Кравченко Павел Давидович, Мешков Владимир Евгеньевич, Чураков Вадим Сергеевич, Вересников Георгий Сергеевич

ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА В АТОМЕ

Работа посвящена исследованиям по пифагоровым числам в рамках многомерной парадигмы А. В. Короткова. Рассмотрены несколько работ А. В. Короткова по пифагорейской тематике, в которых исследуются вопросы применимости уравнений второй степени в целых числах и их решений к вопросам атомной физики, задачам естествознания, а также приводятся следующие из них нестандартные и нетривиальные выводы.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2013/1/26.html

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2013. № 1 (68). C. 78-90. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/1/

УДК 115:001.102
Физико-математические науки

Работа посвящена исследованиям по пифагоровым числам в рамках многомерной парадигмы А. В. Короткова. Рассмотрены несколько работ А. В. Короткова по пифагорейской тематике, в которых исследуются вопросы применимости уравнений второй степени в целых числах и их решений к вопросам атомной физики, задачам естествознания, а также приводятся следующие из них нестандартные и нетривиальные выводы.

Ключевые слова и фразы: пифагоровы тройки; арифметика Диофанта; атомная физика; пифагоровы числа; семимерная парадигма; уравнения второй степени в целых числах и их решения; простые числа; взаимно простые числа; теория атома Бора; серии Бальмера и Лаймона; криптография.

Павел Давидович Кравченко, д. техн. н., профессор
Кафедра «Технический сервис»
Волгодонский институт сервиса (филиал)
Южно-Российского государственного университета экономики и сервиса
krapa21@yandex.ru

Владимир Евгеньевич Мешков, к. техн. н., доцент
Кафедра «Информационные технологии»
Волгодонский институт сервиса (филиал)
Южно-Российского государственного университета экономики и сервиса
vmhome@rambler.ru

Вадим Сергеевич Чураков, к. филос. н.
г. Шахты
v.s.chur@mail.ru

Георгий Сергеевич Вересников, к. техн. н.
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук
veresnikov@mail.ru

ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА В АТОМЕ©

Статья является продолжением и развитием наших работ по теме «Многомерная физика», начатой в предыдущей статье [8].

Время от времени некоторые физики-теоретики обращаются к наследию древних авторов – Пифагора, Аристотеля и др. – и тогда появляются публикации вроде следующих: Л. Б. Окунь «Теория относительности и теорема Пифагора», А. В. Шепелев «Космический микроволновый фон и аристотелевы представления о движении» - в журнале «Успехи физических наук» [9; 12]. Кроме того, работы Пифагора и пифагорейцев привлекают и нетривиально мыслящих авторов – это, прежде всего, В. И. Сяхович [11] и А. В. Коротков [5]. Что касается работ Сяховича и Короткова, то они различаются методами. Методы В. И. Сяховича традиционны, но с их помощью получены новые интересные и нетривиальные результаты. Метод А. В. Короткова – компьютерный, т.е. с использованием программ МатКад (*Mathcad* - это система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением); МатЛаб (*MATLAB* - сокр. от англ. «Matrix Laboratory» в русском языке произносится как Матлаб - пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноимённый язык программирования, используемый в этом пакете); таблиц Эксель (*Microsoft Excel* (также иногда называется *Microsoft Office Excel*) - программа для работы с электронными таблицами, созданная корпорацией *Microsoft* для *Microsoft Windows*, *Windows NT* и *Mac OS*). Она предоставляет возможности экономико-статистических расчетов, графические инструменты. *Microsoft Excel* входит в состав *Microsoft Office,* и на сегодняшний день *Excel* является одним из наиболее популярных приложений в мире, т.к. находится в русле современных исследований по пифагоровым числам. Кроме того, А. В. Коротковым разработана *семимерная парадигма*, в рамках которой получены оригинальные результаты [5; 6].

Исследования по пифагоровым точкам также находятся в рамках данной *семимерной парадигмы А. В. Короткова*. В настоящей статье рассмотрим несколько работ А. В. Короткова по пифагорейской тематике, в которых исследуются вопросы применимости уравнений второй степени в целых числах и их решений в применимости к задачам атомной физики, к проблемам физики вообще, к вопросам естествознания, и следующие из них нестандартные выводы и нетривиальные выводы [2; 6].

Нас больше всего интересует атомная физика, поскольку это - основа всего.

Что же касается собственно пифагорейского математического наследия (важнейшим результатом которого является то, что иррациональные числа получаются из отношения рациональных), то в результате многолетних исследований А. В. Короткова и ряда других авторов выяснилось, что особую роль в нём играют пифагорейские тройки. Оказалось, что они есть и в макромире и что особенно важно - в микромире. Пифагорейские тройки чисел могут быть определены двояким образом. Первый из них по формуле: $(2Kn)^2 + (K^2 - n^2)^2 = (K^2 + n^2)^2$, здесь фигурируют три квадрата числа, т.е. сумма квадратов двух чисел равняется третьему квадрату. Пифагорейская тройка - это не произвольный набор трёх чисел, а строго определенный набор трёх чисел, причём каждое из этих трёх чисел является функцией всего двух переменных: *К* и *n.* Т.е., получается, что три числа пифагорейской тройки есть набор функций двух переменных. Задавая *К* и *n* произвольным образом, можно задавать произвольные пифагорейские тройки, а так как *К* и *n* могут занимать положение от единицы до бесконечности, то число троек, - что и без доказательства видно, бесконечно большое. Тем не менее, конечные значения *К* и *n,* особенно незначительные по величине, широко используются на практике. В частности, известная формула $3^2+4^2=5^2$, - формула прямоугольного треугольника, она используется при строительстве зданий, прежде всего, при возведении прямоугольных сооружений.

Рассмотрим свойства пифагоровых троек. Про бесконечность их мы уже говорили, но можно выделить простые пифагоровы тройки.

Под простыми пифагорейскими тройками подразумевают взаимно простые числа, возведённые в квадрат, т.е. в дальнейшем эти числа не могут быть сокращены ни на какое промежуточное значение. Можно доказать, что если два числа пифагоровой тройки простые, то и третье число тоже обязательно простое, и таким образом, два числа должны быть обязательно простыми. Но числа *К* и *n,* определяющие каждое из чисел пифагоровой тройки не обязательно могут давать простую пифагорову тройку, даже если они сами простые. Например, *К*=2, *n=1,* даст пифагорову тройку 6, 8, 10. Как видно, эту пифагорову тройку можно сократить на *2.* Получим 3, *4,* 5, т.е. простую пифагорову тройку (первая пифагорова тройка не простая, а вторая простая).

Чтобы пифагорейская тройка оказалась простой, необходимо, чтобы простыми были не только числа *К* и *n*, а также взаимно простыми должны быть значения и *(К-n)* и *(К+n).* Таким образом, можно выделить набор пифагорейских простых троек с взаимно простыми числами. Это значительно меньший круг пифагоровых троек, но, тем не менее, он так же бесконечно велик. *Множество этих троек бесконечно большое.* Это важное свойство пифагоровых троек означает, что в основе вещей окружающего мира лежат, по сути, взаимно простые числа. Взаимно простые числа, которые приводят к появлению простых пифагоровых троек. Простые пифагорейские тройки - это кладезь простых чисел, взаимно простых чисел. Среди них очень много чисто простых чисел.

