Савицкий Олег Анатольевич, Чистякова Татьяна Алексеевна

ВАРИАНТ МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ ПОПРАВОК ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В работе предложен вариант итерационного метода минимальных поправок для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с комплексной матрицей коэффициентов, возникающих при численном решении параболических уравнений с мнимым коэффициентом диффузионного переноса (типа Шредингера). Доказана сходимость предложенного метода, выполнена оценка скорости сходимости, оптимизирован итерационный параметр ? и определен вид оператора предобуславливателя B.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2013/1/40.html

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2013. № 1 (68). C. 129-134. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/1/

Новым шагом в профессиональной подготовке дизайнера является дистанционное образование в проекте *Open Class*, которое проходит в форме вебинаров. Проект существует с 2008 года и отличительной его особенностью является то, что никогда не проводятся идентичные вебинары. Программа каждый раз меняется и в зависимости от вопросов студентов расширяются презентации, и добавляется новый интерактив [9].

Он-лайн технологии дизайн-образования находят всё больше сторонников и среди самих практикующих мастеров. Известный дизайнер Дмитрий Карпов, преподаватель Британской высшей школы дизайна, планирует начать в 2013 году личный оригинальный учебный он-лайн курс для группы из десяти слушателей, который будет длиться два месяца. Это специальные лекции, воскресные семинары с профильной тематикой и серия проектных индивидуальных заданий. Предполагаются три основных направления и адаптация учебного материала под каждый набор слушателей [11].

Таким образом, дистанционное дизайн-образование сегодня имеет ряд серьёзных преимуществ, среди которых: сетевая система обучения, использование интенсивных методов профессионального обучения и оптимальное их сочетание, обучение на основе рабочей ситуации студента, взаимообучение, наиболее интенсивный проектный дизайнерский обмен, использование в образовательном процессе элементов консалтинга, полноценное использование интерактивных образовательных технологий.

Список литературы

1. **Андреев А. А.** Введение в дистанционное обучение: учебно-методическое пособие. М.: ВУ, 1997.
2. **Ахаян А. А.** Виртуальный педагогический вуз. Теория становления. СПб.: Корифей, 2001. 170 с.
3. **Зайченко Т. П.** Основы дистанционного обучения: теоретико-практический базис: учебное пособие. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2004. 167 с.
4. **Зинченко В. П.** Дистанционное образование: к постановке проблемы // Педагогика. 2000. № 2. С. 23-34.
5. **Иванченко Д. А.** Системный анализ дистанционного обучения: монография. М.: Союз, 2005. 192 с.
6. **Кречман Д.** Как управлять качеством и эффективностью электронного обучения? [Электронный ресурс] // ELearning World. 2011. URL: http://www.hypermethod.ru
7. **Малитиков Е. М.** Дистанционное образование в Российской Федерации и странах СНГ: вопросы теории и практики // Телекоммуникации и информатизация образования. 2001. № 3. С. 16-36.
8. **Образовательный портал «Мой университет»** [Электронный ресурс]. URL: http://www.moi-universitet.ru
9. **Образовательный проект *Open Class*** [Электронный ресурс]. URL: http://www.open-class.ru
10. **Полат Е. С., Моисеева М. В., Петров А. Е.** Педагогические технологии дистанционного обучения / под ред. Е. С. Полат. М.: Академия, 2006.
11. **Сайт Британской высшей школы дизайна** [Электронный ресурс]. URL: http://britishdesign.ru
12. **Сайт Института УНИК** [Электронный ресурс]. URL: unic.edu.ru
13. **Хуторской А. В.** Научно-практические предпосылки дистанционной педагогики // Открытое образование. 2001. № 2. С. 30-35.
14. **Шекшня С.** Как эффективно управлять свободными людьми: коучинг. М.: Альпина Паблишер, 2011. 208 с.

УДК 532.5.031
Физико-математические науки

В работе предложен вариант итерационного метода минимальных поправок для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с комплексной матрицей коэффициентов, возникающих при численном решении параболических уравнений с мнимым коэффициентом диффузионного переноса (типа Шредингера). Доказана сходимость предложенного метода, выполнена оценка скорости сходимости, оптимизирован итерационный параметр τ и определен вид оператора предобуславливателя B.

