

Савицкий Олег Анатольевич, Чистякова Татьяна Алексеевна, Шишня Александр Владимирович
**ПОСТРОЕНИЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ НА
МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПАМЯТЬЮ**

Предложена параллельная реализация математической модели распространения звуковых пучков в нелинейной среде, в основе которой лежит уравнение Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова (ХЗК). В результате применения метода расщепления по физическим процессам, исходное уравнение заменяется двумя дифференциально-разностными аналогами уравнения Бюргерса и параболического уравнения квазиоптики. Рассмотрена возможность параллельной реализации дискретной модели ХЗК с помощью параллельного алгоритма быстрого преобразования Фурье и метода геометрического параллелизма. Выполнены измерения ускорения и эффективности параллельной программы на многопроцессорной вычислительной системе ТТИ ЮФУ.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2013/1/41.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2013. № 1 (68). С. 134-139. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/1/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

Список литературы

1. Савицкий О. А., Чистякова Т. А. Математическая модель распространения ультразвуковых пучков высокой интенсивности // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 168-174.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
3. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. Сухинов А. И., Огурцов Е. С., Чистяков А. Е. Построение модели излучателя электромагнитных волн линейной антенной решеткой из скошенных волноводов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 129-139.
5. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Бондаренко Ю. С. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 6-13.
6. Чистякова Т. А. Исследование конечно-разностных схем для уравнения Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 21-30.

УДК 519.635.6; 004.42

Физико-математические науки

Предложена параллельная реализация математической модели распространения звуковых пучков в нелинейной среде, в основе которой лежит уравнение Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова (ХЗК). В результате применения метода расщепления по физическим процессам, исходное уравнение заменяется двумя дифференциально-разностными аналогами уравнения Бюргерса и параболического уравнения квазиоптики. Рассмотрена возможность параллельной реализации дискретной модели ХЗК с помощью параллельного алгоритма быстрого преобразования Фурье и метода геометрического параллелизма. Выполнены измерения ускорения и эффективности параллельной программы на многопроцессорной вычислительной системе ТТИ ЮФУ.

Ключевые слова и фразы: математическое моделирование; численные методы; звуковые пучки; нелинейные процессы; уравнение Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова; параллельное программирование; вычислительные системы с распределенной памятью.

Олег Анатольевич Савицкий, к. ф.-м. н.**Татьяна Алексеевна Чистякова**, к. ф.-м. н.**Александр Владимирович Шишени***Кафедра высшей математики**Южный федеральный университет**osav66@mail.ru; a_tanya84@mail.ru; primat-55-alex@yandex.ru*

**ПОСТРОЕНИЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ НА
МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПАМЯТЬЮ[©]**

*Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России»
на 2009-2013 годы (грант № 14.A18.21.0680).*

Нелинейные процессы в ультразвуковых пучках вследствие отсутствия физической дисперсии в большинстве звукопрозрачных сред представляют собой сложные пространственно-временные явления, описываемые квазилинейными уравнениями со степенным характером нелинейных членов [1]. В большинстве практически важных случаев решение модельных уравнений не может быть получено аналитическими методами. Единственной возможностью изучения нелинейных волновых процессов и их применения в технике является математическое моделирование [6].

Несмотря на большое количество математических моделей в настоящее время отсутствуют доступные специализированные модели, описывающие распространение звуковых пучков в нелинейных средах. Как правило, результаты по существующим моделям носят частный характер и встречаются только в научной литературе по нелинейной акустике. Отсутствие таких моделей и их программной реализации сдерживает практическое применение нелинейных эффектов в гидроакустике, неразрушающем контроле, медицинской диагностике.