Числа чисто простые - это исключительно важное значение чисел натурального ряда. Очень важно, что можно найти бесконечное множество таких чисел, причём как в области малых значений чисел, так и в области очень больших значений чисел. Очень большие значения чисел могут использоваться, например, в *криптографии.* Это очень важная область математических знаний. Пифагоровы тройки могут быть построены как для целых чисел, так и для дробных. Задавая соответственно значения *К* и *n* произвольными по величине, мы получаем набор целых значений чисел пифагоровых троек. Однако надо отметить вторую немаловажную область значений пифагоровых троек, хотя Пифагор, видимо, не занимался такими числами (заметим, что из тринадцати книг по арифметике Диофанта, по которым известна пифагорейская математика, сохранилось только шесть. Что было в остальных книгах, остаётся открытым вопросом, может быть, там были и значения дробных пифагоровых чисел). Поэтому если взять обратные значения целых чисел как $\frac{1}{n} + n + \frac{1}{k}$,

то все формулы сохраняют свой вид. Но только при этом получается, что $\frac{(2Kn)^2 + (K^2 - n^2)^2}{K^2n^2} = \frac{(K^2 + n^2)^2}{K^2n^2}$,

т.е. оказывается, что те же самые формулы применимы для построения пифагоровых троек дробных чисел, но при этом нужно каждое из чисел пифагоровой тройки, каждое из трёх чисел разделить на *Кn,* где *Кn* - целые числа. Таким образом, получается, что пифагоровы тройки имеют место не только для целых чисел, но и для обратных значений чисел $\frac{1}{K} u \frac{1}{n}$, и это весьма примечательный факт, потому что он имеет самое непосредственное отношение к действительной природе. Не говоря о музыкальном нотном ряде, можно привести очень важный пример. Например, такими дробными значениями чисел могут быть описаны радиусы и величины энергии электронов, находящихся на орбитах атомов по теории Бора.

Теория Бора - это есть не что иное, как пифагоровы тройки с обратными значениями чисел, т.е. теория атома Бора - это дробные значения пифагоровых троек. Вот так далеко ушёл Пифагор со своей школой в своих исследованиях! Он создал математический аппарат, можно сказать, для атомной физики ещё 2500 лет назад, что является фактом не только интересным, но и очень серьёзным.

Серии Бальмера и Лаймона могут быть описаны с помощью пифагоровых троек квадратных значений. Следовало бы отметить, что на этот факт никто не обращает внимания, а совершенно напрасно. Потому, что кроме дробных значений имеются и значения целые. Целые значения пифагоровых троек ещё пока не нашли серьёзного отображения в области физики - физики элементарных частиц, но очень возможно, что найдут. Почему? Дело в том, что *теория Бора описывает радиусы орбит электронов и энергии на орбитах* *в обратных значениях пифагоровых троек.* На значительно больших расстояниях, - следует пояснить, - поскольку численное значение константы Ридберга, рекомендованное CODATA в 2010 году, составляет R= 109737,31568539 см$^{-1}$.

А на малых расстояниях, расстояниях меньше одного ангстрема, удовлетворительной теории строения атома и ядра практически нет.

Если обратные значения пифагоровых троек нашли применение для использования в теории атома на расстояниях больше константы Ридберга, то целые значения пифагоровых троек могут найти применение на расстояниях, меньше константы Ридберга, то есть на расстояниях, определяемых значениями от нуля - от центра до константы Ридберга, ориентировочно один ангстрем (но это уже чисто техническая сторона дела: можно уточнить по физическим справочникам). То есть значения пифагоровых троек в целых числах могут дать описание расстояний орбит в оболочечной материи ядра - уже ядра, а не атома и энергии на этих орбитах для ядерных расстояний, т.е. *для получения значений ядерных сил*. Это, конечно, **гипотеза**, *но если обратные значения пифагоровых троек нашли применение в атомной физике, то прямые значения, целые значения чисел, конечно, могут найти ещё большее применение в области ядерной физики для описания силовых взаимодействий, на расстояниях меньше константы Ридберга.*

Конечно, обратные значения пифагоровых троек используются не только в теории Бора, но также и в производных теории Бора. Например, в теории получения рентгеновских лучей задействованы те же самые обратные значения пифагоровых троек. Т.о., если классифицировать применение пифагоровых троек, то можно создать своего рода таблицу пифагоровых троек в целых значениях. Прежде всего, это значения трёх чисел в целых величинах, как сумма квадратов, равная квадрату целой величины. Надо отметить, что эта же таблица могла бы быть применима для обратных значений чисел, поскольку матрица пифагоровых троек в этом случае могла бы представляться в виде набора чисел, расположенных на линии пересечения K и n с каждой строки например, n-го столбца матрицы, а элемент этой матрицы делится на Kn, и получается значение пифагоровых троек в обратных величинах.

Очень примечателен тот факт, что пифагоровы тройки дают катеты и гипотенузы прямоугольных треугольников, поэтому в геометрическом отношении эти числа могут быть очень важны для построения прямых углов - с одной стороны и с другой стороны - для определения таких чисел, как отношение катета к гипотенузе, то есть синус, косинус. Отношение катета к катету, то есть тангенс, котангенс и т.д., - эти числа в целых значениях дают определение тригонометрических функций. Это с одной стороны, а с другой стороны - эти числа для пифагоровых троек в целых значениях получаются не только целыми, но и рациональными. По отношению к катету, например, тангенс, может представляться рациональной величиной, если в числителе или знаменателе использованы значения пифагоровых троек. Значение тангенса - это необязательно значение величин в рациональных числах. Между рациональными значениями найдутся иррациональные, но они уже будут описаны не значениями целых чисел, не отношением целых чисел, а некоторым другим значением, другой функцией, другой величиной.

Итак, отметим ещё раз, что пифагоровы тройки могут дать, прежде всего, в целых значениях значения функций: синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса, косеканса, с одной стороны. С другой стороны, пифагоровы тройки могут указать рациональные значения этих функций, т.е. в математическом плане это очень широкая область применения. Например, пифагоровы тройки могут дать последовательный ряд для значений тангенса, если сохранить разность между длиной катета, равную единице, а катет увеличивать беспредельно. Интересно, что такие значения чисел для получающихся так называемых «хромых» треугольников очень быстро возрастают. Например, первым значением являются три, четыре, пять, вторым уже является значение двадцать, двадцать один, двадцать девять, очередным сто девятнадцать, сто двадцать, сто шестьдесят девять, т.е. значение в этой числовой последовательности возрастает очень быстро. Целое число с тридцатью двумя значениями получается всего лишь в двух десятках интервалов. Это колоссальные числа, которые так быстро достижимы. Но суть даже не в этом, суть в том, что при этом удаётся выявить некоторые закономерности пифагоровых троек в таком ряду. Например, в ряду «хромых» треугольников (следует напомнить, что, как пишет Саймон Сингх, «При чтении II-й книги «Арифметики» Ферма наткнулся на целую серию наблюдений, задач и решений, связанных с теоремой Пифагора и пифагоровыми тройками. Например, Диофант рассматривал существование особых троек, образующих так называемые «хромые треугольники», у которых две более короткие стороны x и y отличаются по длине только на единицу (например, $x = 20$, $y = 21$, $z = 29$ и 202 + 212 = 292» [10]).

Эти закономерности очень важны, и видимо, недаром привлекали внимание такого замечательного ученого-математика как Ферма. Дело в том, что отношения этих чисел в приведенной последовательности, в каждом шагу приближает прямоугольный треугольник к равностороннему. И если число шагов достаточно велико, то значение угла практически не отличается от 45 градусов. Причём, чем более высокое число, тем мы ближе приближаемся к значению 45 градусов. О чём это говорит? Это говорит о том, что тангенс 45 градусов равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\frac{1}{\sqrt{2}}$ - т.е. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, это значение может быть получено как корень из двух чисел, как предел числовой последовательности рациональных чисел, отношение двух целых чисел.

