

Коротков Анатолий Васильевич

ЭЛЕМЕНТЫ ТРИДЦАТИОДНОМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В работе изучаются вопросы построения тридцатиодномерной векторной алгебры. Найдено векторное произведение двух векторов на основе рассмотрения расширения системы комплексных чисел, а также трех-, семи-, пятнадцатимерных алгебр. Найдены операторы моментов импульса, а также сумма операторов моментов импульса. Установлено, что нечетные степени суммы операторов момента импульса совпадают с точностью до коэффициентов пропорциональности с оператором момента импульса, а четные степени определяются симметрической матрицей. Это соответствует матричному векторному аналогу комплексных чисел.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/12-2/17.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2012. № 12 (67): в 2-х ч. Ч. II. С. 86-97. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/12-2/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

ассоциативна по сложению. Выполняется свойство дистрибутивности. Эта алгебра следует из аналогичной шестнадцатимерной не коммутативной по умножению и не ассоциативной алгебры, определяемой гиперкомплексными числами без деления и обратных элементов.

Нулевая координата шестнадцатимерной алгебры определяет скалярное произведение двух пятнадцатимерных векторов. Скалярное произведение двух векторов соответствует единичному метрическому 15-тензору. Таким образом, определено как векторное, так и скалярное произведение векторов одной из пятнадцатимерных алгебр.

Чтобы говорить предметно о свойствах пятнадцатимерной алгебры, можно проанализировать пятнадцатирядные квадратные матрицы L_i (Паули). С их помощью, как известно, записываются уравнения (Дирака) [2]. Трехмерные и семимерные матрицы (Паули) при этом характеризуют момент импульса в указанных алгебрах меньшей размерности.

Непосредственным умножением этих операторов можно получить приведенные выше соотношения для операторов момента импульса.

Обратим внимание читателей на существование не только одномерной и трехмерной векторной алгебры, но также семимерной, а теперь и векторных алгебр пятнадцатимерной, тридцатиодномерной и более высоких размерностей. Это, в свою очередь, ребром ставит вопрос о размерности физического пространства. Я считаю, что **размерность физического пространства неопределённая**. Она характеризуется лишь свойствами алгебры (симметрии), используемой для описания процессов, и может быть как угодно большой.

Более симметричны алгебры большей размерности; алгебры меньшей размерности соответствуют той или иной степени нарушения симметрии определяющих соотношений.

Список литературы

1. **Коротков А. В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
2. **Коротков А. В.** Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. Новочеркасск: Набла, 1999. 100 с.
3. **Коротков А. В.** Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2011. 36 с.

УДК 512.7

Физико-математические науки

В работе изучаются вопросы построения тридцатиодномерной векторной алгебры. Найдено векторное произведение двух векторов на основе рассмотрения расширения системы комплексных чисел, а также трех-, семи-, пятнадцатимерных алгебр. Найдены операторы моментов импульса, а также сумма операторов моментов импульса. Установлено, что нечетные степени суммы операторов момента импульса совпадают с точностью до коэффициентов пропорциональности с оператором момента импульса, а четные степени определяются симметрической матрицей. Это соответствует матричному векторному аналогу комплексных чисел.

Ключевые слова и фразы: векторные алгебры; пятнадцатимерная алгебра; тридцатиодномерная алгебра; векторное произведение двух векторов; оператор суммы моментов импульса; сумма определителей третьего порядка; размерность физического пространства; числа Мерсенна и совершенные числа Пифагора; ряд размерностей векторных алгебр.

Анатолий Васильевич Коротков, к.т.н., д.ф.-м.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

ЭЛЕМЕНТЫ ТРИДЦАТИОДНОМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ[©]

$$\begin{vmatrix} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{vmatrix}$$

На практике широко используется трехмерное векторное исчисление во многих отраслях науки и техники. Менее известно, но хорошо изучено семимерное векторное исчисление. Оно разработано в начале девятых годов XX столетия и рассмотрено в плане векторного семимерного анализа, спинорного и изовекторного исчисления [2; 3].

В последнее время получены серьезные результаты в отношении пятнадцатимерной векторной алгебры [1], в частности, найдены векторное произведение двух векторов, смешанное и двойное векторное произведение

трех векторов. Получено векторное произведение трех векторов. Оказывается, что пятнадцатимерная алгебра повторяет многие свойства трехмерной и семимерной алгебр в векторной форме записи при кардинальном отличии координатных форм записи. Это создает предпосылки для использования однотипных векторных соотношений. Так, например:

- в *трехмерном* случае:

$$[a[bc]] = b(ca) - (ab)c$$

$$\text{и } [a[bc]] + [b[ca]] + [c[ab]] = 0;$$

- в *семимерном* случае:

$$[a[bc]] = b(ca) - (ab)c + [abc]$$

$$\text{и } [a[bc]] + [b[ca]] + [c[ab]] = 3[abc];$$

- в *пятнадцатимерном* случае:

$$[a[bc]] = b(ca) - (ab)c + [abc]$$

$$\text{и } [a[bc]] + [b[ca]] + [c[ab]] = 3[abc],$$

т.е. вектор $[abc]$ сохраняет соответствующие свойства у семимерной и пятнадцатимерной алгебр, а следовательно, сохраняется вид уравнений семимерной и пятнадцатимерной алгебр, представленных в векторной форме записи.

Существенное отличие семимерной и пятнадцатимерной алгебр появляется лишь в случае рассмотрения произведений восьми или более векторов, когда произведения векторов семимерной алгебры обращаются в нуль. Вторым существенным отличием пятнадцатимерной алгебры от семимерной и трехмерной заключается в том, что восьмая координата получает привилегированное (неоднородное) значение, так что таблицы подстановок индексов рассматриваются не как последовательности пятнадцати координат, а как совокупность двух последовательностей из семи координат и одной последовательности с восьмой координатой. В результате, например, векторное произведение двух векторов распадается на пять неоднородных совокупностей из семи векторов. Это можно рассматривать как разложение пятнадцатимерного пространства на совокупность пяти семимерных или **тридцати пяти трехмерных** неоднородных пространств. Необходимо отметить, что *векторные алгебры большей размерности включают алгебры меньшей размерности как подалгебры*. Это приводит к тому, что векторные алгебры с размерностью, большей пятнадцати, также раскладываются на совокупности трехмерных алгебр. Отметим, что векторное произведение двух векторов семимерной алгебры состоит, однако, из семи векторных произведений двух векторов однородных трехмерных алгебр. Однородность в пятнадцатимерной алгебре отсутствует. Таким образом, все возможные 2^n-1 -мерные векторные алгебры являются комбинацией неоднородных трехмерных векторных алгебр. Из этого следует вывод, что **2^n-1 -мерные ($n>3$) алгебры являются совокупностями трехмерных неоднородных алгебр**.

Векторное произведение двух векторов в трехмерной алгебре определяется с помощью одного определителя третьего порядка, в семимерной алгебре - с помощью семи определителей третьего порядка, в пятнадцатимерной алгебре - с помощью тридцати пяти определителей третьего порядка. Попытаемся отыскать векторное произведение двух векторов 31-мерной алгебры в расчете на определение его как совокупности трехмерных векторных произведений двух векторов. Рассмотрим в связи с этим порядок получения 31-мерной векторной алгебры, используя известную процедуру удвоения чисел. Эта процедура позволяет получить из алгебры одномерных чисел комплексные числа, кватернионы и октонионы, замыкающие цепочку гиперкомплексных чисел с делением. Векторным алгебрам, однако, в принципе не свойственно наличие операции деления и получения обратных величин, поэтому замечательный результат ограниченности числа гиперкомплексных чисел с делением четырьмя типами чисел не является ограничением для получения многомерных векторных алгебр. Так, ранее была получена [Там же] пятнадцатимерная векторная алгебра, векторное произведение двух векторов в которой распадается на совокупность 35-ти определителей третьего порядка, что можно рассматривать как совокупность 35-ти трехмерных пространств. Одной из особенностей семи-, пятнадцатити-, тридцатиодно- и вообще $2n-1$ -мерных векторных алгебр является, в частности, наличие операции векторного произведения трех векторов.

Применим в начале процедуру удвоения [1; 2] к восьмимерным гиперкомплексным числам и запишем векторное произведение двух векторов. При этом произведением двух пар восьмимерных чисел $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ назовем пару

$$ab = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1),$$

$$\text{т.е. } ab = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1).$$

В координатной форме записи операции умножения двух пар восьмимерных чисел ab и далее двух пятнадцатимерных векторов могут быть представлены таблицей. Здесь ab - произведение двух шестнадцатимерных чисел, дающее в результате скалярное (ab), а также векторное $[ab]$ произведения двух векторных пятнадцатимерных величин. При этом определяется произведение двух векторных величин с пятнадцатью значащими координатами.