Постановка задачи. Для описания распространения звуковых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде использовано уравнение Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial v}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} v \quad (1)$$

с начальным условием:

$$v(0, \theta, r) = V(\theta, r)$$

и граничными условиями:

- условие периодичности сигнала:

$$v(z, 0, r) = v(z, 2\pi, r), \quad v'_\theta(z, 0, r) = v'_\theta(z, 2\pi, r);$$

- условие симметричности:

$$v'_r(z, \theta, 0) = 0;$$

- условие отсутствия энергии в бесконечно удаленной точке:

$$v(z, \theta, \infty) = 0,$$

где $v = v(z, \theta, r)$ - величина скорости частиц среды, Γ - диссипативный параметр, θ - время в сопровождающей системе координат, z - нормированное расстояние, N - параметр уравнения, характеризующий соотношение нелинейной и дифракционной длин волны, $\Delta_\perp$ - поперечный лапласиан в полярной системе координат

$$\left(\Delta_\perp \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right).$$

Расчетная область по пространственным направлениям x, y, z представляет собой цилиндр.

Построение дискретной модели. Численное решение уравнений модели основано на методе расщепления по физическим процессам [Там же]. После аппроксимации уравнения (1) по переменной z и введения новых переменных

$$u^n \equiv v^n, \quad u^{n+1} \equiv w^n \equiv v^{n+\sigma}, \quad w^{n+1} \equiv v^{n+1}, \quad v^{n+\tilde{\mu}} \equiv u^{n+\mu}, \quad v^{n+\tilde{\lambda}} \equiv w^{n+\lambda},$$

где $v^{n+\sigma}$ - значение поля v на промежуточном пространственном слое, $\sigma \in (0; 1)$, $u^{n+\mu} = \mu u^{n+1} + (1-\mu)u^n$, $w^{n+\lambda} = \lambda w^{n+1} + (1-\lambda)w^n$, $\mu \in [0; 1]$, $\lambda \in [0; 1]$, $v^{n+\tilde{\mu}}$, $v^{n+\tilde{\lambda}}$ - значения поля v на некотором пространственном слое, исходная задача разбивается на две подзадачи, одна из которых учитывает эффекты нелинейности и диссипации среды и описывается уравнением:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h_z} - u^n \frac{\partial u^{n+\mu}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 u^{n+\mu}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями:

$$u(z, 0, r) = u(z, 2\pi, r), \quad u'_\theta(z, 0, r) = u'_\theta(z, 2\pi, r), \quad (3)$$

а другая учитывает диффузию энергии в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны и описывается уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{h_z} \right) = \frac{N}{4} \Delta_\perp w^{n+\lambda} \quad (4)$$

с граничными условиями:

$$w'_r(z, \theta, 0) = 0, \quad w(z, \theta, \infty) = 0. \quad (5)$$

Для аппроксимации задач (2), (4) по пространственной переменной z использованы схемы с весами.

Исследование дискретной модели. Проведено исследование устойчивости и сходимости к линейному приближению уравнения Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова построенных дискретных математических моделей. Полученная разностная схема устойчива и монотонна при следующих ограничениях на шаги по пространству [3]:

$$h_\theta \leq \frac{\Gamma}{|u|}, \quad h_z \leq \left(\frac{\Gamma}{h_\theta^2} + \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j-1,k}^n}{2h_\theta} \right)^{-1} \leq 2 \frac{h_\theta^2}{\Gamma}$$

Погрешность аппроксимации математической модели равна $O(h_z + h_\theta^2)$. Разностная схема абсолютно устойчива при: $\lambda \geq 1/2$ и имеет второй порядок погрешности аппроксимации при $\lambda = 1/2$, где λ - весовой коэффициент.

Трудоёмкость алгоритма составляет $Q = 20PM \log_2 M + 51PM$ арифметических операций. Наиболее трудоёмкой частью данного алгоритма является расчет коэффициентов ряда Фурье.

Показано, что данная дискретная модель соответствует ее непрерывному аналогу с точки зрения баланса энергии и является консервативной.

Параллельный вариант алгоритма решения сеточных уравнений. Согласно линейному алгоритму, на каждой итерации по пространственной координате z для уравнения Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова производятся следующие вычисления:

- Решение уравнения Бюргерса методом циклической прогонки или LU разложения вдоль направления i .
- Прямое преобразование Фурье вдоль направления i .
- Решение уравнения диффузии энергии различных частот с помощью прогонки вдоль направления j .
- Обратное преобразование Фурье вдоль направления i .