При достижении этих пределов бесконечно больших значений чисел K либо n получается иррациональное число, корень из двух может быть получен как предел числовой последовательности рациональных чисел. Это важное замечание, поскольку оно касается описания природы иррациональных чисел, которая до сих пор не достаточно исследована и подлежит дальнейшему изучению. Надо отметить, что в том же ряду «хромых» треугольников отношение двух соседних значений треугольников очень близко значению пять и восемь. Например, в первом отношении первые две тройки дают 29/5=5,8 и уже в первом приближении с каждым увеличением значения K и n это число все более уточняется, оно является рациональным значением. Это рациональное значение приближается к значению $\sqrt{34}$, т.е. с учетом того, что $\sqrt{2}$ задействован в этой же тройке. В этом же ряду троек появляется принципиальное значение $\sqrt{17}$ - не менее важное число, чем $\sqrt{2}$.

Ведь именно $\sqrt{17}$ был камнем преткновения при построении многогранной равносторонней фигуры с числом сторон равным $\sqrt{17}$. Эту задачу решил Гаусс. Надо отметить, что уже две иррациональные величины $\sqrt{2}$ и $\sqrt{17}$ наблюдаются только в одном наборе ‹‹хромых›› треугольников. Таких же треугольников, только уже не ‹‹хромых››, а несколько другого содержания, с разницей катетов прямоугольного треугольника в две величины, в пять, семь и так далее, может быть бесконечно большое число. Т.е. эти значения точно так же дадут функции иррациональных величин, как предел последовательности числовых рациональных рядов - рациональных рядов для получения значений иррациональных величин, но уже не $\sqrt{2}$, $\sqrt{17}$, а несколько иных. Очень возможно, что в ряду этих значений окажутся такие функции, как число Непера e, либо число π. Поэтому данный вопрос нужно изучать и анализировать.

Уравнение Шрёдингера можно привязать к размерности пространства. Уравнение Шрёдингера даёт решение для волновых функций, которыми пользуются для обозначения целого ряда атомных характеристик в теории ядра, в теории атома, в квантовой механике и т.д. *Решение уравнения Шрёдингера - это решение волновой функции от этой величины X.* ***Надо отметить, что уравнение Шрёдингера решаемо уже не для линейного уравнения X, а для трёх величин X, У, Z линейного векторного пространства.*** Решение уравнения Шрёдингера даёт значения не только квантовых чисел главного квантового числа, но, также, побочного спинового и побочного магнитно-спинового числа.

Таким образом, решение уравнения Шредингера в трёхмерии - трёхмерном пространстве (3D) даёт четыре квантовых числа, которые, в конечном итоге, характеризуют теорию атома, теорию ядра, теорию химических соединений и т.д. Уравнение Шрёдингера характеризует расположение элементов в таблице Менделеева. Поэтому с увеличением размерности, применяемом в решении уравнения Шрёдингера, возрастает число квантовых чисел, характеризующих эту систему. Если в одномерном случае только два числа характеризуют систему - n и l, то в трёхмерном - уже четыре числа. Следовательно, в многомерном случае будет значительно больше квантовых чисел, и чем больше размерность, тем мы точнее описываем свойства частиц, свойства атомов, свойства ядер и т.д.

Конечно, можно этим не заниматься, а можно остановиться на достигнутом, скажем на теории Бора, на одномерном уравнении Шрёдингера, но физику - атомную, ядерную, физику элементарных частиц, такой подход уже не устраивает. Появляется уравнение Дирака, позволяющее описывать расщепление слоя орбитальных оболочек на подслои, вводится постоянная тонкой структуры $\alpha = 7{,}2973525698(24)\cdot10^{-3} = {}^1\!/\!_{137{,}035\ 999\ 074(44)}$, (ПТС) - безразмерная величина, образованная комбинацией фундаментальных констант (её численное значение не зависит от выбранной системы единиц), - и все это для того, чтобы уточнить свойства атомов, либо ядер атомов. *Многомерные системы повышают точность при измерении тех или иных величин при их анализе. Трёхмерные или одномерные случаи являются лишь частными случаями многомерных.*

И поскольку следующим шагом после трёхмерных векторных алгебр является *семимерная векторная алгебра* [5; 6], то конечно, следует изучить семимерную векторную алгебру досконально. Семимерная векторная алгебра, т.е. аппарат семимерной математической физики уже создан, что открывает перспективу очень точного рассмотрения величин квантово-механического характера и позволяет найти ему новые применения в области квантовой физики, физики элементарных частиц, а также атомной и ядерной физики. Можно отметить, что следующим этапом после семимерия [5] будет пятнадцатимерие [4] и далее тридцати одно, шестидесяти трёх и т.д. по нарастающей **n-мерных значений**.

Эти функции могут всё более точно характеризовать свойства изучаемых величин, объектов, причём если мы снижаем размерность, то точность ухудшается, но если она превышает значение каких-то практических задач, то можно ограничиться малой размерностью. Если требуется повышать точность решения задач, то нужно идти по пути увеличения размерности физического пространства. Математическая основа для этого уже существует [4-6].

Необходимо отметить ещё два принципиально важных момента. Говоря о пифагоровых тройках чисел, мы не задумываемся о значении пифагоровых четвёрок чисел, пятерок, шестерок, *вообще чисел n-ной размерности.* Т.е. не только сумма двух квадратов может быть выражена квадратом целого числа, но и сумма трёх квадратов, четырёх, …., n квадратов может быть представлено квадратом целого числа. Это говорит о том, что очень важным направлением в развитии применения пифагоровых чисел являются *многомерные пифагоровы числа*. $3^2 + 4^2 + 12^2$ дают 13^2, а это сумма трёх квадратов, а не двух. Точно так же эту последовательность можно продолжить до бесконечно больших значений. Это первое замечание. И второе замечание. Пифагорову тройку можно представлять не только как сумму двух квадратов, но и как разность двух квадратов, например, $3^2=5^2-4^2$. Вообще-то, эта величина может служить основанием для построения псевдоевклидовых геометрий, точно так же, как сумма двух квадратов послужила основой для построения евклидовых геометрий: вначале проанализировали сумму двух квадратов, затем сумму трёх квадратов, затем сумму *n* квадратов и получили *многомерные евклидовы геометрии.*

Таким же образом можно строить *многомерные псевдоевклидовы геометрии*. Можно построить не сумму двух квадратов величин равную квадрату величины, а алгебраическую сумму трёх квадратов, где одна из величин будет со знаком минус, а это уже трёхмерная псевдоевклидова величина. Важно то, что пифагоровы тройки чисел могут послужить основой для построения не только евклидовых геометрий, но и для построения псевдоевклидовых геометрий. Такая работа в настоящий момент проводится, но она не завершена, хотя толчком для её выполнения послужило создание псевдоевклидовых алгебр в трёхмерии и в семимерии. Трёхмерные и семимерные псевдоевклидовы алгебры уже построены и требуется более досконально изучать свойства, лежащие в основе построения этих алгебр, т.е. *свойства комплексных числовых систем, которые в конечном итоге, так или иначе, связаны с пифагоровыми значениями чисел* [5; 6].

Итак, можно сказать, что: *во-первых*, ***пифагоровы тройки чисел определяют, в конечном итоге, геометрическую евклидову природу физических явлений, и с этой геометрией связано очень много различных вещей, чисто физических, чисто химических, механических, музыкальных и т.д.*** То есть, *речь идет о всеобщем применении пифагоровых троек в физике или в природе вещей*. Наконец, некоторые вещи весьма принципиальны. Тот же спектр атома водорода - это уже атомные явления, природу которых следовало бы изучить, возможно, более подробно и полно. Физические эксперименты дают очень много, но арифметика, подведенная под этой базой физических экспериментов, может дать значительно больше.