В результате скалярное и векторное произведения двух векторов имеют вид, представленный в таблице. Здесь a_i - i -я координата пятнадцатимерного вектора, b_j - j -я координата пятнадцатимерного вектора b . Каждая из пятнадцати координат векторного произведения двух векторов состоит из пятнадцати попарных произведений величин a_i и b_j , связанных между собой алгебраической суммой. Таким образом, векторное произведение двух векторов можно получить применением процедуры удвоения.

Эта процедура в применении к тридцатиодномерной алгебре позволяет привести Таблицу 1. В Таблице 1 первый столбик выделен жирным шрифтом и соответствует немому индексу i при координате a_i , второй столбик соответствует немому индексу j при координате b_j . Произведениям $a_i * b_j$ соответствует пара соседних столбиков. Четверки столбиков формируют величины коммутаторов $a_i * b_j - b_i * a_j$. Пятнадцать коммутаторов, суммируемые построчно, представляют одну из координат векторного произведения двух тридцатиодномерных векторов. В результате, в этой таблице отражается как скалярное (верхняя строчка), так и векторное произведение двух тридцатиодномерных векторов (остальные тридцать одна строчка). Все пары значений $a_i * b_j$ суммируются построчно, так что образуется 30 слагаемых, составленных из произведений и последующих алгебраических сумм пар значений координат (билинейных уравнений) в каждой из 31 строки. Произведения величин с индексом нуль суммируются для получения скалярного произведения двух векторов, определяемого первой строкой Таблицы 1. Отметим, что суммарное число отрицательных знаков в Таблице 1 равно совершенному числу $496 = 16 * 31$.

Векторное произведение двух векторов можно представить в виде:

$$[ab] = [(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_{31} e_{31})(b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_{31} e_{31})],$$

определяющем суммы 15 коммутаторов вида $[a_i * b_j] = a_i * b_j - a_j * b_i$ в каждой из 31-й координат, т.е. $31 * 15 = 465$ величин $[a_i * b_j]$ (Таблица 2).

Та же таблица может быть представлена в виде суммы 155 определителей (Таблица 3) третьего порядка.