Из трех используемых алгоритмов (метод LU разложения, прогонка, преобразование Фурье) наибольшую вычислительную сложность имеет преобразование Фурье, поэтому будем использовать его параллельную

реализацию, разбив область по процессорам на PN частей в направлении изменения индекса i . Для ускорения прогонки просто разделим область вдоль изменения индекса j на PM частей, тогда на процессорах, стоящих в разных строках, прогонка будет выполняться независимо. Таким образом, разбиение области расчета производится по двум направлениям, что потребует использования $PN \cdot PM$ процессоров.

Алгоритм решения уравнения Бюргерса реализуется методом геометрического параллелизма. Для вычислительных узлов с различными значениями координаты j декартовой топологии вычисления производятся независимо. Вычислители, стоящие в одном и том же столбце топологии, включаются в процесс последовательно, при этом на каждом узле вычисления производятся для всех элементов массива, а затем происходит передача данных с граничных узлов следующему вычислителю.

Ускорение и эффективность параллельного алгоритма. Отладка и выполнение программной реализации решения уравнения Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова проводились на кластере ТТИ ЮФУ, построенном на базе инфраструктуры *HP Blade System C-class*. Кластер включает 128 однотипных 16-ядерных серверов-лезвий *HP ProLiant BL685c*, каждый из которых оснащен четырьмя 4-ядерными процессорами *AMD Opteron 8356 2.3GHz* и оперативной памятью в объеме 32 ГБ. Общее количество вычислительных ядер в комплексе - 2048, суммарный объем оперативной памяти - 4 ТБ. Производительность в пике составляет 18,8 ТФлопс.

Для оценки масштабируемости параллельного алгоритма решения уравнения Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова были измерены время его работы для различных размеров области расчета, количества доступных вычислителей и соотношения декомпозиции области по направлениям. Измерения времени проводились для областей размерами $2^{12} \times 30$, $2^{12} \times 60$, $2^{12} \times 90$, $2^{14} \times 30$, $2^{14} \times 60$, $2^{14} \times 90$, $2^{16} \times 30$, $2^{16} \times 60$, $2^{16} \times 90$ элементов, максимальное количество используемых вычислителей составило 240.

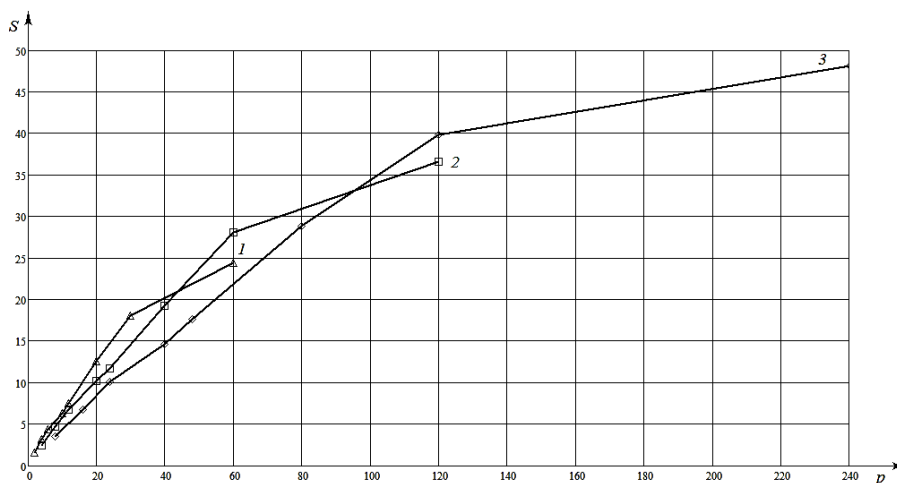


Рис. 1. Ускорение параллельного алгоритма в зависимости от количества узлов в случае разбиения области на 4, 8, 16 частей (графики 1, 2, 3 соответственно) вдоль направления j для области $2^{16} \times 90$ узлов