Ключевые слова и фразы: сеточное уравнение; комплексный оператор; итерационные методы.

Олег Анатольевич Савицкий, к. ф.-м. н.
Татьяна Алексеевна Чистякова, к. ф.-м. н.
Кафедра высшей математики
Южный федеральный университет
osav66@mail.ru; a_tanya84@mail.ru

ВАРИАНТ МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ ПОПРАВОК ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (грант № 14.A18.21.0680).

Введение. Решение ряда прикладных задач, например задачи теории дифракции акустических и электромагнитных волн возникает необходимость решения СЛАУ с комплексной матрицей коэффициентов ленточной структуры. При решении одномерных задач в качестве метода решения сеточных уравнений используется экономичный метод прогонки. В случае двух и большего числа пространственных измерений существуют варианты метода прогонки, которые, к сожалению, не являются экономичными, поэтому задача разработки итерационного метода решения сеточных уравнений является актуальной.

Постановка задачи решения СЛАУ с комплексной матрицей коэффициентов. Рассмотрим волновое уравнение:

$$V''_{tt} = k\Delta V\,,\ k > 0\,, \tag{1}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Запишем данное уравнение для бегущей волны:

$$V''_{\theta\varsigma} = k\Delta_\perp V\,,\ \text{где}\ \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,,\ \theta = \sqrt{k}t - z,\ \varsigma = \sqrt{k}t + z\,.$$

Решение данной задачи находится методом гармоник. Функцию скорости частиц среды можно разложить в ряд Фурье следующим образом:

$$V = \sum_{j=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_j \exp(i\omega j\theta)\,,$$

где ω - частота первой гармоники, j - номер гармоники, N - количество дискретных значений величины скорости частиц среды на периоде. Так как функции $\exp(i\omega j\theta)$ для различных j линейно независимы, то получим уравнение:

$$i\omega j\left(c_j\right)'_\varsigma = k\Delta_\perp c_j \tag{2}$$

В работе [6] рассмотрена конечно-разностная аппроксимация данного уравнения на основе схем с весами и доказана его устойчивость в случае $\sigma \geq 0.5$, где σ - вес схемы.

Решение уравнения (2) сеточными методами существенно менее трудозатратно по сравнению в решением исходной волновой задачи [4]. При решении данного уравнения сеточными методами возникает необходимость решения системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$Ay = f\,, \tag{3}$$

где $A = D + iG$, G - самосопряженный положительно определенный оператор ($G = G^* > 0$), D - диагональный положительно определенный оператор. Уравнения вида (3) рассматривались ранее [3], причем предполагалось, что оператор A имеет вид: $A = qE + G,\ q = q_1 + iq_2,\ q_1 \neq 0$.

Поставим задачу разработки адаптивного метода решения СЛАУ (3) для случая $q_1 \equiv 0$. Такая постановка связана с тем, что применений адаптивных методов не требует априорной информации об операторе задачи (оценок значений максимального и минимального собственных чисел).

Описание метода решения сеточных уравнений. Для решения системы уравнений (3) будем использовать нестационарный двухслойный итерационный процесс:

$$B\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau_{n+1}} + Ay^n = f\,,\ n = 1,2,\ldots, \tag{4}$$

где B - положительный самосопряженный оператор, τ_{n+1} - итерационный параметр.

Из формулы (4) выразим y^{n+1}:

$$y^{n+1} = y^n + \tau_{n+1}B^{-1}\left(f - Ay^n\right) \tag{5}$$

Обозначим $z^n \equiv y^n - y$ погрешность решения уравнения на n-ом шаге. Уравнение (5) в терминах погрешности z^n на n-ом шаге для погрешности примет вид:

$$z^{n+1} = z^n - \tau_{n+1}B^{-1}Az^n$$

Оптимизация итерационного параметра τ. Для получения оценок скорости сходимости будем использовать Эрмитову норму: $\|z\| = \sqrt{(z,\bar{z})}$, где $\bar{z}$ - вектор, комплексно сопряженный вектору z.