Во-вторых, по замечанию А. В. Короткова «вопрос классификации пифагоровых чисел, по-видимому, связан с классификацией физических величин. В одной из моих работ отмечалось, что числа *x* и *y* имеют прямое отношение к классификации волновых чисел излучения атомов. Отметим к тому же, что четверки чисел также фигурируют в трехмерном спинорном исчислении при классификации элементарных частиц с полуединичным спином. Эти четверки чисел характеризуют две пары частиц, так что имеется прямая аналогия с парами чисел *z* и *c, p* и *t* определяемых уравнением Диофанта из четверки чисел *z, c, p* и *t*. Это, между прочим, говорит о возможном бесконечном числе элементарных частиц с полуединичным спином» [1, с. 22].

Но нас больше всего интересует атомная физика, поскольку, повторим ещё раз - это основа всего.

В работе «К нахождению решений полиноминальных уравнений второй степени в целых» [1] рассмотрены (Таблица 1) вопросы решения уравнений Пифагора в целых числах [Там же, с. 3-14].

Оказывается, что решения в целых числах, как известно, определяются уравнением Пифагора: $Х^2+У^2=Z^2$ для уравнения с двумя независимыми переменными, но эти уравнения могут быть рассмотрены несколько иначе. В частности, Х представляется как чётное число 2mn, где mn - собственно целые числа взаимно простые, второй катет У определяется как m^2-n^2, и собственно, гипотенуза определяется суммой квадратов m^2+n^2, повторим ещё раз: m и n − взаимно простые числа разной чётности, одно из них чётное Х, второе У обязательно нечётное. В Таблице 1 представлены тройки пифагоровых чисел, начиная от m и n, до 21, соответственно, и, кончая всего лишь 16-й позицией, где m и n равняются по 16. Это было бы малоинтересно для физики, хотя надо отметить, что вопросы физики тесно связаны с вопросами геометрии, причем наиболее четко зависимость проявляется в связи с евклидовой геометрией, а евклидова геометрия опирается на теорему Пифагора. Поэтому следует отыскать применимость пифагоровых троек чисел к отдельным разделам физики в частности, а также к естествознанию вообще. Оказывается, что такая возможность существует. Это - вопрос применимости к объяснению спектров атомов водорода. Спектр атома водорода разбивается на серии спектральных линий, в которые включены группы спектральных линий (см.: тонкая структура спектральных линий атомов водорода [7, с. 350]; теория атомов водорода по Бору [Там же, с. 346]).

В начале XX века стало понятно, что все или значительная часть, по крайней мере, физических величин квантовано, то есть определяется не непрерывным значением числа, а дискретным значением чисел. В частности, Бор показал на основе спектра атома водорода, описанного Бальмером, что волновые линии, волновые числа определяются разностью отношений единицы к квадрату простых чисел. Волновое число пропорционально постоянной Ридберга. Минус в скобках единица 2 в квадрате минус n^2. Это то, что касается атома водорода спектральной линии, вернее спектральной серии Бальмера. Здесь n^2 занимает дискретный ряд значений 3, 4, 5, 6 и т.д., т.е. является целым числом.

Этот знаменательный факт привел к появлению теории атома водорода, которую разработал Бор, на её основе создали квантовую механику. Эту формулу можно несколько видоизменить. Во-первых, число два в квадрате касается серии Бальмера. Здесь число два не обязательно, здесь могут быть и другие целые числа: 1 в частности, 3 и т.д., взятые в квадрат. В результате будут получены, кроме серии Бальмера, серии Пашена, серии Лаймана, серия Лаймана в ультрафиолете, серия Пашена инфракрасная, - и все они характеризуют переход электронов с отдаленных орбит на первую для Лаймана серии, на вторую для серии Бальмера, на третью для серии Пашена и т.д. орбиты электронных оболочек. Поэтому формулу для волнового числа можно несколько видоизменить как величину постоянной Ридберга, умноженной на выражение: в числителе n^2 минус k^2 разделить на k^2 n^2. Эта формула несколько иная. Во-первых, в числителе появляется разность квадратов чисел, целых чисел. Это соответствует тройкам пифагоровых чисел, взятых для одного из катетов с нечетным значением 3, 5, 7 и т.д. Величина квадрата определяется нечетным числом разности квадратов, а в знаменателе получается n^2 на k^2, но это не что иное, как $Х^2$, разделенное пополам. То есть, 2 mn, взятое в квадрате разделить пополам [4, с. 3-14]. Если точнее, то Х пополам в квадрате. Т.е., знаменатель для волнового числа и формулы волнового числа также определяются половиной второго катета, взятой в квадрат, и таким образом, мы имеем величину волнового числа как величину, пропорциональную постоянной Ридберга, умноженной на У и разделенной на Х пополам в квадрате. То есть, совершенно неожиданным образом пифагоровы тройки чисел из катетов Х и У и гипотенузы Z оказались увязанными с соотношениями для волновых чисел спектральных серий атомов водорода и не только водорода, но в частности лучше вести речь пока об идеализированном случае, об атоме водорода.

Что это даёт? Это, во-первых, это говорит о геометрической природе физических явлений в области атома, которую можно выразить математическими средствами, и о применимости её к спектрам атома водорода, в частности. То есть, пифагоровы тройки чисел, чисто арифметические операции, оказались применимы для описания спектров атома водорода, причем, отыскивать закономерности спектров из физических опытов значительно сложнее, нежели изучать закономерности тех же спектров по арифметическим операциям, то есть, изучая классификацию пифагоровых троек чисел, в частности, серии Лаймана, Бальмера и Пашена (это не единственные серии).

Эти операции могут быть продолжены на серии с электронными числами, характеризующими радиусы первой, второй, третьей орбиты, а также четвертой, пятой, вплоть до бесконечности, и все эти числа представляются пифагоровыми значениями числовых троек с одной стороны. В частности, «для примера в Таблице 1 выделенные жирным шрифтом тройки целых чисел соответствуют прямоугольным треугольникам с целыми длинами сторон. Значения *m* и *n* могут занимать бесконечный ряд чисел. Вместе с тем можно попытаться классифицировать значения *m* и *n*, а, следовательно, *x, y, z* по определенным признакам. Одним из таких признаков может являться величина разности между длинами катетов *x* и *y*» [2, с. 3].

В Таблице 1 серия Лаймана определяется вертикальным столбцом под номером 1, Бальмера под номером 2, Пашена под номером 3 и т.д., вплоть до номеров чрезвычайно больших, но эти серии характеризуют переходы с разных орбит на одну из избранных орбит, например первую для Лаймана. Однако можно рассматривать серии иначе. Например, с одной из орбит переход на различные орбиты электрона, например, с четвертой орбиты на первую, вторую, третью. Это иной подход, и этим числам будут соответствовать серии чисел, определяемые горизонтальными столбцами, вернее, строками в Таблице 1. В этом случае, первая серия будет определяться одним извечным числом Х4У3. Вторая серия - третья строка - две величины, две спектральных линии, третья с тремя, n-я - с n-1, и эти серии будут определять переход с одной из орбит на близлежащие орбиты разного номера. Это с одной стороны.

С другой стороны, пифагоровы числа оказываются очень тесно связаны в классификации чисел. В Таблице 2 представлены тройки пифагоровых чисел, соответствующие величине модуля разности между длинами катетов *x* и *y* равной 1, 7, 23, 47, 79 в каждом из столбцов таблицы. Первая строка этой таблицы соответствует пифагоровым тройкам чисел, представленным в Таблице 1 в первом столбце.

Необходимо отметить удивительную закономерность построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов, а именно:

$z_{k+1}=6z_k- z_{k-1}$,

где z_{k+1} и z_{k-1} соответственно гипотенузы следующего и предыдущего z_k прямоугольных треугольников в столбце.

Второй, не менее удивительной, закономерностью построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов является:

$(x+y)_{k+1}=6(x+y)_k-(x+y)_{k-1}$.