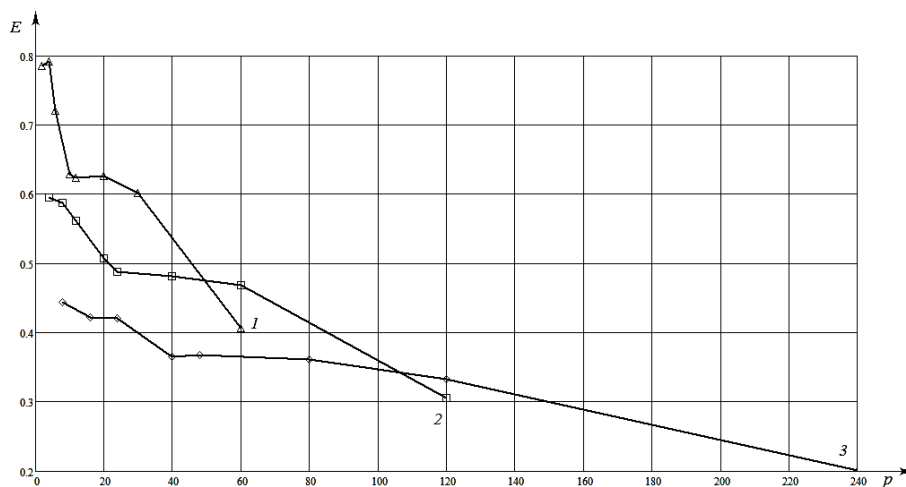


Рис. 2. Эффективность параллельного алгоритма в зависимости от количества узлов в случае разбиения области на 4, 8, 16 частей (графики 1, 2, 3 соответственно) вдоль направления j для области $2^{16} \times 90$ узлов

При увеличении количества вычислителей вдоль направления j (Рис. 1, 2), на начальном этапе наблюдается практический линейный рост ускорения, лишь при достижении 15 вычислителей вдоль направления j происходит

резкое замедление роста ускорения ($4 \times 15 = 30$ вычислителей для графика 1, $8 \times 15 = 60$ вычислителей для графика 2 и $16 \times 15 = 240$ вычислителей для графика 3). В этом случае более эффективным является перераспределение вычислителей для увеличения разбиения по направлению i .

При увеличении количества вычислителей вдоль направления i , параллельный алгоритм быстрого преобразования Фурье вовлекает в обработку каждого массива все больше процессоров, что ведет к замедлению роста ускорения параллельной программы (Рис. 3, 4) и спаду эффективности уже на 16 процессорах. В этом случае разбиение области вдоль направления j приводит к меньшему спаду эффективности (графики 2 и 3 по сравнению с 1, Рис. 3, 4).

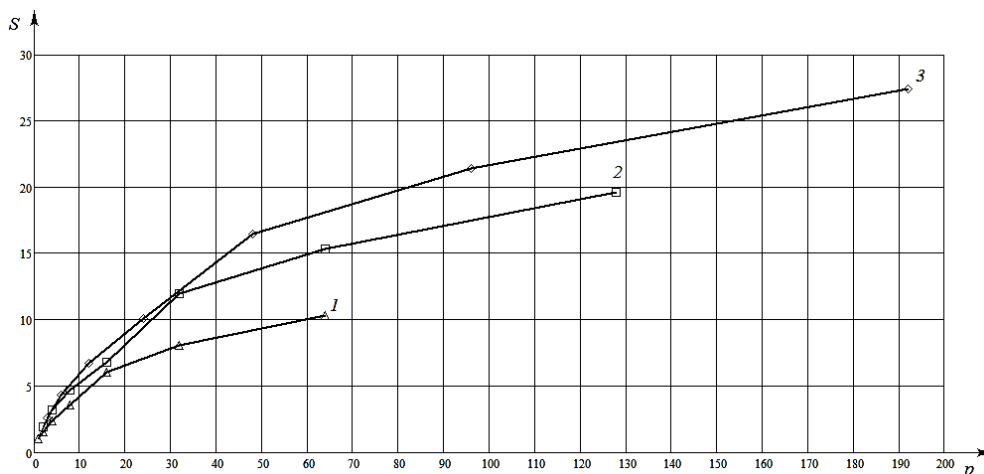


Рис. 3. Ускорение параллельного алгоритма в зависимости от количества узлов в случае разбиения области на 1, 2, 3 части вдоль направления i для области $2^{16} \times 90$ узлов