Введем обозначение $v^n = B^{-1/2}Az^n$. Вследствие того, что действительная часть оператора $B^{-1/2}A$ положительно определена, он не вырожден, из сходимости последовательности v^n к нулю следует сходимость последовательности z^n к нулю. Запишем норму вектора v на ($n+1$)-ом итерационном слое:

$$\left\|v^{n+1}\right\|^2 = \left(v^{n+1},\bar{v}^{n+1}\right) = \left(B^{-1/2}Az^{n+1}, B^{-1/2}\bar{A}\bar{z}^{n+1}\right) = \left(\bar{A}B^{-1}Az^{n+1},\bar{z}^{n+1}\right) =$$

$$= \left(\bar{A}B^{-1}A(z^n - \tau_{n+1}B^{-1}Az^n), \bar{z}^n - \tau_{n+1}B^{-1}\overline{Az}^n\right) = \left(\bar{A}B^{-1}Az^n,\bar{z}^n\right) -$$

$$-\tau_{n+1}\left(\bar{A}B^{-1}Az^n, B^{-1}\overline{Az}^n\right) - \tau_{n+1}\left(\bar{A}B^{-1}AB^{-1}Az^n,\bar{z}^n\right) + \tau_{n+1}^2\left(\bar{A}B^{-1}AB^{-1}Az^n, B^{-1}\overline{Az}^n\right)$$

Обозначим ω^n вектор поправки ($\omega^n = B^{-1}Az^n$), тогда последнее равенство примет вид:

$$\left\|v^{n+1}\right\|^2 = \left(B\omega^n, \bar{\omega}^n\right) - \tau_{n+1}\left(\bar{A}\omega^n, \bar{\omega}^n\right) - \tau_{n+1}\left(A\omega^n, \bar{\omega}^n\right) + \tau_{n+1}^2\left(\bar{A}B^{-1}A\omega^n, \bar{\omega}^n\right)$$

С учетом равенства $\bar{A} + A = 2D$ норма вектора погрешности запишется в следующем виде:

$$\left\|v^{n+1}\right\|^2 = \left(B\omega^n, \bar{\omega}^n\right) - 2\tau_{n+1}\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right) + \tau_{n+1}^2\left(\bar{A}B^{-1}A\omega^n, \bar{\omega}^n\right) =$$

$$= \left(B\omega^n, \bar{\omega}^n\right) - \frac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)^2}{\left(\bar{A}B^{-1}A\omega^n, \bar{\omega}^n\right)} + \frac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)^2}{\left(\bar{A}B^{-1}A\omega^n, \bar{\omega}^n\right)} - 2\tau_{n+1}\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right) + \tau_{n+1}^2\left(\bar{A}B^{-1}A\omega^n, \bar{\omega}^n\right) =$$

$$= \left(B\omega^n, \bar{\omega}^n\right) - \frac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)^2}{\left(\bar{A}B^{-1}A\omega^n, \bar{\omega}^n\right)} + \left(\sqrt{\frac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)^2}{\left(\bar{A}B^{-1}A\omega^n, \bar{\omega}^n\right)}} - \tau_{n+1}\sqrt{\left(\bar{A}B^{-1}A\omega^n, \bar{\omega}^n\right)}\right)^2$$

Норма вектора погрешности минимальна, когда

$$\sqrt{\frac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)^2}{\left(\bar{A}B^{-1}A\omega^n, \bar{\omega}^n\right)}} - \tau_{n+1}\sqrt{\left(\bar{A}B^{-1}A\omega^n, \bar{\omega}^n\right)} = 0$$

Следовательно:

$$\tau_{n+1} = \frac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)}{\left(B^{-1}A\omega^n, \bar{A}\bar{\omega}^n\right)} \tag{6}$$

