УДК 532.5.031
Физико-математические науки

Цель данной работы состоит в описании математической модели транспорта сыпучих веществ на основе уравнения Сен-Венана, построении для нее дискретной модели и разработке комплекса программ для численной реализации задачи. Высокая точность аппроксимации достигается с помощью учета заполненности в контрольных объемах. Полученные результаты являются физичными и согласуются с ожидаемыми.

Ключевые слова и фразы: сыпучее вещество; уравнение Сен-Венана; перенос вещества; математическая модель.

Мария Дмитриевна Чекина
Кафедра высшей математики
Южный федеральный университет
elfik55@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТА СЫПУЧИХ ВЕЩЕСТВ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ СЕН-ВЕНАНА©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (грант № 14.A18.21.0680).

Введение. Сыпучее вещество - одна из разновидностей сплошной среды, состоящая из множества отдельных макроскопических твёрдых частиц, теряющих механическую энергию при контактном взаимодействии друг с другом.

Физика сыпучего вещества относится к физике мягкого вещества и рассматривает вопросы статики и динамики сыпучих тел. На практике это может касаться песка, грунтов, зерна, цемента и т.д. Также рассматриваются свойства сыпучих тел и их напряжённое состояние. В практическом плане это позволяет рассчитать прочность оснований сооружений или устойчивость откосов, также можно определить давление сыпучего тела на подпорные стены, на стенки хранилищ, на заглубленные сооружения и др.

Цели данной работы: описать математическую модель транспорта сыпучих веществ на основе двумерного уравнения Сен-Венана, построить дискретную схему повышенной точности, разработать комплекс программ для численной реализации поставленной задачи и визуализировать полученные результаты. Аппроксимация уравнений системы проводится с помощью метода конечных объемов. Это позволяет рассматривать задачу в произвольной области со ступенчатой формой границы. В результате такой аппроксимации, расчеты на границе области будут более точными, чем при использовании аппроксимации интегро-интерполяционным методом.

Постановка задачи. Задача транспорта сыпучих веществ (модель песочные часы) может быть представлена двумерным уравнением Сен-Венана [4; 9; 10]:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=f \tag{1}$$

$$Q=\begin{cases} A\left|\vec{\tau}\right|^{\beta-1}\vec{\tau}, & \left|\vec{\tau}\right|\ge\tau_0 \\ 0, & \left|\vec{\tau}\right|<\tau_0 \end{cases}, \tag{2}$$

где H - функция уровня; $\vec{Q}=\left\{Q_x,Q_y\right\}$ - поток вектора скорости перемещения вещества, $\left|\vec{Q}\right|=Q$; x, y - горизонтальные декартовы координаты; A - постоянная; τ – касательное напряжение на дне; τ_0 - критическое значение напряжения, при котором начинается движение сыпучих веществ; f - функция, описывающая интенсивность и распределение источников.

При помощи уравнения (1) также можно описывать динамику изменения рельефа при транспорте наносов селевых потоков и лавин, а также движение осадков. Запишем касательное напряжение для наклонной поверхности дна

$$\vec{\tau}=-\alpha\sin S\vec{n}, \tag{3}$$

где $S(x,y,t)$ - острый угол между вектором нормали к поверхности дна и вектором силы гравитации в момент времени t, $\vec{n}$ - единичный вектор, направленный в сторону градиента уровня, $\alpha\sin S\vec{n}$ - тангенциальное напряжение, вызванное гравитационными силами.

Соответственно поток вектора скорости представляется в виде:

$$Q=A\varpi d\left|-\alpha\sin S\vec{n}\right|^{\beta-1}(-\alpha\sin S\vec{n}) \tag{4}$$

Сделаем следующее допущение:

$$\sin S \approx tgS = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2} \qquad (5)$$

Подставим (5) в (4) при этом поток вектора скорости запишется в виде:

$$Q = A\left|\alpha gradH\right|^{\beta-1}(-\alpha gradH) \qquad (6)$$

Запишем исходное уравнение транспорта сыпучих веществ (1) с учетом выражения (6)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = div\left(kgradH\right) + f\,, \qquad k = \begin{cases} A\alpha^{\beta}\left|gradH\right|^{\beta-1}, & \left|gradH\right| \ge tg\varphi, \\ 0, & \left|gradH\right| < tg\varphi, \end{cases} \qquad (7)$$

где φ - критическое значение угла скоса, при котором начинается движение сыпучих веществ.