Это соотношение выполняется для суммы длин катетов и не выполняется для катетов в отдельности. Вместе с тем для катетов выполнимы следующие рекуррентные соотношения:

$x_{k+1}=5(x_k+x_{k-1})-x_{k-2}$,

$y_{k+1}=5(y_k+y_{k-1})-y_{k-2}$.

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными значениями сторон *x, y, z* соответствуют определенные целочисленные значения *m* и *n*. Поскольку удается классифицировать прямоугольные треугольники по величине разности между длинами катетов, то этому способу классификации должен соответствовать определенный способ классификации значений *m* и *n*. Этот способ классификации приведен в Таблице 3, в которой каждому столбцу значений пифагоровых троек из Таблицы 2 соответствует определенный столбец значений, определяющих эти тройки величин *m* и *n* в Таблице 3 [2].

«В Таблице 3 каждой последовательной паре значений чисел соответствует определенная пифагорова тройка из Таблицы 2. Так значениям $n=1$ и $m=2$ в верхнем левом углу Таблицы 3 соответствуют значения $x=2mn=4$, $y=m^2-n^2=3$, $z=m^2+n^2=5$ в верхнем левом углу Таблицы 2. В каждой последовательной паре значений чисел столбцов Таблицы 3 величина *m* следует за величиной *n*» [Там же].

В Таблице 4 отмечается, «что число рядов пифагоровых троек, как и само число троек, бесконечно велико. Бессмысленно перечислять все ряды троек. Однако, чтобы продемонстрировать применимость приведенных выше рекуррентных соотношений в общем случае в Таблице 4 представлены значения пифагоровых троек для верхнего (диагонального) ряда троек из Таблицы 1. В Таблице 4 оказываются представленными тройки пифагоровых чисел, соответствующие величине разности между длинами катетов *x* и *y* равной 1, 7, 17, 31, 49 в каждом из столбцов таблицы. Все приведенные выше рекуррентные соотношения оказываются выполнимыми для троек из Таблицы 4» [Там же].

Табл. 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2 0 2															
2	**4** **3** **5**	8 0 8														
3	6 8 10	**12** **5** **13**	18 0 18													
4	**8** **15** **17**	16 12 20	**24** **7** **25**	32 0 32												
5	10 24 26	**20** **21** **29**	30 16 34	**40** **9** **41**	50 0 50											
6	**12** **35** **37**	24 32 40	36 27 45	48 20 52	**60** **11** **61**	72 0 72										
7	14 48 50	**28** **45** **53**	42 40 58	**56** **33** **65**	70 24 74	**84** **13** **85**	98 0 98									
8	**16** **63** **65**	32 60 68	**48** **55** **73**	64 48 80	**80** **39** **89**	96 28 100	**112** **15** **113**	128 0 128								
9	18 80 82	**36** **77** **85**	54 72 90	**72** **65** **97**	90 56 106	108 45 117	126 32 130	**144** **17** **145**	162 0 162							
10	**20** **99** **101**	40 96 104	**60** **91** **109**	80 84 116	100 75 125	120 64 136	**140** **51** **149**	160 36 164	**180** **19** **181**	200 0 200						
11	22 120 122	**44** **117** **125**	66 112 130	**88** **105** **137**	110 96 146	**132** **85** **157**	154 72 170	**176** **57** **185**	198 40 202	**220** **21** **221**	242 0 242					
12	**24** **143** **145**	48 140 148	72 135 153	96 128 160	**120** **119** **169**	144 108 180	**168** **95** **193**	192 80 208	216 63 225	240 44 244	**264** **23** **265**	288 0 288				
13	26 168 170	**52** **165** **173**	78 160 178	**104** **153** **185**	130 144 194	**156** **133** **205**	182 120 218	**208** **105** **233**	234 88 250	**260** **69** **269**	286 48 290	**312** **25** **313**	338 0 338			
14	**28** **195** **197**	56 192 200	**84** **187** **205**	112 180 212	**140** **171** **221**	168 160 232	196 147 245	224 132 260	**252** **115** **277**	280 96 296	**308** **75** **317**	336 52 340	**364** **27** **365**	392 0 392		
15	30 224 226	**60** **221** **229**	90 216 234	**120** **209** **241**	150 200 250	180 189 261	210 176 274	**240** **161** **289**	270 144 306	300 125 325	330 104 346	360 81 369	390 56 394	**420** **29** **421**	450 0 450	
16	**32** **255** **257**	64 252 260	**96** **247** **265**	128 240 272	**160** **231** **281**	192 220 292	**224** **207** **305**	256 192 320	**288** **175** **337**	320 156 356	**352** **135** **377**	384 112 400	**416** **87** **425**	448 60 452	**480** **31** **481**	512 0 512

Табл. 2

4 3 5	8 15 17	12 35 37	16 63 65	20 99 101
20 21 29	72 65 97	156 133 205	272 225 353	420 341 541
120 119 169	396 403 565	832 855 1193	1428 1475 2053	2184 2263 3145
696 697 985	2332 2325 3293	4928 4905 6953	8484 8437 11965	13000 12921 18329
4060 4059 5741	13568 13575 19193	28644 28667 40525	49288 49335 69737	75500 75579 106829
23660 23661 33461	79104 79097 111865	167028 167005 236197	287432 287385 406457	440316 440237 622645
137904 137903 195025	461028 461035 651997	973432 973455 1376657	1675116 1675163 2369005	2566080 2566159 3629041
803760 803761 1136689	2687092 2687085 3800117	5673656 5673633 8023745	9763452 9763405 13807573	14956480 14956401 21151601
4684660 4684659 6625109	15661496 15661503 22148705	33068412 33068435 46765813	56905408 56905455 80476433	87172484 87172563 123280565
27304196 27304197 38613965	91281912 91281905 129092113	192736908 192736885 272571133	331669184 331669137 469051025	508078740 508078661 718531789
159140520 159140519 225058681	532029948 532029955 752403973	1123352944 1123352967 1588660985	1933109508 1933109555 2733829717	2961299640 2961299719 4187910169
927538920 927538921 1311738121	3100897804 3100897797 4385331725	6547380848 6547380825 9259394777	11266988052 11266988005 15933927277	17259719416 17259719337 24408929225
5406093004 5406093003 7645370045	18073356848 18073356855 25559586377	38160932052 38160932075 53967707677	65668818616 65668818663 92869733945	100597016540 100597016619 142265665181
31509019100 31509019101 44560482149	105339243312 105339243305 148972186537	222418211556 222418211533 314546851285	382745923832 382745923785 541284476393	586322380140 586322380061 829185061861
183648021600 183648021599 259717522849	613962102996 613962103003 868273532845	1296348337192 1296348337215 1833313400033	2230806724188 2230806724235 3154837124413	3417337263984 3417337264063 4832844705985
1070379110496 1070379110497 1513744654945	3578433374692 3578433374685 5060669010533	7555671811688 7555671811665 10685333548913	13002094421484 13002094421437 18387738270085	19917701204080 19917701204001 28167883174049
6238626641380 6238626641379 8822750406821	20856638145128 20856638145135 29495740530353	44037682532844 44037682532867 62278687893445	75781759804528 75781759804575 107171592496097	116088869960180 116088869960259 164174454338309
36361380737780 36361380737781 51422757785981	121561395496104 121561395496097 171913774171585	256670423385468 256670423385445 362986793811757	441688464405872 441688464405825 624641816706497	676615518557316 676615518557237 956878842855805