$ab = a_0 b_0$	$-a_1 b_1$	$-a_2 b_2$	$-a_3 b_3$	$-a_4 b_4$	$-a_5 b_5$	$-a_6 b_6$	$-a_7 b_7$	$-a_8 b_8$	$-a_9 b_9$	$-a_{10} b_{10}$	$-a_{11} b_{11}$	$-a_{12} b_{12}$	$-a_{13} b_{13}$	$-a_{14} b_{14}$	$-a_{15} b_{15}$
$a_0 b_1$	$+a_1 b_0$	$-a_2 b_3$	$+a_3 b_2$	$-a_4 b_5$	$+a_5 b_4$	$-a_6 b_7$	$+a_7 b_6$	$-a_8 b_9$	$+a_9 b_8$	$-a_{11} b_{10}$	$+a_{10} b_{11}$	$-a_{13} b_{12}$	$+a_{12} b_{13}$	$-a_{14} b_{15}$	$+a_{15} b_{14}$
$a_0 b_2$	$+a_2 b_0$	$-a_1 b_6$	$+a_6 b_4$	$-a_5 b_7$	$+a_7 b_5$	$-a_3 b_1$	$+a_{13} b_3$	$-a_8 b_{10}$	$+a_{10} b_8$	$-a_{14} b_{12}$	$+a_{12} b_{14}$	$-a_{15} b_{13}$	$+a_{13} b_{15}$	$-a_9 b_{11}$	$+a_{11} b_9$
$a_0 b_3$	$+a_3 b_0$	$-a_6 b_5$	$+a_5 b_6$	$-a_{11} b_2$	$+a_2 b_{11}$	$-a_4 b_7$	$+a_7 b_4$	$-a_8 b_{11}$	$+a_{11} b_8$	$-a_{13} b_{14}$	$+a_{14} b_{13}$	$-a_{10} b_9$	$+a_9 b_{10}$	$-a_{15} b_{12}$	$+a_{12} b_{15}$
$a_0 b_4$	$+a_4 b_0$	$-a_5 b_{11}$	$+a_{11} b_5$	$-a_7 b_3$	$+a_3 b_7$	$-a_6 b_2$	$+a_2 b_6$	$-a_8 b_{12}$	$+a_{12} b_8$	$-a_9 b_{13}$	$+a_{13} b_9$	$-a_{11} b_{15}$	$+a_{15} b_{11}$	$-a_{10} b_{14}$	$+a_{14} b_{10}$
$a_0 b_5$	$+a_5 b_0$	$-a_7 b_2$	$+a_2 b_7$	$-a_3 b_6$	$+a_6 b_3$	$-a_{11} b_4$	$+a_4 b_{11}$	$-a_8 b_{13}$	$+a_{13} b_8$	$-a_{10} b_{15}$	$+a_{15} b_{10}$	$-a_{14} b_{11}$	$+a_{11} b_{14}$	$-a_{12} b_9$	$+a_9 b_{12}$
$a_0 b_6$	$+a_6 b_0$	$-a_{11} b_7$	$+a_7 b_{11}$	$-a_2 b_4$	$+a_4 b_2$	$-a_3 b_5$	$+a_5 b_3$	$-a_8 b_{14}$	$+a_{14} b_8$	$-a_{13} b_9$	$+a_9 b_{15}$	$-a_{12} b_{10}$	$+a_{10} b_{12}$	$-a_{11} b_{13}$	$+a_{13} b_{11}$
$a_0 b_7$	$+a_7 b_0$	$-a_3 b_4$	$+a_4 b_3$	$-a_6 b_{11}$	$+a_{11} b_6$	$-a_5 b_5$	$+a_5 b_2$	$-a_8 b_{15}$	$+a_{15} b_8$	$-a_{12} b_{11}$	$+a_{11} b_{12}$	$-a_9 b_{14}$	$+a_{14} b_9$	$-a_{13} b_{10}$	$+a_{10} b_{13}$
$a_0 b_8$	$+a_8 b_0$	$-a_4 b_{11}$	$+a_{11} b_4$	$-a_{10} b_2$	$+a_2 b_{10}$	$-a_{11} b_3$	$+a_{13} b_{11}$	$-a_{12} b_4$	$+a_{14} b_{12}$	$-a_{13} b_5$	$+a_{15} b_{13}$	$-a_{14} b_6$	$+a_{16} b_{14}$	$-a_{15} b_7$	$+a_{17} b_{15}$
$a_0 b_9$	$+a_9 b_0$	$-a_5 b_{10}$	$+a_{10} b_5$	$-a_5 b_{12}$	$+a_{12} b_5$	$-a_6 b_{15}$	$+a_{15} b_6$	$-a_{17} b_8$	$+a_{18} b_{11}$	$-a_{11} b_2$	$+a_{12} b_{11}$	$-a_{13} b_4$	$+a_{14} b_{13}$	$-a_{14} b_7$	$+a_{17} b_{14}$
$a_0 b_{10}$	$+a_{10} b_0$	$-a_6 b_{12}$	$+a_{12} b_6$	$-a_7 b_{13}$	$+a_{13} b_7$	$-a_{11} b_{11}$	$+a_{11} b_{11}$	$-a_{18} b_8$	$+a_{18} b_2$	$-a_{14} b_4$	$+a_{14} b_{14}$	$-a_{15} b_5$	$+a_{15} b_{15}$	$-a_9 b_3$	$+a_{19} b_9$
$a_0 b_{11}$	$+a_{11} b_0$	$-a_3 b_{14}$	$+a_{14} b_3$	$-a_2 b_9$	$+a_9 b_2$	$-a_7 b_{12}$	$+a_{12} b_7$	$-a_{18} b_8$	$+a_{18} b_3$	$-a_{13} b_6$	$+a_{16} b_{13}$	$-a_{10} b_1$	$+a_{10} b_{10}$	$-a_{15} b_4$	$+a_{15} b_{15}$
$a_0 b_{12}$	$+a_{12} b_0$	$-a_{11} b_{13}$	$+a_{13} b_{11}$	$-a_3 b_{15}$	$+a_{15} b_3$	$-a_2 b_{14}$	$+a_{14} b_2$	$-a_{18} b_8$	$+a_{18} b_4$	$-a_9 b_5$	$+a_{19} b_9$	$-a_{11} b_7$	$+a_{11} b_{11}$	$-a_{10} b_6$	$+a_{10} b_{10}$
$a_0 b_{13}$	$+a_{13} b_0$	$-a_2 b_{15}$	$+a_{15} b_2$	$-a_6 b_{11}$	$+a_{11} b_6$	$-a_4 b_9$	$+a_9 b_4$	$-a_{18} b_8$	$+a_{18} b_5$	$-a_{10} b_7$	$+a_{10} b_{10}$	$-a_{14} b_3$	$+a_{14} b_{14}$	$-a_{12} b_1$	$+a_{12} b_{12}$
$a_0 b_{14}$	$+a_{14} b_0$	$-a_9 b_7$	$+a_7 b_9$	$-a_{11} b_{10}$	$+a_{10} b_{11}$	$-a_3 b_{13}$	$+a_{13} b_3$	$-a_{18} b_8$	$+a_{18} b_6$	$-a_{15} b_1$	$+a_{15} b_{15}$	$-a_{12} b_2$	$+a_{12} b_{12}$	$-a_{11} b_5$	$+a_{11} b_{11}$
$a_0 b_{15}$	$+a_{15} b_0$	$-a_4 b_{11}$	$+a_{11} b_4$	$-a_{11} b_{14}$	$+a_{14} b_{11}$	$-a_5 b_{10}$	$+a_{10} b_5$	$-a_{18} b_8$	$+a_{18} b_7$	$-a_{12} b_3$	$+a_{12} b_{12}$	$-a_9 b_6$	$+a_9 b_9$	$-a_{13} b_2$	$+a_{13} b_{13}$
$(ab) =$															
$-a_1 b_1$	$-a_2 b_2$	$-a_3 b_3$	$-a_4 b_4$	$-a_5 b_5$	$-a_6 b_6$	$-a_7 b_7$	$-a_8 b_8$	$-a_9 b_9$	$-a_{10} b_{10}$	$-a_{11} b_{11}$	$-a_{12} b_{12}$	$-a_{13} b_{13}$	$-a_{14} b_{14}$	$-a_{15} b_{15}$	
$[ab] =$															
$-a_2 b_3$	$+a_3 b_2$	$-a_4 b_5$	$+a_5 b_4$	$-a_6 b_7$	$+a_7 b_6$	$-a_8 b_9$	$+a_9 b_8$	$-a_{11} b_{10}$	$+a_{10} b_{11}$	$-a_{13} b_{12}$	$+a_{12} b_{13}$	$-a_{14} b_{15}$	$+a_{15} b_{14}$		
$-a_4 b_6$	$+a_6 b_4$	$-a_5 b_7$	$+a_7 b_5$	$-a_3 b_{11}$	$+a_{11} b_3$	$-a_8 b_{10}$	$+a_{10} b_8$	$-a_{14} b_{12}$	$+a_{12} b_{14}$	$-a_{15} b_{13}$	$+a_{13} b_{15}$	$-a_9 b_{11}$	$+a_{11} b_9$		
$-a_6 b_5$	$+a_5 b_6$	$-a_{11} b_2$	$+a_2 b_{11}$	$-a_4 b_7$	$+a_7 b_4$	$-a_8 b_{11}$	$+a_{11} b_8$	$-a_{13} b_{14}$	$+a_{14} b_{13}$	$-a_{10} b_9$	$+a_9 b_{10}$	$-a_{15} b_{12}$	$+a_{12} b_{15}$		
$-a_5 b_{11}$	$+a_{11} b_5$	$-a_7 b_3$	$+a_3 b_7$	$-a_6 b_2$	$+a_2 b_6$	$-a_8 b_{12}$	$+a_{12} b_8$	$-a_9 b_{13}$	$+a_{13} b_9$	$-a_{11} b_{15}$	$+a_{15} b_{11}$	$-a_{10} b_{14}$	$+a_{14} b_{10}$		
$-a_7 b_2$	$+a_2 b_7$	$-a_3 b_6$	$+a_6 b_3$	$-a_{11} b_4$	$+a_4 b_{11}$	$-a_8 b_{13}$	$+a_{13} b_8$	$-a_{10} b_{15}$	$+a_{15} b_{10}$	$-a_{14} b_{11}$	$+a_{11} b_{14}$	$-a_{12} b_9$	$+a_9 b_{12}$		
$-a_{11} b_7$	$+a_7 b_{11}$	$-a_2 b_4$	$+a_4 b_2$	$-a_3 b_5$	$+a_5 b_3$	$-a_8 b_{14}$	$+a_{14} b_8$	$-a_{15} b_9$	$+a_9 b_{15}$	$-a_{12} b_{10}$	$+a_{10} b_{12}$	$-a_{11} b_{13}$	$+a_{13} b_{11}$		
$-a_3 b_4$	$+a_4 b_3$	$-a_6 b_{11}$	$+a_{11} b_6$	$-a_2 b_5$	$+a_5 b_2$	$-a_8 b_{15}$	$+a_{15} b_8$	$-a_{12} b_{11}$	$+a_{11} b_{12}$	$-a_9 b_{14}$	$+a_{14} b_9$	$-a_{13} b_{10}$	$+a_{10} b_{13}$		
$-a_9 b_{11}$	$+a_{11} b_9$	$-a_{10} b_2$	$+a_2 b_{10}$	$-a_{11} b_3$	$+a_{13} b_{11}$	$-a_{12} b_4$	$+a_{14} b_{12}$	$-a_{13} b_5$	$+a_{15} b_{13}$	$-a_{14} b_6$	$+a_{16} b_{14}$	$-a_{15} b_7$	$+a_{17} b_{15}$		
$-a_3 b_{10}$	$+a_{10} b_3$	$-a_5 b_{12}$	$+a_{12} b_5$	$-a_6 b_{15}$	$+a_{15} b_6$	$-a_{17} b_8$	$+a_{18} b_{11}$	$-a_{11} b_2$	$+a_{12} b_{11}$	$-a_{13} b_4$	$+a_{14} b_{13}$	$-a_{14} b_7$	$+a_{17} b_{14}$		
$-a_6 b_{12}$	$+a_{12} b_6$	$-a_7 b_{13}$	$+a_{13} b_7$	$-a_{11} b_{11}$	$+a_{11} b_{11}$	$-a_{18} b_8$	$+a_{18} b_2$	$-a_{14} b_4$	$+a_{14} b_{14}$	$-a_{15} b_5$	$+a_{15} b_{15}$	$-a_9 b_3$	$+a_{19} b_9$		
$-a_3 b_{14}$	$+a_{14} b_3$	$-a_2 b_9$	$+a_9 b_2$	$-a_7 b_{12}$	$+a_{12} b_7$	$-a_3 b_8$	$+a_8 b_3$	$-a_{13} b_6$	$+a_{16} b_{13}$	$-a_{10} b_1$	$+a_{10} b_{10}$	$-a_{15} b_4$	$+a_{15} b_{15}$		
$-a_{11} b_{13}$	$+a_{13} b_{11}$	$-a_3 b_{15}$	$+a_{15} b_3$	$-a_2 b_{14}$	$+a_{14} b_2$	$-a_4 b_8$	$+a_8 b_4$	$-a_5 b_5$	$+a_5 b_9$	$-a_{11} b_7$	$+a_{11} b_{11}$	$-a_{10} b_6$	$+a_{10} b_{10}$		
$-a_5 b_{15}$	$+a_{15} b_5$	$-a_6 b_{11}$	$+a_{11} b_6$	$-a_4 b_9$	$+a_9 b_4$	$-a_5 b_8$	$+a_8 b_5$	$-a_{10} b_7$	$+a_{10} b_{10}$	$-a_{14} b_3$	$+a_{14} b_{14}$	$-a_{12} b_1$	$+a_{12} b_{12}$		
$-a_7 b_9$	$+a_9 b_7$	$-a_4 b_{10}$	$+a_{10} b_4$	$-a_3 b_{13}$	$+a_{13} b_3$	$-a_6 b_8$	$+a_8 b_6$	$-a_{15} b_1$	$+a_{15} b_{15}$	$-a_{12} b_2$	$+a_{12} b_{12}$	$-a_{11} b_5$	$+a_{11} b_{11}$		
$-a_4 b_{11}$	$+a_{11} b_4$	$-a_{11} b_{14}$	$+a_{14} b_{11}$	$-a_5 b_{10}$	$+a_{10} b_5$	$-a_7 b_8$	$+a_8 b_7$	$-a_{12} b_3$	$+a_{12} b_{12}$	$-a_9 b_6$	$+a_9 b_9$	$-a_{13} b_2$	$+a_{13} b_{13}$		