Уравнение (7) дополняется начальным условием:

$$H(x,y,0) = H_0(x,y) \qquad (8)$$

На границе отсутствует поток вызванный влиянием гравитационных сил:

$$H'_n(x,y,t) = 0 \text{ при } (x,y) \in \gamma \qquad (9)$$

Таким образом, имеем непрерывную двумерную математическую модель транспорта сыпучих веществ (7)-(9).

Построение дискретной модели. Построим разностную схему, аппроксимирующую уравнение (14) с соответствующими граничными и начальными условиями (15)-(17).

Расчетная область вписана в прямоугольник. Покроем область равномерной прямоугольной расчетной сеткой $\omega = \omega_t \times \omega_x \times \omega_y$:

$$\omega_t = \left\{t^n = nh_t,\; 0 \le n \le N_t - 1,\; l_t = h_t(N_t - 1)\right\}$$

$$\omega_x = \left\{x_i = ih_x,\; 0 \le i \le N_x - 1,\; l_x = h_x(N_x - 1)\right\}$$

$$\omega_y = \left\{y_j = jh_y,\; 0 \le j \le N_y - 1,\; l_y = h_y(N_y - 1)\right\},$$

где n, i, j - индексы по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно, h_t, h_x, h_y - шаги по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно, N_t, N_x, N_y - количество узлов по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно, l_t, l_x, l_y - длина расчетной области по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

С учетом дискретного аналога оператора диффузионного переноса разностная схема аппроксимирующая уравнение (7) запишется в следующем виде:

$$\left(q_0\right)_{i,j}\frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j}^{n}}{h_t} = \left(q_1\right)_{i,j} k_{i+1/2,j}^{n}\frac{H_{i+1,j}^{n+\sigma} - H_{i,j}^{n+\sigma}}{h_x^2} - \left(q_2\right)_{i,j} k_{i-1/2,j}^{n}\frac{H_{i,j}^{n+\sigma} - H_{i-1,j}^{n+\sigma}}{h_x^2} +$$

$$+\left(q_3\right)_{i,j} k_{i,j+1/2}^{n}\frac{H_{i,j+1}^{n+\sigma} - H_{i,j}^{n+\sigma}}{h_y^2} - \left(q_4\right)_{i,j} k_{i,j-1/2}^{n}\frac{H_{i,j}^{n+\sigma} - H_{i,j-1}^{n+\sigma}}{h_y^2} + \left(q_0\right)_{i,j} f_{i,j}\,, \qquad (10)$$

где $k_{i+1/2,j}^{n} = A\alpha^{\beta}\left|\left(gradH\right)_{i+1/2,j}^{n}\right|^{\beta-1}, \left|gradH\right| \ge tg\varphi$; q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 - коэффициенты заполненности контрольных областей [3]; $H_{i,j}^{n+\sigma} = \sigma H_{i,j}^{n+1} + (1-\sigma)H_{i,j}^{n}$.

Для получения аппроксимации выражения $gradH\big|_{\left(x_{i+1/2},y_j\right)}$ нужно уравнение $W = gradH$ проинтегрировать по области D_{xy}: $D_{xy} \in \left\{x \in \left[x_i, x_{i+1}\right], y \in \left[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}\right]\right\}$. После вычисления полученных интегралов аппроксимация $gradH\big|_{\left(x_{i+1/2},y_j\right)}$ выразится следующим образом:

$$\left(gradH\right)_{i+1/2,j} = \frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{h_x}\,\overline{i} + \left(o_{i,j}\frac{H_{i+1/2,j+1} - H_{i+1/2,j}}{\left(o_{i,j} + o_{i,j-1}\right)h_y} + o_{i,j-1}\frac{H_{i+1/2,j} - H_{i+1/2,j-1}}{\left(o_{i,j} + o_{i,j-1}\right)h_y}\right)\overline{j}\,, \qquad (11)$$

где $\overline{i}, \overline{j}$ - единичные вектора, направленные вдоль координатных осей Ox, Oy соответственно, $o_{i,j}$ - заполненность ячейки (i,j).