Выбор оптимального оператора предобуславливателя B. Представим знаменатель выражения (6) в виде:

$$\left(B^{-1}A\omega^n, \bar{A}\bar{\omega}^n\right) = \left(B^{-1}\left(D + iG\right)\omega^n, \left(D - iG\right)\bar{\omega}^n\right) = \left(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n\right) + i\left(B^{-1}G\omega^n, D\bar{\omega}^n\right) -$$

$$-i\left(B^{-1}D\omega^n, G\bar{\omega}^n\right) + \left(B^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n\right)$$

Мнимая часть последнего выражения равна нулю, так как оператор $K = DB^{-1}G - GB^{-1}D$ - кососимметричный. С учетом введенного обозначения последнее выражение примет вид:

$$\left(B^{-1}A\omega^n, \bar{A}\bar{\omega}^n\right) = \left(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n\right) + i\left(K\omega^n, \bar{\omega}^n\right) + \left(B^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n\right)$$

Подставляя данное выражение в формулу (6), получим значение итерационного параметра τ_{n+1}:

$$\tau_{n+1} = \frac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)}{\left(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n\right) + i\left(K\omega^n, \bar{\omega}^n\right) + \left(B^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n\right)} \tag{7}$$

Оценим скорость сходимости разработанного алгоритма.

$$\left\|v^{n+1}\right\|^2 = \left(B\omega^n, \bar{\omega}^n\right) - \frac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)^2}{\left(\bar{A}B^{-1}A\omega^n, \bar{\omega}^n\right)} = \left(B\omega^n, \bar{\omega}^n\right)\left(1 - \frac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)}{\left(B\omega^n, \bar{\omega}^n\right)}\tau_{n+1}\right) =$$

$$= \left(B\omega^n, \bar{\omega}^n\right)\left(1 - \frac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)}{\left(B\omega^n, \bar{\omega}^n\right)} \frac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)}{\left(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n\right) + i\left(K\omega^n, \bar{\omega}^n\right) + \left(B^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n\right)}\right) =$$

$$= \left(B\omega^n, \bar{\omega}^n\right)\left(1 - \frac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)^2}{\left(B\omega^n, \bar{\omega}^n\right)\left(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n\right)}\left(1 + \frac{i\left(K\omega^n, \bar{\omega}^n\right)}{\left(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n\right)} + \frac{\left(B^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n\right)}{\left(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n\right)}\right)^{-1}\right)$$

Заметим, что в силу неравенства Коши-Буняковского $\dfrac{\left(D\omega^n, \bar{\omega}^n\right)^2}{\left(B\omega^n, \bar{\omega}^n\right)\left(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n\right)} \le 1$, причем равенство достигается при $B = D$. Оценим выражение $\dfrac{\left(B^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n\right)}{\left(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n\right)}$:

$$\frac{\left(B^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n\right)}{\left(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n\right)} = \frac{\left(B^{-1}GD^{-1}B^{1/2}u, GD^{-1}B^{1/2}\bar{u}\right)}{\left(u, \bar{u}\right)} \le \left\|B^{-1/2}GD^{-1}B^{1/2}\right\|^2$$

Минимум полученной оценки достигается при $B = D$, так как:

$$\left\|B^{-1/2}GD^{-1}B^{1/2}\right\| \ge \left|\lambda_{\max}\left(GD^{-1}\right)\right| = \left\|D^{-1/2}GD^{-1/2}\right\|,$$

где $\lambda_{\max}\left(GD^{-1}\right)$ - максимальное собственное число оператора GD^{-1}.

Выражение $\max\limits_{|\omega|>0} \dfrac{i\left(K\omega,\bar{\omega}\right)}{\left(B^{-1}D\omega,D\bar{\omega}\right)}$ принимает минимальное нулевое значение при $B=D$.