Табл. 1

0	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	-6	6	-7	7	-8	8	-9	9	-10	10	-11	11	-12	12	-13	13	-14	14	-15	15
0	1	1	0	3	2	-2	3	5	4	-4	5	6	7	-7	6	9	8	-8	9	10	11	-11	10	12	13	-13	12	15	14	-14	15
0	2	1	3	2	0	-3	1	6	4	7	5	-4	6	-5	7	10	8	11	9	-8	10	-9	11	12	14	13	15	-14	12	-15	13
0	3	-1	2	3	0	2	1	7	4	-6	5	-4	7	5	6	11	8	-10	9	-8	11	9	10	12	15	-13	14	-15	12	14	13
0	4	1	5	2	6	3	7	4	0	-5	1	-6	2	-7	3	12	8	13	9	14	10	15	11	-8	12	-9	13	-10	14	-11	15
0	5	-1	4	-3	6	2	7	5	0	4	1	6	3	-7	2	13	8	-12	9	-14	11	15	10	-8	13	9	12	11	14	-10	15
0	6	-1	7	-2	4	3	5	6	0	7	1	4	2	-5	3	14	8	-15	9	-12	10	13	11	-8	14	9	15	10	12	-11	13
0	7	1	6	-3	4	-2	5	7	0	-6	1	4	3	5	2	15	8	14	9	-12	11	-13	10	-8	15	-9	14	11	12	10	13
0	8	1	9	2	10	3	11	4	12	5	13	6	14	7	15	8	0	-9	1	-10	2	-11	3	-12	4	-13	5	-14	6	-15	7
0	9	-1	8	-3	10	2	11	-5	12	4	13	-6	15	7	14	9	0	8	1	10	3	-11	2	12	5	-13	4	15	6	-14	7
0	10	-1	11	-2	8	3	9	-6	12	-7	13	4	14	5	15	10	0	11	1	8	2	-9	3	12	6	13	7	-14	4	-15	5
0	11	1	10	-3	8	-2	9	-7	12	6	13	4	15	-5	14	11	0	-10	1	8	3	9	2	12	7	-13	6	-15	4	14	5
0	12	-1	13	-2	14	-3	15	-4	8	5	9	6	10	7	11	12	0	13	1	14	2	15	3	8	4	-9	5	-10	6	-11	7
0	13	1	12	3	14	-3	15	-5	8	-4	9	-6	11	7	10	13	0	-12	1	-14	3	15	2	8	5	9	4	11	6	-10	7
0	14	1	15	2	12	-3	13	-6	8	-7	9	-4	10	5	11	14	0	-15	1	-12	2	13	3	8	6	9	7	10	4	-11	5
0	15	-1	14	3	12	2	13	-7	8	6	9	-4	11	-5	10	15	0	14	1	-12	3	-13	2	8	7	-9	6	11	4	10	5
0	16	1	17	2	18	3	19	4	20	5	21	6	22	7	23	8	24	9	25	10	26	11	27	12	28	13	29	14	30	15	31
0	17	-1	16	-3	18	2	19	-5	20	4	21	-6	23	7	22	9	24	8	25	-10	27	11	26	-12	29	13	28	-15	30	14	31
0	18	-1	19	-2	16	3	17	-6	20	-7	21	4	22	5	23	10	24	-11	25	8	26	9	27	-12	30	-13	31	14	28	15	29
0	19	1	18	-3	16	-2	17	-7	20	6	21	4	23	-5	22	11	24	10	25	8	27	-9	26	-12	31	13	30	15	28	-14	29
0	20	-1	21	-2	22	-3	23	-4	16	5	17	6	18	7	19	12	24	-13	25	-14	26	-15	27	8	28	9	29	10	30	11	31
0	21	1	20	3	22	-2	23	-5	16	-4	17	-6	19	7	18	13	24	12	25	14	27	-15	26	8	29	-9	28	-11	30	10	31
0	22	1	23	2	20	-3	21	-6	16	-7	17	-4	18	5	19	14	24	15	25	12	26	-13	27	8	30	-9	31	-10	28	11	29
0	23	-1	22	3	20	2	21	-7	16	6	17	-4	19	-5	18	15	24	-14	25	12	27	13	26	8	31	9	30	-11	28	-10	29
0	24	-1	25	-2	26	-3	27	-4	28	-5	29	-6	30	-7	31	-8	16	9	17	10	18	11	19	12	20	13	21	14	22	15	23
0	25	1	24	3	26	-2	27	5	28	-4	29	6	31	-9	30	-9	16	-8	17	-10	19	11	18	-12	21	13	20	-15	22	14	23
0	26	1	27	2	24	-3	25	6	28	7	29	-4	30	-5	31	-10	16	-11	17	-8	18	9	19	-12	22	-13	23	14	20	15	21
0	27	-1	26	3	24	2	25	7	28	-6	29	-4	31	5	30	-11	16	10	17	-8	19	-9	18	-12	23	13	22	15	20	-14	21
0	28	1	29	2	30	3	31	4	24	-5	25	-6	26	-7	27	-12	16	-13	17	-14	18	-15	19	-8	20	9	21	10	22	11	23
0	29	-1	28	-3	30	2	31	5	24	4	25	6	27	-7	26	-13	16	12	17	14	19	-15	18	-8	21	-9	20	-11	22	10	23
0	30	-1	31	-2	28	3	29	6	24	7	25	4	26	-5	27	-14	16	15	17	12	18	-13	19	-8	22	-9	23	-10	20	11	21
0	31	1	30	-3	28	-2	29	7	24	-6	25	4	27	5	26	-15	16	-14	17	12	19	13	18	-8	23	9	22	-11	20	-10	21