Аналогичным образом можно получить следующую аппроксимацию:

$$\left(gradH\right)_{i,j+1/2} = \left(o_{i,j}\frac{H_{i+1,j+1/2} - H_{i,j+1/2}}{\left(o_{i,j} + o_{i-1,j}\right)h_x} + o_{i-1,j}\frac{H_{i,j+1/2} - H_{i-1,j+1/2}}{\left(o_{i,j} + o_{i-1,j}\right)h_x}\right)\overline{i} + \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{h_y}\,\overline{j} \qquad (12)$$

Выражение (10) с аппроксимациями (11)-(12) задают дискретную модель транспорта сыпучих веществ.

Результаты численных экспериментов. На Рис. 1 представлены результаты численного моделирования изменения функции уровня при распространении сыпучих веществ, при этом функция решения в начальный момент представляла собой горизонтальную плоскость, источник задавался точечной функцией. Из рисунка видно, что решение при этом обладает цилиндрической симметрией.

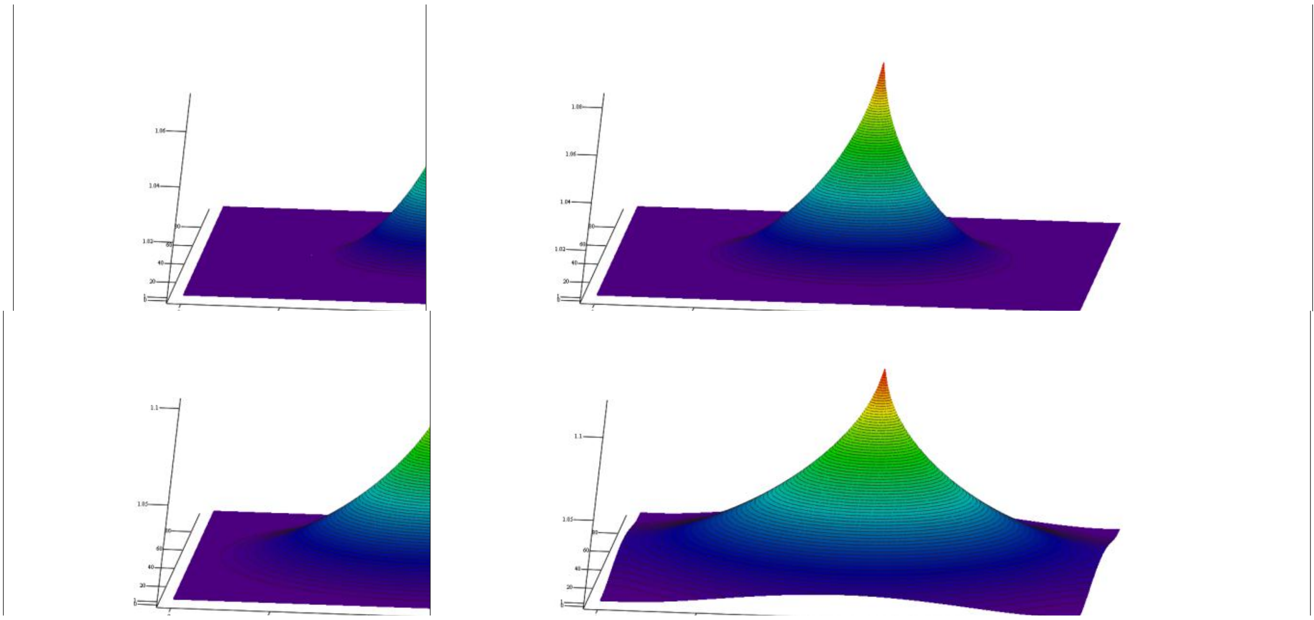

Рис. 1. *Динамика транспорта веществ от точечного источника*

На Рис. 2 представлены результаты численного моделирования изменения функции уровня при распространении сыпучих веществ, при этом функция решения в начальный момент представляла собой наклонную плоскость, источник также задавался точечной функцией. Из рисунка видно, вещество перемещается в сторону уменьшения функции уровня.