Таким образом, для обеспечения максимальной скорости сходимости метода в качестве оператора B нужно использовать диагональный оператор D . С учетом этого выражение (7) для τ_{n+1} , при котором скорость сходимости максимальна, примет вид:

$$\tau_{n+1}=\left(1+\frac{\left(D^{-1}G\omega^{n},G\bar{\omega}^{n}\right)}{\left(D\omega^{n},\bar{\omega}^{n}\right)}\right)^{-1} \qquad (8)$$

Скорость сходимости метода. Оценка скорости сходимости разработанного алгоритма с учетом равенства $B=D$ примет следующий вид:

$$\left\|v^{n+1}\right\|=\sqrt{\left(1-\left(1+\frac{\left(D^{-1}G\omega^{n},G\bar{\omega}^{n}\right)}{\left(D\omega^{n},\bar{\omega}^{n}\right)}\right)^{-1}\right)\left(D\omega^{n},\bar{\omega}^{n}\right)}=\sqrt{\frac{\alpha^{2}}{1+\alpha^{2}}\left(D\omega^{n},\bar{\omega}^{n}\right)}=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^{2}}}\left\|v^{n}\right\|^{2},$$

где $\alpha^{2}=\dfrac{\left(D^{-1}G\omega^{n},G\bar{\omega}^{n}\right)}{\left(D\omega^{n},\bar{\omega}^{n}\right)}$.

Оценим α :

$$\alpha=\sqrt{\frac{\left(D^{-1}G\omega^{n},G\bar{\omega}^{n}\right)}{\left(D\omega^{n},\bar{\omega}^{n}\right)}}=\frac{\left\|D^{-1/2}GD^{-1/2}v^{n}\right\|}{\left\|v^{n}\right\|}\le\left\|D^{-1/2}GD^{-1/2}\right\|$$

При решении прикладных задач, как правило, $\left\|D^{-1/2}GD^{-1/2}\right\|<1$. Норма оператора $D^{-1/2}GD^{-1/2}$ зависит от шага дискретизации по переменной ς. В работе [5] показана зависимость погрешности от шага дискретизации по переменной ς для уравнений диффузии, при этом погрешность менее 1% достигается в случае выполнения условия монотонности явной схемы.

Алгоритм метода решения сеточных уравнений с матрицей коэффициентов вида *A*=*D*+*iG*:

1) Задаем матрицы G,D и вектор f .

2) Задаем начальное приближение решения y^{n} при $n=0$ и допустимое значение погрешности решения (нормы вектора поправки).

3) Считаем вектор поправки w по формуле $w=B^{-1}(Ay^{n}-f)$, $B=D$.

4) Находим векторы $Gw^{n}=G\cdot w^{n}$, $Dw^{n}=D\cdot w^{n}$, $D^{-1}G\omega^{n}=D^{-1}\cdot Gw^{n}$.

5) Выполняем комплексное сопряжение для векторов $G\bar{w}^{n}=\mathrm{Re}(Gw^{n})-i\,\mathrm{Im}(Gw^{n})$, $\bar{w}^{n}=\mathrm{Re}(w^{n})-i\,\mathrm{Im}(w^{n})$.

6) Вычисляем скалярные произведения $\left(D^{-1}G\omega^{n},G\bar{\omega}^{n}\right)$ и $\left(D\omega^{n},\bar{\omega}^{n}\right)$.

7) Рассчитываем итерационный параметр τ_{n+1} по формуле: $\tau_{n+1}=\left(1+\dfrac{\left(D^{-1}G\omega^{n},G\bar{\omega}^{n}\right)}{\left(D\omega^{n},\bar{\omega}^{n}\right)}\right)^{-1}$.

8) Находим приближенное решение на следующей итерации $y^{n+1}=y^{n}-\tau w^{n}$.

9) Если норма вектора поправки больше заданного значения, то наращиваем n и возвращаемся в пункт 3.

10) Конец работы алгоритма.