Табл. 3

1	1	1	1	1
2	4	6	8	10
5	9	13	17	21
12	22	32	42	52
29	53	77	101	125
70	128	186	244	302
169	309	449	589	729
408	746	1084	1422	1760
985	1801	2617	3433	4249
2378	4348	6318	8288	10258
5741	10497	15253	20009	24765
13860	25342	36824	48306	59788
33461	61181	88901	116621	144341
80782	147704	214626	281548	348470
195025	356589	518153	679717	841281
470832	860882	1250932	1640982	2031032
1136689	2078353	3020017	3961681	4903345
2744210	5017588	7290966	9564344	11837722
6625109	12113529	17601949	23090369	28578789
15994428	29244646	42494864	55745082	68995300
38613965	70602821	102591677	134580533	166569389
93222358	170450288	247678218	324906148	402134078
225058681	411503397	597948113	784392829	970837545
543339720	993457082	1443574444	1893691806	2343809168
1311738121	2398417561	3485097001	4571776441	5658455881
3166815962	5790292204	8413768446	11037244688	13660720930
7645370045	13979001969	20312633893	26646265817	32979897741
18457556052	33748296142	49039036232	64329776322	79620516412
44560482149	81475594253	118390706357	155305818461	192220930565
107578520350	196699484648	285820448946	374941413244	464062377542
259717522849	474874563549	690031604249	905188644949	1120345685649
627013566048	1146448611746	1665883657444	2185318703142	2704753748840
1513744654945	2767771787041	4021798919137	5275826051233	6529853183329
3654502875938	6681992185828	9709481495718	12736970805608	15764460115498
8822750406821	16131756158697	23440761910573	30749767662449	38058773414325
21300003689580	38945504503222	56591005316864	74236506130506	91882006944148

Причем, эти тройки чисел связаны между собой, то есть, можно говорить о серии чисел, о серии спектральных линий, формируемых модулем разности двух катетов, катета У нечетного и четного катета Х. Это позволяет классифицировать спектральные линии атома водорода совершенно по иному признаку. Это представляет практический интерес, потому что классификация чисел при этом легко позволяет построить серию чисел, а следовательно, серию спектральных линий. Это очередной момент.

Наконец, взаимосвязь в рекуррентных соотношениях. Между собой связаны величины Х и величины У в трех последовательных, вернее, в четырех последовательных тройках пифагоровых чисел (в статье об этом упоминается). Значение XN+1 определяется как пять значений суммы XN + N - 1 без значения X N минус второго, точно так для У. Это очень специфическая зависимость, которая может дать некоторые физические мысли и эффекты. Наконец, необходимо отметить, что число 6 совершенно не случайное число. Это число, в конечном итоге, характеризует отношение не двух близлежащих пифагоровых троек, а отношение, стремящееся к определенному числу при возрастании числа N. В частности, при возрастании числа N число 6 определяет отношение двух гипотенуз соседних треугольников с одним и тем же модулем разности как 5,828 и т.д., бесконечный ряд значений, то есть рекуррентное число. Это рекуррентное число связано с извлечением корня.

Табл. 4

4 3 5	12 5 13	24 7 25	40 9 41	60 11 61
20 21 29	48 55 73	88 105 137	140 171 221	204 253 325
120 119 169	304 297 425	572 555 797	924 893 1285	1360 1311 1889
696 697 985	1748 1755 2477	3276 3293 4645	5280 5311 7489	7760 7809 11009
4060 4059 5741	10212 10205 14437	19152 19135 27073	30880 30849 43649	45396 45347 64165
23660 23661 33461	59496 59503 84145	111568 111585 157793	179876 179907 254405	264420 264469 373981
137904 137903 195025	346792 346785 490433	650324 650307 919685	1048500 1048469 1482781	1541320 1541271 2179721
803760 803761 1136689	2021228 2021235 2858453	3790308 3790325 5360317	6111000 6111031 8642281	8983304 8983353 12704345
4684660 4684659 6625109	11780604 11780597 16660285	22091592 22091575 31242217	35617624 35617593 50370905	52358700 52358651 74046349
27304196 27304197 38613965	68662368 68662375 97103257	128759176 128759193 182092985	207594620 207594651 293583149	305168700 305168749 431573749
159140520 159140519 225058681	400193632 400193625 565959257	750463532 750463515 1061315693	1209950220 1209950189 1711127989	1778653696 1778653647 2515396145
927538920 927538921 1311738121	2332499396 2332499403 3298652285	4374021948 4374021965 6185801173	7052106576 7052106607 9973184785	10366753280 10366753329 14660803121
5406093004 5406093003 7645370045	13594802772 13594802765 19225954453	25493668224 25493668207 36053491345	41102689360 41102689329 58127980721	60421866180 60421866131 85449422581
31509019100 31509019101 44560482149	79236317208 79236317215 112057074433	148587987328 148587987345 210135146897	239564029460 239564029491 338794699541	352164443604 352164443653 498035732365
183648021600 183648021599 259717522849	461823100504 461823100497 653116492145	866034255812 866034255795 1224757390037	1396281487524 1396281487493 1974640216525	2052564795640 2052564795591 2902764971609
1070379110496 1070379110497 1513744654945	2691702285788 2691702285795 3806641878437	5047617547476 5047617547493 7138409193325	8138124895560 8138124895591 11509046599609	11963224330040 11963224330089 16918554097289
6238626641380 6238626641379 8822750406821	15688390614252 15688390614245 22186734778477	29419671029112 29419671029095 41605697769913	47432467885960 47432467885929 67079639381129	69726781184796 69726781184747 98608559612125
36361380737780 36361380737781 51422757785981	91438641399696 91438641399703 129313766792425	171470408627128 171470408627145 242495777426153	276456682420076 276456682420107 390968789687165	406397462778540 406397462778589 574732803575461

Таким образом, это число является отношением двух гипотенуз соседних треугольников с одним и тем же модулем разности катетов и определяется иррациональным числом 5,82842. Анализ показывает, что это число есть не что иное, как 3+2 корня из 2, то есть это число определяется корнем из 2. Это очень привлекающий момент, потому что корень из двух сам по себе принципиально важное число. Причем рекуррентные соотношения позволяют найти числовое значение корня из двух как отношение величины гипотенузы к величине одного из катетов при возрастании числа N, причем корень из двух очень быстро принимает значение большим числом разрядов, то есть его значение легко вычисляемо. Это, пожалуй, самый быстрый способ вычисления значений корня из двух. Ряды пифагоровых троек связаны между собой строго определенным образом. Во-первых, модуль разности катетов двух сторон прямоугольного треугольника определяется дискретным рядом значений. Он принимает значения: 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, то есть занимает значения, определяемые простыми числами. Факт очень привлекательный с точки зрения многих дисциплин, в частности для кодирования и декодирования, в криптологии и т.д.

Наконец, числа гипотенуз пифагоровых троек встречаются в двух числовых последовательностях, например, число 13 (см. Таблица 2) встречается при значении разницы модуля двух величин равным 7 (см. второй столбец Таблицы 4, первая строка). То есть два столбца можно рассматривать не как линейку бесконечной протяженности в одном и в другом направлении, а как пару линеек, пересекающихся в данном конкретном числе, например, в числе 13. При этом получается уже рассмотрение не линеек, а плоскостей числовых последовательностей пифагоровых троек. Трудно сказать без соответствующего рассмотрения и анализа, какое это применение найдет в области физики, но сам факт очень знаменательный.

Дело в том, что такая структура определяет своего рода «кристаллы» числовых последовательностей, то есть математические величины в какой-то степени могут характеризовать кристаллическую структуру различного рода веществ. Можно говорить о применимости пифагоровых троек не только в физике, но и в химии. Очевидно, что этот числовой ряд повторяет последовательность значений числа электронов в электронных оболочках химических веществ, распределение по группам 2, 8, 18, 32, 50, 72. Каждый химик знает эту последовательность чисел. Более того, этот числовой ряд меняется от двух до бесконечности в числовом варианте, то есть можно говорить, что химические вещества образуют бесконечный ряд химических соединений. Собственно химических элементов не 8, не 9, не 10 групп в периодической системе таблицы Менделеева, а значительно больше. Таким образом, вполне вероятно, что существует бесконечно большое количество групп химических элементов (по крайней мере - чисто теоретически). То есть химики могут рассматривать вопрос о том, какое количество химических элементов в природе - это не 101, не 104, не 117, не 120, либо 130 - характеризует так называемая плата в химических свойствах веществ, но это бесконечно большой ряд элементов.