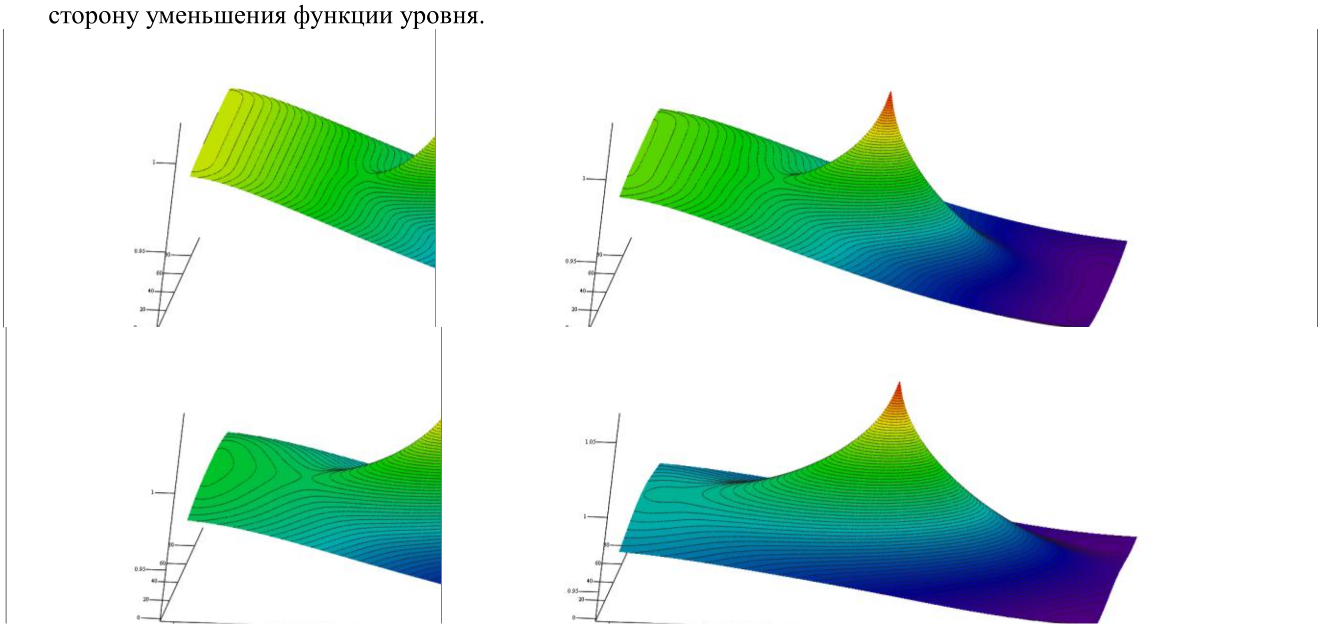

Рис. 2. *Динамика транспорта веществ от точечного источника*

На Рис. 3 представлены результаты численного моделирования изменения функции уровня в случае распределенного источника. Из рисунка видно, что решение также обладает цилиндрической симметрией, как и в случае точечного источника, но при этом значение угла вершины становится больше.

Вывод. В данной работе описана модель транспорта сыпучих веществ на основе уравнения Сен-Венана. Для системы дифференциальных уравнений, описывающих данную модель, составлены дискретные аналоги, разработан комплекс программ. Результаты численного моделирования, представленные на рисунках, являются физичными и согласуются с ожидаемыми.