-16	16	-17	17	-18	18	-19	19	-20	20	-21	21	-22	22	-23	23	-24	24	-25	25	-26	26	-27	27	-28	28	-29	29	-30	30	-31	31
17	16	-16	17	18	19	-19	18	20	21	-21	20	23	22	-22	23	24	25	-25	24	27	26	-26	27	29	28	-28	29	30	31	-31	30
18	16	19	17	-16	18	-17	19	20	22	21	23	-22	20	-23	21	24	26	25	27	-26	24	-27	25	30	28	31	29	-28	30	-29	31
19	16	-18	17	-16	19	17	18	20	23	-21	22	-23	20	22	21	24	27	-25	26	-27	24	26	25	31	28	-30	29	-28	31	29	30
20	16	21	17	22	18	23	19	-16	20	-17	21	-18	22	-19	23	24	28	25	29	26	30	27	31	-28	24	-29	25	-30	26	-31	27
21	16	-20	17	-22	19	23	18	-16	21	17	20	19	22	-18	23	24	29	-25	28	-27	30	26	31	-29	24	28	25	30	27	-31	26
22	16	-23	17	-20	18	21	19	-16	22	17	23	-18	20	-19	21	24	30	-25	31	-26	28	27	29	-30	24	31	25	28	26	-29	27
23	16	22	17	-20	19	-21	18	-16	23	-17	22	19	20	18	21	24	31	25	30	-27	28	-26	29	-31	24	-30	25	28	27	29	26
24	16	25	17	-26	18	27	19	-28	20	29	21	30	22	31	23	-16	24	-17	25	-18	26	-19	27	-20	28	-21	29	-22	30	-23	31
25	16	-24	17	-26	19	27	18	-28	21	29	20	-31	22	30	23	-16	25	17	24	19	26	-18	27	21	28	-20	29	22	31	-23	30
26	16	-27	17	-24	18	25	19	-28	22	-29	23	30	20	31	21	-16	26	17	27	18	24	-19	25	22	28	23	29	-20	30	-21	31
27	16	26	17	-24	19	-25	18	-28	23	29	22	31	20	-30	21	-16	27	-17	26	19	24	18	25	23	28	-22	29	-20	31	21	30
28	16	-29	17	-30	18	-31	19	-24	20	25	21	26	22	27	23	-16	28	17	29	18	30	19	31	20	24	-21	25	-22	26	-23	27
29	16	28	17	30	19	-31	18	-24	21	-25	20	-27	22	26	23	-16	29	-17	28	-19	30	18	31	21	24	20	25	22	27	-23	26
30	16	31	17	28	18	-29	19	-24	22	-25	23	-26	20	27	21	-16	30	-17	31	-18	28	19	29	22	24	23	25	20	26	-21	27
31	16	-30	17	28	19	29	18	-24	23	25	22	-27	20	-26	21	-16	31	17	30	-19	28	-18	29	23	24	-22	25	20	27	21	26
16	0	-17	1	-18	2	-19	3	-20	4	-21	5	-22	6	-23	7	-24	8	-25	9	-26	10	-27	11	-28	12	-29	13	-30	14	-31	15
17	0	16	1	18	3	-19	2	20	5	-21	4	23	6	-22	7	-24	9	-25	8	27	10	-26	11	29	12	-28	13	30	15	-31	14
18	0	19	1	16	2	-17	3	20	6	21	7	-22	4	-23	5	-24	10	25	11	-26	8	-27	9	30	12	31	13	-28	14	-29	15
19	0	-18	1	16	3	17	2	20	7	-21	6	-23	4	22	5	-24	11	-25	10	-27	8	26	9	31	12	-30	13	-28	15	29	14
20	0	21	1	22	2	23	3	16	4	-17	5	-18	6	-19	7	-24	12	25	13	26	14	27	15	-28	8	-29	9	-30	10	-31	11
21	0	-20	1	-22	3	23	2	16	5	17	4	19	6	-18	7	-24	13	-25	12	-27	14	26	15	-29	8	28	9	30	11	-31	10
22	0	-23	1	-20	2	21	3	16	6	17	7	18	4	-19	5	-24	14	-25	15	-26	12	27	13	-30	8	31	9	28	10	-29	11
23	0	22	1	-20	3	-21	2	16	7	-17	6	19	4	18	5	-24	15	25	14	-27	12	-26	13	-31	8	-30	9	28	11	29	10
24	0	25	1	26	2	27	3	28	4	29	5	30	6	31	7	16	8	-17	9	-18	10	-19	11	-20	12	-21	13	-22	14	-23	15
25	0	-24	1	-26	3	27	2	-28	5	29	4	-31	6	30	7	16	9	17	8	19	10	-18	11	21	12	-20	13	22	15	-23	14
26	0	-27	1	-24	2	25	3	-28	6	-29	7	30	4	31	5	16	10	17	11	18	8	-19	9	22	12	23	13	-20	14	-21	15
27	0	26	1	-24	3	-25	2	-28	7	29	6	31	4	-30	5	16	11	-17	10	19	8	18	9	23	12	-22	13	-20	15	21	14
28	0	-29	1	-30	2	-31	3	-24	4	25	5	26	6	27	7	16	12	17	13	18	14	19	15	20	8	-21	9	-22	10	-23	11
29	0	28	1	30	3	-31	2	-24	5	-25	4	-27	6	26	7	16	13	-17	12	-19	14	18	15	21	8	20	9	22	11	-23	10
30	0	31	1	28	2	-29	3	-24	6	-25	7	-26	4	27	5	16	14	-17	15	-18	12	19	13	22	8	23	9	20	10	-21	11
31	0	-30	1	28	3	29	2	-24	7	25	6	-27	4	-26	5	16	15	17	14	-19	12	-18	13	23	8	-22	9	20	11	21	10

Табл. 2

1	2, 3	4, 5	7, 6	8, 9	11,10	13,12	14,15	16,17	19,18	21,20	22,23	25,24	26,27	28,29	31,30
2	4, 6	5, 7	3, 1	8,10	14,12	15,13	9, 11	16,18	22,20	23,21	17,19	26,24	28,30	29,31	27,25
3	6, 5	1, 2	4, 7	8,11	13,14	10, 9	15,12	16,19	21,22	18,17	23,20	27,24	30,29	25,26	28,31
4	5, 1	7, 3	6, 2	8,12	9, 13	11,15	10,14	16,20	17,21	19,23	18,22	28,24	29,25	31,27	30,26
5	7, 2	3, 6	1, 4	8,13	10,15	14,11	12, 9	16,21	18,23	22,19	20,17	29,24	31,26	27,30	25,28
6	1, 7	2, 4	5, 3	8,14	15, 9	12,10	11,13	16,22	23,17	20,18	19,21	30,24	25,31	26,28	29,27
7	3, 4	6, 1	2, 5	8,15	12,11	9, 14	13,10	16,23	20,19	17,22	21,18	31,24	27,28	30,25	26,29
8	9, 1	10, 2	11, 3	12, 4	13, 5	14, 6	15, 7	16,24	17,25	18,26	19,27	20,28	21,29	22,30	23,31
9	11, 2	13, 4	14, 7	1, 8	3, 10	5, 12	6, 15	16,25	18,27	20,29	23,30	24,17	26,19	28,21	31,22
10	14, 4	15, 5	9, 3	2, 8	6, 12	7, 13	1, 11	16,26	20,30	21,31	19,25	24,18	28,22	29,23	27,17
11	13, 6	10, 1	15, 4	3, 8	5, 14	2, 9	7, 12	16,27	22,29	17,26	20,31	24,19	30,21	25,18	28,23
12	9, 5	11, 7	10, 6	4, 8	1, 13	3, 15	2, 14	16,28	21,25	23,27	22,26	24,20	29,17	31,19	30,18
13	10, 7	14, 3	12, 1	5, 8	2, 15	6, 11	4, 9	16,29	23,26	19,30	17,28	24,21	31,18	27,22	25,20
14	15, 1	12, 2	11, 5	6, 8	7, 9	4, 10	3, 13	16,30	17,31	18,28	21,27	24,22	25,23	26,20	29,19
15	12, 3	9, 6	13, 2	7, 8	4, 11	1, 14	5, 10	16,31	19,28	22,25	18,29	24,23	27,20	30,17	26,21
16	17, 1	18, 2	19, 3	20, 4	21, 5	22, 6	23, 7	24, 8	25, 9	26,10	27,11	28,12	29,13	30,14	31,15
17	19, 2	21, 4	22, 7	25, 8	10,27	12,29	15,30	1, 16	3, 18	5, 20	6, 23	9, 24	26,11	28,13	31,14
18	22, 4	23, 5	17, 3	26, 8	12,30	13,31	11,25	2, 16	6, 20	7, 21	1, 19	10,24	28,14	29,15	27, 9
19	21, 6	18, 1	23, 4	27, 8	14,29	9, 26	12,31	3, 16	5, 22	2, 17	7, 20	11,24	30,13	25,10	28,15
20	17, 5	19, 7	18, 6	28, 8	13,25	15,27	14,26	4, 16	1, 21	3, 23	2, 22	12,24	29, 9	31,11	30,10
21	18, 7	22, 3	20, 1	29, 8	15,26	11,30	9, 28	5, 16	2, 23	6, 19	4, 17	13,24	31,10	27,14	25,12
22	23, 1	20, 2	19, 5	30, 8	9, 31	10,28	13,27	6, 16	7, 17	4, 18	3, 21	14,24	25,15	26,12	29,11
23	20, 3	17, 6	21, 2	31, 8	11,28	14,25	10,29	7, 16	4, 19	1, 22	5, 18	15,24	27,12	30, 9	26,13
24	1, 25	2, 26	3, 27	4, 28	5, 29	6, 30	7, 31	8, 16	17, 9	18,10	19,11	20,12	21,13	22,14	23,15
25	2, 27	4, 29	7, 30	8, 17	10,19	12,21	15,22	9, 16	18,11	20,13	23,14	24, 1	26, 3	28, 5	31, 6
26	4, 30	5, 31	3, 25	8, 18	12,22	13,23	11,17	10,16	20,14	21,15	19, 9	24, 2	28, 6	29, 7	27, 1
27	6, 29	1, 26	4, 31	8, 19	14,21	9, 18	12,23	11,16	22,13	17,10	20,15	24, 3	30, 5	25, 2	28, 7
28	5, 25	7, 27	6, 26	8, 20	13,17	15,19	14,18	12,16	21, 9	23,11	22,10	24, 4	29, 1	31, 3	30, 2
29	7, 26	3, 30	1, 28	8, 21	15,18	11,22	9, 20	13,16	23,10	19,14	17,12	24, 5	31, 2	27, 6	25, 4
30	1, 31	2, 28	5, 27	8, 22	9, 23	10,20	13,19	14,16	17,15	18,12	21,11	24, 6	25, 7	26, 4	29, 3
31	3, 28	6, 25	2, 29	8, 23	11,20	14,17	10,21	15,16	19,12	22, 9	18,13	24, 7	27, 4	30, 1	26, 5