Другое дело, в каких условиях эти элементы и химические соединения могут быть получены, при каких физических соотношениях, давлениях, температурах и т.д., - т.е. это совсем иной вопрос. Мы не знаем, что происходит в недрах Земли, в недрах звезд, какие химические элементы формируются в тех непредставимых условиях по нашим понятиям. Это в отношении применения данного математического подхода к химии.

Можно говорить о пифагоровых тройках чисел в применимости к степенным рядам и рассматривать степенные ряды как множество целых чисел, а степенные числа в иррациональных соотношениях и рядах иррациональных чисел. Эти числа как множество целых степеней действительных чисел, включающих целые рациональные и иррациональные числа и т.д., характеризуют формирование параметрических рядов размеров рельс, объёмов гидромашин, мощностей трансформаторов и т.д., в том числе музыкальную гамму, - равномерно темперированный строй музыкальной грамоты. Даже здесь можно найти приложения пифагоровых троек к этим математическим процедурам, например, в работе «Степенные числа в музыкальной гамме» приведены в таблице частот (Таблица 5) [3, табл. 1]:

Табл. 5

100	1,000000000000000000000000000000…		
		112	1,1220184543019634355910389464779…
125	1,2589254117941672104239541063958…		
		140	1,4125375446227543021556078639302…
160	1,5848931924611134852021013733915…		
		180	1,7782794100389228012254211951927…
200	1,9952623149688796013524553967395…		
		224	2,2387211385683396119549508524657…
250	2,5118864315095801110850320677993…		
		280	2,8183829312644538191019236991551…
316	3,1622776601683793319988935444327…		
		355	3,5481338923357545843321870226449…
400	3,9810717055349725077025230508775…		
		450	4,4668359215096311855625052431938…
500	5,0118723362727228500155418688495…		
		560	5,6234132519034908039495103977648…
630	6,3095734448019324943436013662234…		
		710	7,0794578438413791080221494218931…
800	7,9432823472428150206591828283639…		
		900	8,912509381337455299531086810783…

и в Таблице 6 [Там же, табл. 3]:

Табл. 6

	такт	частота, гц		такт	частота, гц
a^{0}	1,00000000000000…	16,3515978312881…	a^{60}	32,00000000000000…	523,2511306012190…
a^{1}	1,05946309435929…	17,3239144360551…	a^{61}	33,90281901949730…	554,3652619537650…
a^{2}	1,12246204830936…	18,3540479948385…	a^{62}	35,91878554589960…	587,3295358348340…
a^{3}	1,18920711500270…	19,4454364826305…	a^{63}	38,05462768008650…	622,2539674441790…
a^{4}	1,25992104989485…	20,6017223070549…	a^{64}	40,31747359663510…	659,2551138257540…
a^{5}	1,33483985417000…	21,8267644645631…	a^{65}	42,71487533344000…	698,4564628660200…
a^{6}	1,41421356237305…	23,1246514194774…	a^{66}	45,25483399593770…	739,9888454232780…
a^{7}	1,49830707687663…	24,4997147488595…	a^{67}	47,94582646005210…	783,9908719635040…
a^{8}	1,58740105196814…	25,9565435987467...	a^{68}	50,79683366298040…	830,6093951598920…
a^{9}	1,68179283050735…	27,5000000000000…	a^{69}	53,81737057623530…	880,0000000000000…
a^{10}	1,78179743628059…	29,1352350948803…	a^{70}	57,01751796097890…	932,3275230361720…
a^{11}	1,88774862536328…	30,8677063285073…	a^{71}	60,40795601162510…	987,7666025122350…
a^{12}	2,00000000000000…	32,7031956625762…	a^{72}	64,00000000000000…	1046,5022612024400…
a^{13}	2,11892618871858…	34,6478288721103…	a^{73}	67,80563803899460…	1108,7305239075300…
a^{14}	2,24492409661872…	36,7080959896771…	a^{74}	71,83757109179910…	1174,6590716696700…
a^{15}	2,37841423000541…	38,8908729652612…	a^{75}	76,10925536017300…	1244,5079348883600…
a^{16}	2,51984209978970…	41,2034446141096…	a^{76}	80,63494719327030…	1318,5102276515100…
a^{17}	2,66967970834000…	43,6535289291262…	a^{77}	85,42975066688010…	1396,9129257320400…
a^{18}	2,82842712474611…	46,2493028389549…	a^{78}	90,50966799187540…	1479,9776908465600…
a^{19}	2,99661415375326…	48,9994294977190…	a^{79}	95,89165292010430…	1567,9817439270100…
a^{20}	3,17480210393627…	51,9130871974932…	a^{80}	101,59366732596100…	1661,2187903197800…
a^{21}	3,36358566101471…	55,0000000000000…	a^{81}	107,63474115247100…	1760,0000000000000…
a^{22}	3,56359487256118…	58,2704701897608…	a^{82}	114,03503592195800…	1864,6550460723400…
a^{23}	3,77549725072657…	61,7354126570147…	a^{83}	120,81591202325000…	1975,5332050244700…
a^{24}	4,00000000000000…	65,4063913251524…	a^{84}	128,00000000000000…	2093,0045224048800…
a^{25}	4,23785237743716…	69,2956577442206…	a^{85}	135,61127607798900…	2217,4610478150600…
a^{26}	4,48984819323745…	73,4161919793542…	a^{86}	143,67514218359800…	2349,3181433393400…
a^{27}	4,75682846001081…	77,7817459305223…	a^{87}	152,21851072034600…	2489,0158697767100…
a^{28}	5,03968419957939…	82,4068892282193…	a^{88}	161,26989438654100…	2637,0204553030200…
a^{29}	5,33935941668000…	87,3070578582524…	a^{89}	170,85950133376000…	2793,8258514640800…
a^{30}	5,65685424949221…	92,4986056779097…	a^{90}	181,01933598375100…	2959,9553816931100…
a^{31}	5,99322830750652…	97,9988589954380…	a^{91}	191,78330584020900…	3135,9634878540200…
a^{32}	6,34960420787254…	103,8261743949860…	a^{92}	203,18733465192100…	3322,4375806395700…
a^{33}	6,72717132202941…	110,0000000000000…	a^{93}	215,26948230494100…	3520,0000000000000…
a^{34}	7,12718974512236…	116,5409403795220…	a^{94}	228,07007184391500…	3729,3100921446900…
a^{35}	7,55099450145313…	123,4708253140290…	a^{95}	241,63182404650000…	3951,0664100489400…
a^{36}	8,00000000000000…	130,8127826503050…	a^{96}	256,00000000000000…	4186,0090448097500…
a^{37}	8,47570475487432…	138,5913154884410…	a^{97}	271,22255215597800…	4434,9220956301200…
a^{38}	8,97969638647489…	146,8323839587080…	a^{98}	287,35028436719700…	4698,6362866786700…
a^{39}	9,51365692002163…	155,5634918610450…	a^{99}	304,43702144069200…	4978,0317395534300…
a^{40}	10,07936839915880…	164,8137784564390…	a^{100}	322,53978877308100…	5274,0409106060400…
a^{41}	10,67871883336000…	174,6141157165050…	a^{101}	341,71900266752000…	5587,6517029281600…
a^{42}	11,31370849898440…	184,9972113558190…	a^{102}	362,03867196750200…	5919,9107633862200…
a^{43}	11,98645661501300…	195,9977179908760…	a^{103}	383,56661168041700…	6271,9269757080300…
a^{44}	12,69920841574510…	207,6523487899730…	a^{104}	406,37466930384300…	6644,8751612791300…
a^{45}	13,45434264405880…	220,0000000000000…	a^{105}	430,53896460988200…	7040,0000000000000…
a^{46}	14,25437949024470…	233,0818807590430…	a^{106}	456,14014368783100…	7458,6201842893800…
a^{47}	15,10198900290630…	246,9416506280590…	a^{107}	483,26364809300100…	7902,1328200978800…
a^{48}	16,00000000000000…	261,6255653006100…	a^{108}	512,00000000000000…	8372,0180896195100…
a^{49}	16,95140950974860…	277,1826309768820…	a^{109}	542,44510431195600…	8869,8441912602300…
a^{50}	17,95939277294980…	293,6647679174170…	a^{110}	574,70056873439300…	9397,2725733573400…
a^{51}	19,02731384004330…	311,1269837220890…	a^{111}	608,87404288138400…	9956,0634791068600…
a^{52}	20,15873679831760…	329,6275569128770…	a^{112}	645,07957754616200…	10548,0818212121000…
a^{53}	21,35743766672000…	349,2282314330100…	a^{113}	683,43800533504100…	11175,3034058563000…
a^{54}	22,62741699796880…	369,9944227116390…	a^{114}	724,07734393500300…	11839,8215267724000…
a^{55}	23,97291323002610…	391,9954359817520…	a^{115}	767,13322336083400…	12543,8539514161000…
a^{56}	25,39841683149020…	415,3046975799460…	a^{116}	812,74933860768600…	13289,7503225583000…
a^{57}	26,90868528811770…	440,0000000000000…	a^{117}	861,07792921976500…	14080,0000000000000…
a^{58}	28,50875898048940…	466,1637615180860…	a^{118}	912,28028737566200…	14917,2403685788000…
a^{59}	30,20397800581250…	493,8833012561180…	a^{119}	966,52729618600100…	15804,2656401958000…