Отличительными особенностями разработанных алгоритмов и выполненной на их основе программной реализации являются более высокая точность дискретизации, чем при дискретизации на основе интегро-интерполяционного метода, учет заполненности контрольных объемов в дискретных алгоритмах, что позволяет получать достаточно высокую точность даже на грубых сетках за счет более точной аппроксимации границы.

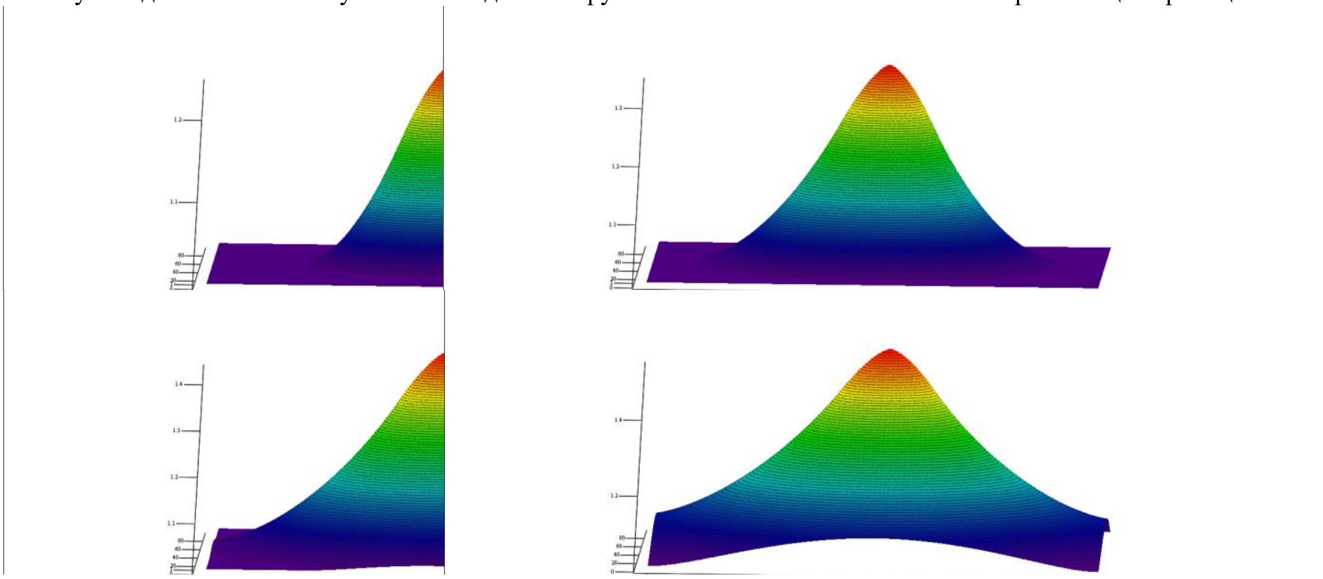

Рис. 3. *Динамика транспорта веществ от распределенного источника*

Список литературы

1. **Сухинов А. И.** Прецизионные модели гидродинамики и опыт применения в предсказании и реконструкции чрезвычайных ситуаций в Азовском море // Известия ТРТУ. 2006. № 3 (58). С. 228-235.
2. **Сухинов А. И., Никитина А. В., Чистяков А. Е.** Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 9. С. 3-21.
3. **Сухинов А. И., Тимофеева Е. Ф. Чистяков А. Е.** Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 22-32.
4. **Сухинов А. И., Чекина М. Д.** Математическое моделирование процессов накопления и фильтрации осадков с помощью супервычислительных систем // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 103-113.
5. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е.** Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 1. С. 3-21.
6. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е.** Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. Т. 13. С. 290-297.
7. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Алексеенко Е. В.** Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 3. С. 3-21.
8. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Бондаренко Ю. С.** Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 6-13.
9. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.** Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 159-167.
10. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.** Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 32-44.
11. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Тимофеева Е. Ф., Шишеня А. В.** Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 8. С. 32-44.
12. **Чистяков А. Е.** Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 66-77.
13. **Чистяков А. Е.** Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 237-249.