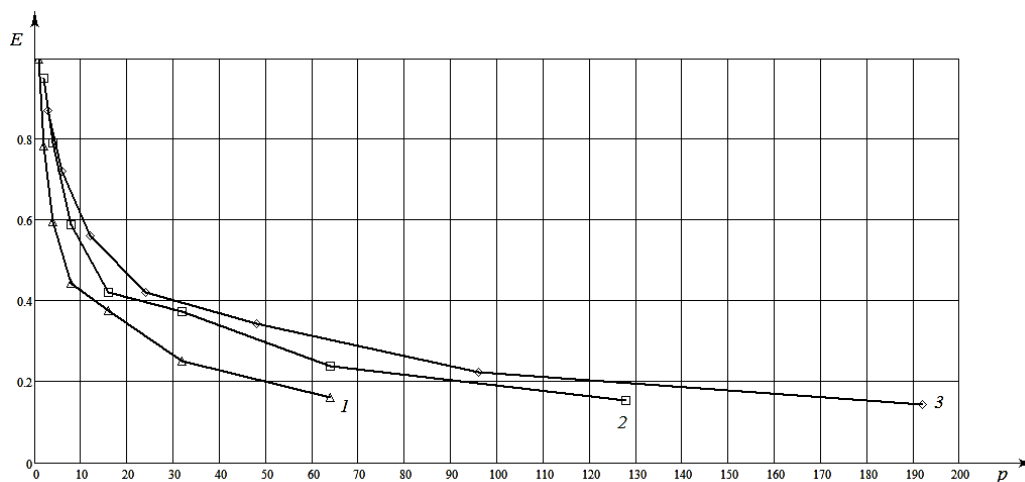


Рис. 4. Эффективность параллельного алгоритма в зависимости от количества узлов в случае разбиения области на 1, 2, 3 части вдоль направления i для области $2^{16} \times 90$ узлов

Таким образом, разбиение расчетной области по двум направлениям позволяет повысить эффективность параллельного алгоритма. При этом рекомендуется использовать не более 16 вычислителей по каждому направлению, так как в противном случае даже при оптимальном соотношении вычислителей по направлениям эффективность параллельной программы падает ниже 40%.

Результаты численных экспериментов. Параллельная реализация программы тестировалась на примере задачи распространения пучков с начальным гауссовским распределением: $V(\theta, r) = e^{-r^2} \sin(\theta)$.

На Рис. 5 приведена функция двух переменных $v(\theta, r)$ при фиксированных значениях $z : z = 0, 1, 2, 4$. При этом вертикальная ось соответствует переменной r , а горизонтальная - переменной θ . С ростом z положительный и отрицательный фронты сближаются.

Из Рис. 5 видно, что с ростом z интенсивность сигнала уменьшается и исходный гауссовский пучок расширяется вдоль координаты r .