Табл. 3

1	2,3	...	...	8, 9	11,10	13,12	14,15	16,17	19,18	21,20	22,23	24,25	27,26	29,28	30,31
2	4,6			8,10	14,12	15,13	9, 11	16,18	22,20	23,21	17,19	24,26	30,28	31,29	25,27
3	6,5	...	...	8,11	13,14	10, 9	15,12	16,19	21,22	18,17	23,20	24,27	29,30	26,25	31,28
4	5,1			8,12	9, 13	11,15	10,14	16,20	17,21	19,23	18,22	24,28	25,29	27,31	26,30
5	7,2	...	...	8,13	10,15	14,11	12, 9	16,21	18,23	22,19	20,17	24,29	26,31	30,27	28,25
6	1,7			8,14	15, 9	12,10	11,13	16,22	23,17	20,18	19,21	24,30	31,25	28,26	27,29
7	3,4	...	...	8,15	12,11	9, 14	13,10	16,23	20,19	17,22	21,18	24,31	28,27	25,30	29,26
8	...	...	...	...	...	...	...	16,24	17,25	18,26	19,27	20,28	21,29	22,30	23,31
9								16,25	18,27	20,29	23,30	17,24	26,19	28,21	31,22
10	...	...	...	...	...	...	...	16,26	20,30	21,31	19,25	18,24	28,22	29,23	27,17
11								16,27	22,29	17,26	20,31	19,24	30,21	25,18	28,23
12	...	...	...	...	...	...	...	16,28	21,25	23,27	22,26	20,24	29,17	31,19	30,18
13								16,29	23,26	19,30	17,28	21,24	31,18	27,22	25,20
14	...	...	...	...	...	...	...	16,30	17,31	18,28	21,27	22,24	25,23	26,20	29,19
15								16,31	19,28	22,25	18,29	23,24	27,20	30,17	26,21

Табл. 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11	16	18	20	22	21	23	17	19	24	26	28	30	29	31	25	27
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12	16	19	22	21	17	18	23	20	24	27	30	29	25	26	31	28
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14	16	20	21	17	23	19	18	22	24	28	29	25	31	27	26	30
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9	16	21	23	18	19	22	20	17	24	29	31	25	27	30	28	25
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13	16	22	17	23	18	20	19	21	24	30	25	31	26	28	27	29
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10	16	23	19	20	22	17	21	18	24	31	27	28	30	25	29	26

Табл. 5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	-3	2	-5	4	7	-6	-9	8	11	-10	13	-12	-15	14	-17	16	19	-18	21	-20	-23	22	25	-24	-27	26	-29	28	31	-
2	3	0	-1	-6	-7	4	5	-10	-11	8	9	14	15	-12	-13	-18	-19	16	17	22	23	-20	-21	26	27	-24	-25	-30	-31	28	29
3	-2	1	0	-7	6	-5	4	-11	10	-9	8	15	-14	13	-12	-19	18	-17	16	23	-22	21	-20	27	-26	25	-24	-31	30	-29	28
4	5	6	7	0	-1	-2	-3	-12	-13	-14	-15	8	9	10	11	-20	-21	-22	-23	16	17	18	19	28	29	30	31	-24	-25	-26	-
5	-4	7	-6	1	0	3	-2	-13	12	-15	14	-9	8	-11	10	-21	20	-23	22	-17	16	-19	18	29	-28	31	-30	25	-24	27	-
6	-7	-4	5	2	-3	0	1	-14	15	12	-13	-10	11	8	-9	-22	23	20	-21	-18	19	16	-17	30	-31	-28	29	26	-27	-24	25
7	6	-5	-4	3	2	-1	0	-15	-14	13	12	-11	-10	9	8	-23	-22	21	20	-19	-18	17	16	31	30	-29	-28	27	26	-25	-
8	9	10	11	12	13	14	15	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-24	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31	16	17	18	19	20	21	22	23
9	-8	11	-10	13	-12	-15	14	1	0	3	-2	5	-4	-7	6	-25	24	-27	26	-29	28	31	-30	-17	16	-19	18	-21	20	23	-
10	-11	-8	9	14	15	-12	-13	2	-3	0	1	6	7	-4	-5	-26	27	24	-25	-30	-31	28	29	-18	19	16	-17	-22	-23	20	21
11	-10	-9	-8	15	-14	13	-12	3	2	-1	0	7	-6	5	-4	-27	-26	25	24	-31	30	-29	28	-19	-18	17	16	-23	22	-21	20
12	-13	-14	-15	-8	9	10	11	4	-5	-6	-7	0	1	2	3	-28	29	30	31	24	-25	-26	-27	-20	21	22	23	16	-17	-18	-
13	-12	-15	14	-9	-8	-11	10	5	4	-7	6	-1	0	-3	2	-29	-28	31	-30	25	24	27	-26	-21	-20	23	-22	17	16	19	-
14	15	12	-13	-10	11	-8	-9	6	7	4	-5	-2	3	0	-1	-30	-31	-28	29	26	-27	24	25	-22	-23	-20	21	18	-19	16	17
15	-14	13	12	-11	-10	9	-8	7	-6	5	4	-3	-2	1	0	-31	30	-29	-28	27	26	-25	24	-23	22	-21	-20	19	18	-17	16
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-
17	-16	19	-18	21	-20	23	22	25	-24	-27	26	-29	28	31	-30	1	0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-
18	-19	-16	17	22	23	-20	-21	26	27	-24	-25	-30	-31	28	29	2	-3	0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
19	18	-17	-16	23	-22	21	-20	27	-26	25	-24	-31	30	-29	28	3	2	-1	0	7	-6	5	-4	11	-10	9	-8	-15	14	-13	12
20	-21	-22	-23	-16	17	18	19	28	29	30	31	-24	-25	-26	-27	4	-5	-6	-7	0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-
21	20	-23	22	-17	-16	-19	18	29	-28	31	-30	25	-24	27	-26	5	4	-7	6	-1	0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-
22	23	20	-21	-18	19	-16	-17	30	-31	-28	29	26	-27	-24	25	6	7	4	-5	-2	3	0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
23	-22	21	20	-19	-18	17	-16	31	30	-29	-28	27	26	-25	-24	7	-6	5	4	-3	-2	1	0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
24	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31	-16	17	18	19	20	21	22	23	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	0	1	2	3	4	5	6	7
25	24	-27	26	-29	28	31	-30	-17	-16	-19	-18	-21	-20	-23	-22	9	8	-11	-10	-13	-12	15	-14	-1	0	-3	-2	-5	-4	7	-6
26	27	24	-25	-30	-31	28	29	-18	19	-16	-17	-22	-23	20	21	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	0	-1	-6	-7	4	5
27	-26	25	24	-31	30	-29	28	-19	-18	17	-16	-23	22	-21	20	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	0	-7	6	-5	4
28	29	30	31	24	-25	-26	-27	-20	21	22	23	-16	-17	-18	-19	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	0	-1	-2	-3
29	-28	31	-30	25	24	27	-26	-21	-20	23	-22	17	-16	19	-18	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	0	3	-2
30	-31	-28	29	26	-27	24	25	-22	-23	-20	21	18	-19	-16	17	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	0	1
31	30	-29	-28	27	26	-25	24	-23	22	-21	-20	19	18	-17	-16	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	0

Табл. 6

-L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
17	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
18	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
19	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
20	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
21	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
22	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
23	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
24	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1
25	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	0	-1	1	-1	1	1	-1
26	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	-1	-1	1	1
27	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	1
28	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	0	-1	-1	-1
29	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	0	1	-1
30	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	0	1
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

три последних блока таблицы подстановок индексов соответствуют сдвигу индексов на число, кратное числу восемь. При этом 8-я, 16-я и 24-я координаты резко отличаются от всех остальных координат.

Таблица 3 определяет векторное произведение двух векторов как сумму 155-ти не повторяющихся определителей 3-го порядка. Тридцатиодномерную алгебру определяют в полном масштабе $C_{31}^3=4495$ определителей 3-го порядка. Таким образом, векторное произведение двух векторов является лишь незначительной частью фиксирующих алгебру определителей, дающих в совокупности $4495=4340+155$, так что 4340 определителей третьего порядка формируют векторное произведение трех векторов. В каждой координате векторного произведения трех векторов имеет место $4340/31=140$ определителей 3-го порядка. Таким образом, задействованы все возможные комбинации трех координат в векторных произведениях двух и трех векторов. Необходимо отметить, что эти векторные произведения заданы суммой определителей третьего порядка, а следовательно, имеют свойства, аналогичные свойствам определителей, то есть:

- векторные произведения двух и трех векторов не изменятся, если вынести за скобки скалярный множитель;
- векторные произведения двух и трех векторов изменяют знак при перестановке любой пары векторов;
- циклическая подстановка векторов меняет знак векторного произведения двух векторов и не меняет знака векторного произведения трех векторов;
- векторные произведения двух и трех векторов дистрибутивны;
- если два вектора в векторном произведении двух или трех векторов компланарны, то это произведение равно 0 и т.д.