Например, если рассмотреть значение ноты а9, умноженной на значение ноты а16, то это обязательно дает значение ноты 25. Это говорит о том, что опять повторяются числа 9, 16, 25, то есть три в квадрате, четыре в квадрате равняется пять в квадрате. Таким образом, как это уже было отмечено выше, даже в музыкальной грамоте можно найти приложения пифагоровых троек.

Кроме того, теорему Пифагора можно интерпретировать таким образом: площадь квадрата, построенного на гипотенузе как стороне квадрата, равняется сумме площадей двух квадратов, построенных на катетах как сторонах квадрата. Т.е. в случае, если это прямоугольный треугольник, то квадрат, построенный на его гипотенузе, будет равен сумме площадей квадратов, построенных на одном катете, плюс площадь квадрата, построенного на втором катете. Это - известный факт, хорошо описанный и изученный.

Но теорема Пифагора может быть применима не только к квадрату, но и к фигурам других конфигураций. В частности, если мы умножим обе стороны равенства икс квадрат плюс игрек квадрат равняется зет квадрат на величину, например пи разделить на четыре, то это получится следующая интерпретация: сумма площадей кругов, построенных на катетах как гипотенузах, вернее как диаметры кругов, будет равняться площади круга, построенного на гипотенузе как диаметре круга.

Т.е. это будет касаться уже площадей других фигур, в отличие от рассмотренных выше. В частности, таким образом, можно подойти к вычислению площадей кругов. Эту мысль можно развивать дальше. Если мы умножим обе стороны вышеуказанного равенства (по теореме Пифагора) на величину четыре пи, то получим площади поверхностей шаров. Причем сумма поверхностей двух шаров, построенных на катетах как радиусах, будет равняться поверхности шара, построенного на гипотенузе - радиусе этого шара. Т.о. ***теорему Пифагора можно применить не только к площадям кругов и квадратов, но и к площадям шаров - площадям поверхностей шаров*** (объёмам это как раз не будет соответствовать, поскольку идёт нарушение теоремы Ферма. Сумма кубов не может равняться кубу, если есть целочисленные значения). Т.е. *речь идёт о площадях иных геометрических фигур, нежели квадрат, а рассматриваются площади кругов, либо площади поверхностей шаров.* Кроме того, применять полученные соотношения можно не только к круговым либо шаровым поверхностям. Можно также рассматривать площади поверхностей не просто квадрата, а площадь поверхности шести квадратов, из которых составлен куб, т.е. поверхности кубов. *Сумма площадей поверхностей двух кубов будет равняться площади поверхности третьего куба.*

Т.о. получается, что теорема Пифагора применима в геометрическом плане не только к квадратам как фигурам, но и к кубам, а также кругам и шарам.

Насколько нам известно, такая интерпретация нигде не описана. Вполне возможно, что где-то, когда-то она рассматривалась, однако, нам такое описание в литературе найти не удалось. Кроме того, *можно говорить не только о площадях, но и о длинах некоторых конфигураций*. Например, длине окружности. В данном случае она также определяется пифагоровыми тройками. Можно показать, что длина окружности связана с пифагоровыми числами. Такой нетрадиционный подход к рассмотрению геометрических конфигураций применительно к теореме Пифагора крайне интересен, потому что шаровые поверхности либо круговые поверхности очень широко распространены в тех же физических приложениях.

Вывод из всего вышесказанного можно сделать следующий: *пифагоровы тройки чисел определяют, в конечном итоге, геометрическую евклидову природу физических явлений и с этой геометрией связано очень много различных вещей, чисто физических, чисто химических, механических, музыкальных и т.д. То есть, речь идет о всеобщем применении пифагоровых троек в физике или (лучше сказать) в природе вещей.* Наконец, некоторые вещи весьма принципиальны. Спектр атома водорода относится к атомным явлениям, природу которых следовало бы изучить, возможно, более подробно и полно. Физические эксперименты дают очень много, но арифметика, подведенная под этой базой физических экспериментов, может дать значительно больше.

Список литературы

1. **Коротков А. В**. К нахождению решений полиноминальных уравнений второй степени в целых числах // Коротков А. В. Элементы классификации пифагоровых чисел. Новочеркасск: Набла, 2009. 73 с.
2. **Коротков А. В**. Пифагоровы тройки чисел и классификация спектральных линий атомов // Сознание и физическая реальность. 2009. Т. 14. № 11. С. 17-31.
3. **Коротков А. В**. Степенные числа в музыкальной гамме // Коротков А. В., Чураков В. С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2010. С. 222-227.
4. **Коротков А. В**. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2011.
5. **Коротков А. В**. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
6. **Коротков А. В., Чураков В. С.** Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2010. 266 с.
7. **Корякин Н. И., Быстров Н. И., Киреев П. С**. Краткий справочник по физике. М.: Высшая школа, 1963.
8. **Кравченко П. Д., Мешков В. Е., Чураков В. С**. Многомерная физика на основе семимерной парадигмы А. В. Короткова как основа для изучения гравитационного, сильного и слабого ядерных взаимодействий, изучения элементарных частиц и формирования основ квантованной (дискретной) физики // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 5. С. 51-56.
9. **Окунь Л. Б**. Теория относительности и теорема Пифагора // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 6. С. 653-663.
10. **Сингх С.** Великая теорема Ферма / пер. с англ. М.: МЦНМО, 2000.
11. **Сяхович В. И.** Пифагоровы точки. Минск: БГУ, 2007. 288 с.
12. **Шепелев А. В.** Космический микроволновый фон и аристотелевы представления о движении // Успехи физических наук. 2005. Т. 175. № 1. С. 105-106.