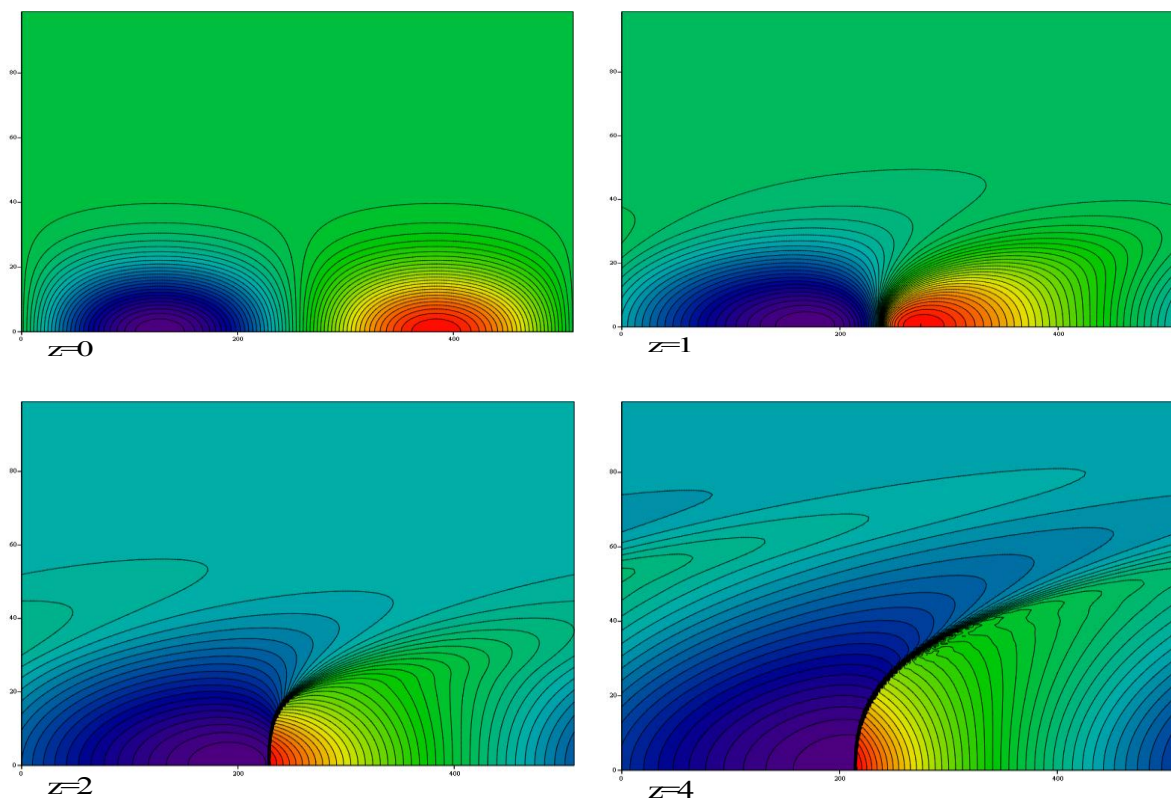


Рис. 5. Функция двух переменных $v(\theta, r)$ при фиксированных значениях z

Рассмотрены пучки с распределением, равномерным по амплитуде и квадратичным по фазе: $V(\theta, r) = \sin(\theta + kr^2)$, $k = 1, 6\pi$. На Рис. 6 изображена исходная функция скорости частиц среды, а на Рис. 7 - функция скорости при следующих параметрах: $z = 0.5$, $\Gamma = 0.001$, $N = 0.2$, $P = 100$, $M = 2^{16}$. Видно, что происходит фокусировка звукового пучка.

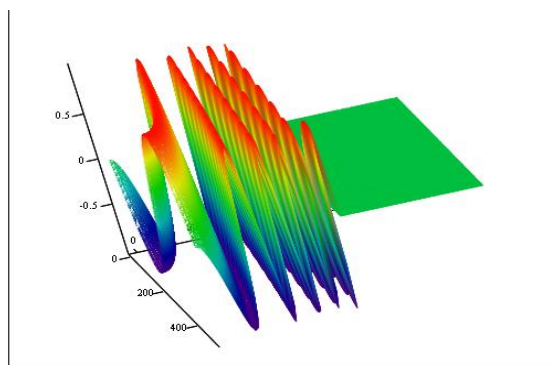


Рис. 6. Функция скорости частиц среды при $z = 0$

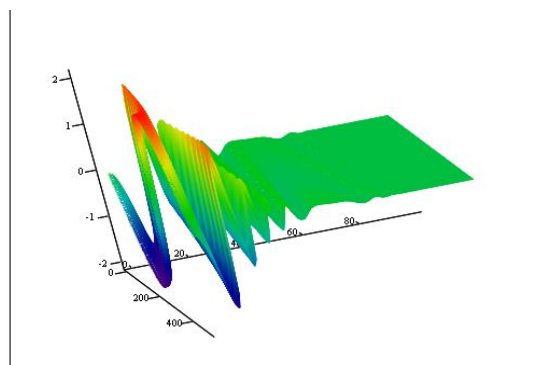


Рис. 7. Функция скорости частиц среды при $z = 0.5$

Таким образом, гауссовский пучок с ростом координаты z расширяется, его интенсивность снижается, а пучок, имеющий начальное распределение $V(\theta, r) = \sin(\theta + kr^2)$, фокусируется с ростом z , и его интенсивность возрастает.