Матрицы, определяющие структурные константы алгебры, и операторы момента импульса L_i также антисимметричны. Тридцать один оператор L_i ($i=1,2,\dots,31$) составляют оператор скалярного квадрата момента импульса

$$L^2=L_1^2+L_2^2+\dots+L_{31}^2=30I,$$

что характеризует закон сохранения момента импульса при I равной единичной матрице. Этот оператор коммутативен с каждым из операторов L_i :

$$L^2 * L_i^2 - L_i^2 * L^2 = 0 \quad (i=1,2,\dots,31),$$

что также характеризует закон сохранения момента импульса.

Очень специфичны свойства суммы операторов момента импульса L (структурных констант алгебры):

- во-первых, сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце матрицы суммы операторов момента импульса L равна нулю;
- во-вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце матрицы суммы операторов момента импульса L одинаково;
- матрицы нечётных степеней суммы операторов момента импульса антисимметричны (и пропорциональны L), а четных – симметричны (пропорциональны L^2);
- размерность матрицы суммы операторов момента импульса L (как совершенного числа) определяется числом 2^n-1 ;
- целые степени матрицы суммы операторов момента импульса L определяются лишь двумя числами;
- матрицы суммы операторов момента импульса L определяют векторное произведение двух векторов;
- матрица суммы операторов момента импульса L и все её степени имеют определитель, равный нулю.

Особо отметим, что любые степени матрицы суммы операторов момента импульса L^n пропорциональны лишь двум матрицам - L и L^2 , соответствующих четным (с вещественными элементами) и нечётным (с мнимыми элементами) степеням матрицы L . Размерность этих матриц совпадает с размерностью алгебр, причём матрицы меньшей размерности без каких либо изменений входят в состав матриц большей размерности. Это упрощает процесс расширения матриц.

Операторы момента импульса L (матриц Паули) удовлетворяют 31-му соотношению таблицы, где $[L_i, L_j] = L_i L_j - L_j L_i$ - коммутатор, причем в данной алгебре $m=1/19$, $n=9$, $k=1/27$.

Трёхмерная, семимерная и пятнадцатимерная векторные алгебры являются частным случаем тридцатиодномерной. С целью уплотнения записи величин следует использовать сумму операторов момента импульса. В противном случае приходится использовать запись 31-й таблицы размером 31 на 31, что соответствует объёму одного печатного листа.

Очевидно, что чётные и нечётные степени матрицы суммы операторов момента импульса образуют числовые величины, аналогичные единицам **комплексных чисел**, при этом числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер, что можно рассматривать как расширение комплексных чисел. Среди них выделяются четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел. Каждая из $3, 7, 15, 31, 63, 127, \dots, 2^n-1, \dots$ -мерных векторных алгебр имеют сумму операторов момента импульса и её степеней совершенно аналогичного вида.

У 31-мерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

Табл. 7

$-iL^3/3I^3=-iL$																															
$-iL$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
17	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
18	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
19	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1
20	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
21	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1
22	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
23	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
24	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1
25	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	0	-1	1	-1	1	1	-1
26	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	-1	-1	1	1
27	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	1	-1
28	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	0	-1	-1	-1
29	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	0	1	-1
30	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	0	1
31	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1

Табл. 8

$-L^2=a*I+L, \ a=-30$																																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
3	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
4	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
5	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
6	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
7	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
8	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
9	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Табл. 9

$L^4 = -3I^4*(a*I+L), a=30$																															
$ L $	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a

Табл. 10

$L^3/3I^2 = -iL$																															
$-iL$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	0	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
15	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
17	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
18	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
19	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
20	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
21	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
22	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
23	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	1	1	1	-1	-1	1	1	-1
24	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1
25	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	0	-1	1	-1	1	1	-1
26	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	-1	-1	1	1
27	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	1
28	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1
29	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	0	1	-1
30	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	0	1
31	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1

произведение векторов одной из тридцатиодномерных алгебр. В [2] приведены таблицы подстановок индексов изоморфных семимерных векторных алгебр. Рассмотренная выше алгебра расширяет эти алгебры до тридцатиодномерных. Следовательно, можно построить, по крайней мере, 480 изоморфных 15-, 31-мерных алгебр и алгебр большей размерности (очевидно, значительно большее число). Приведём пример расширения одной из семимерных алгебр, ограничиваясь пятнадцатимерным вариантом. Пусть этой алгебре соответствует таблица подстановки индексов, приведенная в левой части таблицы.

Соответствующие ей расширенная таблица структурных констант и тензор структурных констант алгебры будут иметь вид:

$L_1 = m([2,3], [4,5], [7,6], [8,9], [11,10], [13,12], [14,15], n[16,17], [19,18], [21,20], [22,23], [25,24], [26,27], [28,29], [31,30])$
$L_2 = m([4,6], [5,7], [3,1], [8,10], [14,12], [15,13], [9,11], n[16,18], [22,20], [23,21], [17,19], [26,24], [28,30], [29,31], [27,25])$
$L_3 = m([6,5], [1,2], [4,7], [8,11], [13,14], [10,9], [15,12], n[16,19], [22,22], [18,17], [23,20], [27,24], [30,29], [25,26], [28,31])$
$L_4 = m([5,1], [7,3], [6,2], [8,12], [9,13], [11,15], [10,14], n[16,20], [17,21], [19,23], [18,22], [28,24], [29,25], [31,27], [30,26])$
$L_5 = m([7,2], [3,6], [1,4], [8,13], [10,15], [14,11], [12,9], n[16,21], [18,23], [22,19], [20,17], [29,24], [31,26], [27,30], [25,28])$
$L_6 = m([1,7], [2,4], [5,3], [8,14], [15,9], [12,10], [11,13], n[16,22], [23,17], [20,18], [19,21], [30,24], [25,31], [26,28], [29,27])$
$L_7 = m([3,4], [6,1], [2,5], [8,15], [12,11], [9,14], [13,10], n[16,23], [22,19], [17,22], [21,18], [31,24], [27,28], [30,25], [26,29])$
$L_8 = m([9,10], [12,1], [11,3], [12,4], [13,5], [14,6], [15,7], n[16,24], [17,25], [18,26], [19,27], [20,28], [21,29], [22,30], [23,31])$
$L_9 = m([13,4], [14,7], [11,8], [3,10], [5,12], [6,15], n[16,25], [18,27], [20,29], [23,30], [24,17], [26,19], [28,21], [31,22])$
$L_{10} = m([15,5], [9,3], [2,8], [6,12], [7,13], [1,11], n[16,26], [20,30], [21,31], [19,25], [24,18], [28,22], [29,23], [27,17])$
$L_{11} = m([10,1], [15,4], [3,8], [5,14], [2,9], [7,12], n[16,27], [22,29], [17,26], [20,31], [24,19], [30,21], [25,18], [28,23])$
$L_{12} = m([9,11], [10,6], [4,8], [1,13], [3,15], [2,14], n[16,28], [21,25], [23,27], [22,26], [24,20], [29,17], [31,19], [30,18])$
$L_{13} = m([14,3], [12,1], [5,8], [2,15], [6,11], [4,9], n[16,29], [23,26], [19,30], [17,28], [24,21], [31,18], [27,22], [25,20])$
$L_{14} = m([12,2], [11,5], [6,8], [7,9], [4,10], [3,13], n[16,30], [17,31], [18,28], [21,27], [24,22], [25,23], [26,20], [29,19])$
$L_{15} = m([9,6], [13,2], [7,8], [4,11], [1,14], [5,10], n[16,31], [19,28], [22,25], [18,29], [24,23], [27,20], [30,17], [26,21])$
$L_{16} = k([17,1], [18,2], [19,3], [20,4], [21,5], [22,6], [23,7], [24,8], [25,9], [26,10], [27,11], [28,12], [29,13], [30,14], [31,15])$
$L_{17} = m([21,4], [22,7], [25,8], [10,27], [12,29], [15,30], n[16,31], [3,18], [5,20], [6,23], [9,24], [26,11], [28,13], [31,14])$
$L_{18} = m([23,5], [17,3], [26,8], [12,20], [13,31], [11,25], n[2,16], [6,20], [7,21], [1,19], [10,24], [28,14], [29,15], [27,9])$
$L_{19} = m([18,1], [23,4], [27,8], [14,22], [19,26], [12,31], n[3,16], [5,22], [2,17], [7,20], [11,24], [30,13], [25,10], [28,15])$
$L_{20} = m([19,7], [18,6], [28,8], [13,21], [15,27], [14,26], n[4,16], [1,21], [3,23], [2,22], [12,24], [29,9], [31,11], [30,10])$
$L_{21} = m([22,3], [29,8], [15,23], [11,30], [19,28], n[5,16], [2,23], [6,19], [4,17], [13,24], [31,10], [27,14], [25,12])$
$L_{22} = m([20,2], [19,5], [30,8], [9,17], [10,28], [13,27], n[6,16], [7,17], [4,18], [3,21], [14,24], [25,15], [26,12], [29,11])$
$L_{23} = m([17,6], [21,2], [31,8], [11,19], [14,25], [10,29], n[7,16], [4,19], [1,22], [5,18], [15,24], [27,12], [30,9], [26,13])$
$L_{24} = m([2,26], [3,27], [4,28], [5,29], [6,30], [7,31], n[8,16], [17,19], [18,10], [19,11], [20,12], [21,13], [22,14], [23,15])$
$L_{25} = m([4,29], [7,30], [10,19], [12,21], [15,22], n[9,16], [18,11], [20,13], [23,14], [24,1], [26,3], [28,5], [31,6])$
$L_{26} = m([5,31], [3,25], [8,18], [12,22], [13,23], [11,17], n[10,16], [10,14], [21,15], [19,9], [24,2], [28,6], [29,7], [27,11])$
$L_{27} = m([1,26], [4,31], [8,19], [14,21], [9,18], [12,23], n[11,16], [12,13], [17,10], [20,15], [24,3], [30,5], [25,2], [28,7])$
$L_{28} = m([7,27], [6,26], [8,20], [13,17], [15,19], [14,18], n[12,16], [11,9], [23,11], [22,10], [24,4], [29,1], [31,3], [30,2])$
$L_{29} = m([3,30], [1,28], [8,21], [15,18], [11,22], [9,20], n[13,16], [13,10], [19,14], [17,12], [24,5], [31,2], [27,6], [25,4])$
$L_{30} = m([2,28], [5,27], [8,22], [9,23], [10,20], [13,19], n[14,16], [17,15], [18,12], [21,11], [24,6], [25,7], [26,4], [29,3])$
$L_{31} = m([6,25], [2,29], [8,23], [11,29], [14,17], [10,21], n[15,16], [19,12], [22,9], [18,13], [24,7], [27,4], [30,1], [26,5])$

