+ [L_5 L_{12}]$	$+ [L_6 L_{15}]$	$+ n [L_7 L_8]$	$+ [L_{11} L_2]$	$+ [L_{13} L_4]$	$+ [L_{14} L_7]$	$= -i L_9;$
$m([L_6 L_{12}])$	$+ [L_7 L_{13}]$	$+ [L_1 L_{11}]$	$+ n [L_2 L_8]$	$+ [L_{14} L_4]$	$+ [L_{15} L_5]$	$+ [L_9 L_3]$	$= -i L_{10};$
$m([L_5 L_{14}])$	$+ [L_2 L_9]$	$+ [L_7 L_{12}]$	$+ n [L_3 L_8]$	$+ [L_{13} L_6]$	$+ [L_{10} L_1]$	$+ [L_{15} L_4]$	$= -i L_{11};$
$m([L_1 L_{13}])$	$+ [L_3 L_{15}]$	$+ [L_2 L_{14}]$	$+ n [L_4 L_8]$	$+ [L_9 L_5]$	$+ [L_{11} L_7]$	$+ [L_{10} L_6]$	$= -i L_{12};$
$m([L_2 L_{15}])$	$+ [L_6 L_{11}]$	$+ [L_4 L_9]$	$+ n [L_5 L_8]$	$+ [L_{10} L_7]$	$+ [L_{14} L_3]$	$+ [L_{12} L_1]$	$= -i L_{13};$
$m([L_7 L_9])$	$+ [L_4 L_{10}]$	$+ [L_3 L_{13}]$	$+ n [L_6 L_8]$	$+ [L_{15} L_1]$	$+ [L_{12} L_2]$	$+ [L_{11} L_5]$	$= -i L_{14};$
$m([L_4 L_{11}])$	$+ [L_1 L_{14}]$	$+ [L_5 L_{10}]$	$+ n [L_7 L_8]$	$+ [L_{12} L_3]$	$+ [L_9 L_6]$	$+ [L_{13} L_2]$	$= -i L_{15};$

где $[L_i L_j] = L_i L_j - L_j L_i$ - коммутатор, причем $n=11/3$, $m=3/25$, $k=1/11$.

Трёхмерная и семимерная векторные алгебры являются частным случаем пятнадцатимерной. Таблица подстановки индексов в ней имеет вид:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10

Матрицы пятнадцатого порядка L_i приведены в [1]. С целью упрощения записи лучше использовать сумму операторов момента импульсов вида:

или расширенный вариант записи:

определяющий координаты моментов импульса.

- во-первых, сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна нулю;
- во-вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;
- матрицы нечётных степеней антисимметричны, а четных - симметричны;
- размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом $2^n - 1$;
- все нечетные степени матрицы пропорциональны L , а четные - L^2 ;
- целые степени матрицы определяются лишь двумя числами;
- матрица L определяет векторное произведение двух векторов;
- определитель матрицы L (и всех её степеней) равен нулю.

Приведем несколько примеров.

[illegible]

$-iL^3/15^1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0

$L^4/15^1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

$-iL^3/15^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0

Очевидно, что чётные и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса образуют числовые величины, аналогичные **единицам комплексных чисел**, при этом числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер, среди которых выделяются четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел. Каждая из $3, 7, 15, 31, 63, 127, \dots, 2^n-1, \dots$ -мерных векторных алгебр имеет сумму операторов момента импульса совершенно аналогичного вида.

У пятнадцатимерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_{15}^2 = 14I,$$

где I - единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

Таким образом, удастся построить антисимметричную векторную алгебру, определяемую векторами с пятнадцатью координатами в каждой из них. Свойства этой алгебры следует изучить, но можно заранее сказать, что она соответствует линейному векторному пространству, антикоммумутативна, не ассоциативна по умножению и не альтернативна. Она имеет нуль, единицу, противоположный элемент, коммутативна и

ассоциативна по сложению. Выполняется свойство дистрибутивности. Эта алгебра следует из аналогичной шестнадцатимерной не коммутативной по умножению и не ассоциативной алгебры, определяемой гиперкомплексными числами без деления и обратных элементов.

Нулевая координата шестнадцатимерной алгебры определяет скалярное произведение двух пятнадцатимерных векторов. Скалярное произведение двух векторов соответствует единичному метрическому 15-тензору. Таким образом, определено как векторное, так и скалярное произведение векторов одной из пятнадцатимерных алгебр.

Чтобы говорить предметно о свойствах пятнадцатимерной алгебры, можно проанализировать пятнадцатирядные квадратные матрицы L_i (Паули). С их помощью, как известно, записываются уравнения (Дирака) [2]. Трехмерные и семимерные матрицы (Паули) при этом характеризуют момент импульса в указанных алгебрах меньшей размерности.

Непосредственным умножением этих операторов можно получить приведенные выше соотношения для операторов момента импульса.

Обратим внимание читателей на существование не только одномерной и трехмерной векторной алгебры, но также семимерной, а теперь и векторных алгебр пятнадцатимерной, тридцатиодномерной и более высоких размерностей. Это, в свою очередь, ребром ставит вопрос о размерности физического пространства. Я считаю, что **размерность физического пространства неопределённая**. Она характеризуется лишь свойствами алгебры (симметрии), используемой для описания процессов, и может быть как угодно большой.

Более симметричны алгебры большей размерности; алгебры меньшей размерности соответствуют той или иной степени нарушения симметрии определяющих соотношений.

Список литературы

1. **Коротков А. В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
2. **Коротков А. В.** Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. Новочеркасск: Набла, 1999. 100 с.
3. **Коротков А. В.** Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2011. 36 с.

УДК 512.7

Физико-математические науки

В работе изучаются вопросы построения тридцатиодномерной векторной алгебры. Найдено векторное произведение двух векторов на основе рассмотрения расширения системы комплексных чисел, а также трех-, семи-, пятнадцатимерных алгебр. Найдены операторы моментов импульса, а также сумма операторов моментов импульса. Установлено, что нечетные степени суммы операторов момента импульса совпадают с точностью до коэффициентов пропорциональности с оператором момента импульса, а четные степени определяются симметрической матрицей. Это соответствует матричному векторному аналогу комплексных чисел.

Ключевые слова и фразы: векторные алгебры; пятнадцатимерная алгебра; тридцатиодномерная алгебра; векторное произведение двух векторов; оператор суммы моментов импульса; сумма определителей третьего порядка; размерность физического пространства; числа Мерсенна и совершенные числа Пифагора; ряд размерностей векторных алгебр.

Анатолий Васильевич Коротков, к.т.н., д.ф.-м.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

ЭЛЕМЕНТЫ ТРИДЦАТИОДНОМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ[©]

$$\begin{vmatrix} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{vmatrix}$$

На практике широко используется трехмерное векторное исчисление во многих отраслях науки и техники. Менее известно, но хорошо изучено семимерное векторное исчисление. Оно разработано в начале девятых годов XX столетия и рассмотрено в плане векторного семимерного анализа, спинорного и изовекторного исчисления [2; 3].

В последнее время получены серьезные результаты в отношении пятнадцатимерной векторной алгебры [1], в частности, найдены векторное произведение двух векторов, смешанное и двойное векторное произведение