Закключение. В работе построена конечно-разностная модель второго порядка точности для квазилинейного уравнения, описывающего распространение звуковых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде. При построении данной модели предпочтение отдано монотонным схемам. Доказана консервативность, устойчивость и сходимость построенной модели. Выполнены вычислительные эксперименты, на основе которых установлен эффект существования в квадратично-нелинейных средах без физической дисперсии явлений компрессии и декомпрессии звуковых импульсов [Там же]. Показана эффективность применения построенной модели для исследования нелинейного режима фокусировки в звуковых пучках [2].

Список литературы

1. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
2. Савицкий О. А. Пространственные нелинейные эффекты при взаимодействии волн с различными временными масштабами // Сборник трудов XXII сессии РАО. М.: ГЕОС, 2010. Т. 1. С. 204-208.
3. Савицкий О. А., Чистякова Т. А. Сжатие и декомпрессия импульсов при взаимодействии с низкочастотными волнами конечной амплитуды в звуковых пучках // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. Т. 121. № 8. С. 122-128.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
5. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. Чистякова Т. А. Дискретная конечно-разностная модель распространения волновых пучков, описываемая квазилинейным уравнением параболического типа // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. Т. 97. № 8. С. 118-129.

УДК 519.635.6; 004.42

Физико-математические науки

Работа посвящена построению математической модели гидродинамики Азовского моря, учитывающей тепломассоперенос, переменную плотность среды, турбулентный обмен и возмущение свободной поверхности. Для численного решения уравнений модели используется метод поправки к давлению, а при пространственной аппроксимации - модифицированный метод конечных объемов, учитывающий частичную «заполненность» ячеек расчетной сетки. Для построенного алгоритма разработана параллельная реализация для многопроцессорной вычислительной системы ТТИ ЮФУ с распределенной памятью. При помощи построенного программного комплекса удалось выявить существование устойчивых структур, оказывающих негативное воздействие на экологию моря.

Ключевые слова и фразы: математическое моделирование; гидродинамика; тепломассоперенос; метод поправки к давлению; параллельное программирование.

Александр Иванович Сухинов, д. ф.-м. н.

Александр Евгеньевич Чистяков, к. ф.-м. н.

Александр Владимирович Шишени

Кафедра высшей математики

Южный федеральный университет

sukhinov@gmail.ru; cheese_05@mail.ru; primat-55-alex@yandex.ru

**ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИКИ
МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМОВ НА СУПЕРВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ[©]**

*Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России»
на 2009-2013 годы (грант № 14.А18.21.0680).*

В начале августа 2001 года в рамках экспедиции по Азовскому морю, выполняемой НОЦ совместно с Институтом океанологии РАН, в восточной части моря на глубине 1-4 м была обнаружена зона анаэробного заражения общей площадью более 1000 кв. км [10]. Концентрация сероводорода на глубине 7-8 м превышала концентрацию сероводорода в Черном море на глубине более 350 м.

Для изучения механизма образования зоны анаэробного заражения и прогнозирования возможных сценариев развития экосистемы мелководных водоемов, таких как Азовское море, был создан ряд математических моделей гидрофизических процессов в мелководных водоемах, и проведена их верификация на основе более чем 10 экспедиций с 2007 по 2010 годы [2; 5; 6; 8].

Разработанные модели описывают движение водной среды с учетом следующих факторов: ветровое напряжение и трение о дно, стоки рек, испарение, сила Кориолиса, турбулентный обмен, сложная геометрия дна и береговой линии. Исходными уравнениями, используемыми для построения модели гидродинамики мелководных водоемов, являются:

1. уравнения движения по трем координатным направлениям (Навье-Стокса);
2. уравнение неразрывности в случае переменной плотности;
3. уравнение переноса солей;
4. уравнение распространения тепла;
5. уравнение для расчета коэффициента вертикального турбулентного обмена.

Система уравнений дополняется соответствующими граничными условиями, причем для учета трения о дно и поверхность используется закон Ван-Дорна. При решении задачи гидродинамики использовался вариант метода поправки к давлению [10] для случая переменной плотности. Дискретизация непрерывной математической