Табл. 11

iL_r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	iL	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-3	2	-5	4	-7	6	-9	8	11	-10	13	-12	15	-14	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
2	3	0	-1	-7	-6	5	4	-10	-11	8	9	15	14	-13	-12	2	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
3	-2	1	0	-6	7	4	-5	-11	10	-9	8	14	-15	-12	13	3	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
4	5	7	6	0	-1	-3	-2	-12	-13	-15	-14	8	9	11	10	4	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-4	6	-7	1	0	-2	3	-13	12	-14	15	-9	8	10	-11	5	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
6	7	-5	-4	3	2	0	-1	-14	-15	13	12	-11	-10	8	9	6	-1	1	1	0	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
7	-6	-4	5	2	-3	1	0	-15	14	12	-13	-10	11	-9	8	7	1	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
8	9	10	11	12	13	14	15	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	8	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-8	11	-10	13	12	15	-14	1	0	3	-2	5	-4	7	-6	9	-1	1	-1	1	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	1	-1
10	-11	-8	9	15	14	-13	-12	2	-3	0	1	7	6	-5	-4	10	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	10	-9	-8	14	-15	-12	13	3	2	-1	0	6	-7	-4	5	11	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1
12	-13	-15	-14	-8	9	11	10	4	-5	-7	-6	0	1	3	2	12	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	12	14	15	-9	-8	10	-11	5	4	-6	7	-1	0	2	-3	13	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	0	1	-1
14	-15	13	12	-11	-10	-8	9	6	-7	5	4	-3	-2	0	1	14	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1
15	14	12	-13	-10	11	-9	-8	7	6	4	-5	-2	3	-1	0	15	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0

Табл. 12

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	16383	32767	65535
s	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776	2096128	8386560	33550336	134209536	536854528	2147450880
k	1	7	31	127	511	2047	8191	32767	131071	524287	2097151	8388607	33554431	134217727	536870911	2147483647

Табл. 13

подстановки индексов	iL_r	1	2	3	4	5	6	7	iL	1	2	3	4	5	6	7
1 2 3 4 5 6 7	1	0	-3	2	-5	4	-7	6	1	0	-1	1	-1	1	-1	1
2 4 7 5 6 7 1	2	3	0	-1	-7	-6	5	4	2	1	0	-1	-1	-1	1	1
3 7 5 1 2 1 6	3	-2	1	0	-6	7	4	-5	3	-1	1	0	-1	1	1	-1
4 5 1 6 3 7 2	4	5	7	6	0	-1	-3	-2	4	1	1	1	0	-1	-1	-1
5 6 2 3 7 1 4	5	-4	6	-7	1	0	-2	3	5	-1	1	-1	1	0	-1	1
6 7 1 7 1 2 5	6	7	-5	-4	3	2	0	-1	6	1	-1	-1	1	1	0	-1
7 1 6 2 4 5 3	7	-6	-4	5	2	-3	1	0	7	-1	-1	1	1	-1	1	0

И, следовательно, тензор структурных констант резко отличается в знаках от ранее рассмотренной алгебры. При этом расширение до 15-мерной алгебры дает:

iL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
6	1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
7	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	1	-1
14	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1
15	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0

И, следовательно, структурные константы алгебры определяются таблицей, существенно отличающейся в знаках компонент векторного произведения двух векторов от ранее рассмотренных алгебр. При этом:

$-L^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

Очевидно, что структурные константы сравниваемых алгебр не совпадают. Вместе с тем, квадрат вектора суммы оператора момента импульсов определяется той же величиной (т.е. L^2 в изоморфных алгебрах не изменяется), а нечетные степени структурных констант повторяют вид суммы оператора моментов импульса (т.е. L в изоморфных алгебрах может иметь различный вид). Следовательно, изоморфизм алгебр можно определять по четной (второй) степени суммы операторов момента импульса и

$-iL^3/15^I$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
6	1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
7	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	1	-1
14	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1
15	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0

$L^4/15^4$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

Чтобы говорить предметно о свойствах 31-мерной алгебры, можно проанализировать 31-рядные квадратные матрицы L_i (Паули). С их помощью, как известно, записываются уравнения (Дирака) [Там же]. Трёхмерные, семимерные и пятнадцатимерные матрицы (Паули) при этом характеризуют момент импульса в указанных алгебрах меньшей размерности.

Непосредственным умножением этих операторов можно получить приведенные выше 31 соотношение для операторов момента импульса, которые определяют L_i . При этом $m=9$, $n=1/19$, $k=1/27$.

$iL^5/15^5$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
6	1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
7	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	1	-1
14	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1
15	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0

Обратим внимание читателей на существование не только одномерной и трехмерной векторной алгебры, но также семимерной, а теперь и пятнадцатимерной, тридцатиодномерной и более высокой размерности. Это, в свою очередь, ребром ставит вопрос о размерности физического пространства. Уже найдены векторные произведения двух векторов векторных алгебр размерностью (1, 3), 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047. Определены также векторные произведения двух векторов ряда векторных алгебр большей размерности, что требует для проверки соответствующих вычислительных и программных средств (в матрице 4095-D 16769025 элементов).

Я считаю, что **размерность физического пространства неопределённа**. Она характеризуется лишь свойствами алгебры (симметрии), используемой для описания процессов, и может быть как угодно большой.

Более симметричны алгебры высокой размерности, алгебры меньшей размерности соответствуют той или иной степени нарушения (упрощения свойств) симметрии, определяющей соотношения, и являются подалгебрами алгебр большей размерности. Я надеюсь, что данная работа явится началом её широкого обсуждения и применения во многих естественных науках, в науках о природе окружающего мира, в технических приложениях. Наш мир удивительно симметричен и многообразен, и, в то же время, мы удивительно инертны и пассивны. Ровесники семимерного исчисления уже окончили вузы, а воз и ныне там. В завершение работы приведу Таблицу 12, характеризующую размерность векторных алгебр и их связь с совершенными числами.

Список литературы

1. Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2011. 36 с.
2. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набл, 1996. 244 с.
3. Коротков А. В. Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. Новочеркасск: Набл, 1999. 100 с.