Пример использования метода. Рассмотрим применение метода для решения СЛАУ, задаваемой матрицами G,D и вектором f :

$$G=\begin{pmatrix}10&-1&-1&-1&-1\\-1&10&-1&-1&-1\\-1&-1&10&-1&-1\\-1&-1&-1&10&-1\\-1&-1&-1&-1&10\end{pmatrix},\; D=\begin{pmatrix}10&0&0&0&0\\0&20&0&0&0\\0&0&30&0&0\\0&0&0&40&0\\0&0&0&0&50\end{pmatrix},\; f=\begin{pmatrix}100\\100\\100\\100\\100\end{pmatrix}$$

Зададим начальное приближение решения y^{0} : $y_{i}^{0}=0,\ i=\overline{1,5}$. При этом точное решение равно:

$y=\{$5.755-4.498i, 4.495-1.557i, 3.342-0.615i, 2.605-0.258i, 2.119-0.1i$\}$

В данном случае $\alpha=1.018$. При этом имеет место оценка скорости сходимости: $\left\|v^{n+1}\right\|\le\rho\left\|v^{n}\right\|,\rho=0.713$.

В Таблице 1 приведены последовательность приближений решения $y^{n},n=0,1,...$, погрешности $\left\|z^{n}\right\|$, теоретические и практические оценки нормы вектора v^{n} , которые линейно связаны с погрешностью.

Табл. 1

Номер итерации n	0	1	2	3	4	5	6	7
y_1^n	0	7.361	8.868-3.663i	7.577-5.814i	5.918-6.091i	5.004-5.369i	4.929-4.551i	5.309-4.107i
y_2^n	0	3.681	4.434-0.676i	4.658-1.073i	4.717-1.328i	4.692-1.498i	4.625-1.594i	4.55-1.626i
y_3^n	0	2.454	2.956-0.194i	3.199-0.308i	3.334-0.413i	3.391-0.509i	3.396-0.579i	3.376-0.617i
y_4^n	0	1.84	2.217-0.049i	2.42-0.078i	2.543-0.125i	2.604-0.181i	2.622-0.226i	2.618-0.252i
y_5^n	0	1.472	1.774+0.007i	1.943+0.011i	2.047-0.011i	2.102-0.045i	2.122-0.076i	2.123-0.094i
$\|z^n\|$	9.944	5.306	3.438	2.353	1.655	1.178	0.842	0.601
Практическое значение $\|v^n\|$	47.784	24.546	16.08	11.036	7.717	5.445	3.86	2.744
Теоретическое значение $\|v^n\|$	47.784	34.086	24.314	17.344	12.372	8.825	6.295	4.49

Рассмотрим применение метода для решения СЛАУ, задаваемой матрицами G, D и вектором f:

$$G=\begin{pmatrix}10 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 10 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 10 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 10 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & 10\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}100 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 300 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 400 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 500\end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix}100\\100\\100\\100\\100\end{pmatrix}$$

Зададим начальное приближение решения y^0: $y_i^0=0,\ i=\overline{1,5}$. При этом точное решение равно:

$$y=\left\{0.992-0.086i, 0.5-0.016i, 0.33-4.7\cdot 10^{-3}i, 0.25-1.2\cdot 10^{-3}i, 0.2+1.5\cdot 10^{-4}i\right\}$$

В данном случае $\alpha=0.102$. При этом имеет место оценка скорости сходимости: $\|v^{n+1}\|\le\rho\|v^n\|, \rho=0.101$.

В Таблице 2 приведены последовательность приближений решения $y^n, n=0,1,\ldots$, погрешности $\|z^n\|$, теоретические и практические оценки нормы вектора v^n, которые линейно связаны с погрешностью.

Табл. 2

Номер итерации n	0	1	2	3	4	5	6
y_1^n	0	0.9964	0.99997-0.08609i	0.99169-0.08715i	0.9915-0.08634i	0.99158-0.08631i	0.99159-0.08632i
y_2^n	0	0.4982	0.49998-0.01588i	0.49967-0.01608i	0.49966-0.0161i	0.49965-0.01611i	0.49965-0.0161i
y_3^n	0	0.3321	0.33332-0.00455i	0.33352-0.00461i	0.33353-0.00464i	0.33352-0.00465i	0.33352-0.00465i
y_4^n	0	0.2491	0.24999-0.00115i	0.25023-0.00117i	0.25024-0.00119i	0.25024-0.00119i	0.25024-0.00119i
y_5^n	0	0.1993	0.19999+0.00016i	0.20022+0.00017i	0.20022+0.00015i	0.20022+0.00015i	0.20022+0.00015i
$\|z\|$	1.206	0.088	0.0084	0.00084	$8.5*10^{-5}$	$8.6*10^{-6}$	$8.7*10^{-7}$
Практическое значение $\|v\|$	15.11	0.903	0.085	0.00848	0.00086	$8.7*10^{-5}$	$8.8*10^{-6}$
Теоретическое значение $\|v\|$	15.11	1.53	0.155	0.016	0.00159	0.00016	$1.6*10^{-5}$

Выводы. В работе разработан вариант метода минимальных поправок в случае комплексной матрицы коэффициентов. Получено выражение для оптимального вида оператора предобуславливателя *B*. Получена теоретическая оценка скорости сходимости. Рассмотрен пример применения предложенного метода. Из рассмотренного примера следует, что теоретическая оценка скорости сходимости хорошо согласуется с реальной погрешностью решения.

Список литературы

1. **Савицкий О. А., Чистякова Т. А.** Математическая модель распространения ультразвуковых пучков высокой интенсивности // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 168-174.
2. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
3. **Самарский А. А., Николаев Е. С.** Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. **Сухинов А. И., Огурцов Е. С., Чистяков А. Е.** Построение модели излучателя электромагнитных волн линейной антенной решеткой из скошенных волноводов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 129-139.
5. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Бондаренко Ю. С.** Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 6-13.
6. **Чистякова Т. А.** Исследование конечно-разностных схем для уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 21-30.

УДК 519.635.6; 004.42
Физико-математические науки

Предложена параллельная реализация математической модели распространения звуковых пучков в нелинейной среде, в основе которой лежит уравнение Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова (ХЗК). В результате применения метода расщепления по физическим процессам, исходное уравнение заменяется двумя дифференциально-разностными аналогами уравнения Бюргерса и параболического уравнения квазиоптики. Рассмотрена возможность параллельной реализации дискретной модели ХЗК с помощью параллельного алгоритма быстрого преобразования Фурье и метода геометрического параллелизма. Выполнены измерения ускорения и эффективности параллельной программы на многопроцессорной вычислительной системе ТТИ ЮФУ.

Ключевые слова и фразы: математическое моделирование; численные методы; звуковые пучки; нелинейные процессы; уравнение Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова; параллельное программирование; вычислительные системы с распределенной памятью.

Олег Анатольевич Савицкий, к. ф.-м. н.
Татьяна Алексеевна Чистякова, к. ф.-м. н.
Александр Владимирович Шишеня
Кафедра высшей математики
Южный федеральный университет
osav66@mail.ru; a_tanya84@mail.ru; primat-55-alex@yandex.ru

ПОСТРОЕНИЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПАМЯТЬЮ©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (грант № 14.A18.21.0680).

Нелинейные процессы в ультразвуковых пучках вследствие отсутствия физической дисперсии в большинстве звукопрозрачных сред представляют собой сложные пространственно-временные явления, описываемые квазилинейными уравнениями со степенным характером нелинейных членов [1]. В большинстве практически важных случаев решение модельных уравнений не может быть получено аналитическими методами. Единственной возможностью изучения нелинейных волновых процессов и их применения в технике является математическое моделирование [6].

Несмотря на большое количество математических моделей в настоящее время отсутствуют доступные специализированные модели, описывающие распространение звуковых пучков в нелинейных средах. Как правило, результаты по существующим моделям носят частный характер и встречаются только в научной литературе по нелинейной акустике. Отсутствие таких моделей и их программной реализации сдерживает практическое применение нелинейных эффектов в гидроакустике, неразрушающем контроле, медицинской диагностике.

Постановка задачи. Для описания распространения звуковых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде использовано уравнение Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-v\frac{\partial v}{\partial\theta}-\Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right)=\frac{N}{4}\Delta_\perp v \qquad (1)$$

с начальным условием:

$$v(0,\theta,r)=V(\theta,r)$$