Чистяков Александр Евгеньевич, Першина Юлия Валериевна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ И ЕЁ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НА ОСНОВЕ СЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ

Цель данной работы заключается в рассмотрении задачи динамики популяций, основанной на модели "хищник - жертва", построении для нее дискретной схемы и визуализации результатов компьютерных вычислений. Задачей исследования является моделирование поведения хищников и жертв при различных начальных условиях и для разных временных и пространственных промежутков. В результате исследования построена дискретная схема задачи и приведены результаты визуализации решения.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2013/1/50.html

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2013. № 1 (68). C. 165-170. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/1/

основой нового стратегического курса, его определяющим приоритетом для нашей страны должны стать разработка и реализация программы направленной на развитие инновационной модели экономического роста, утверждение Российской Федерации как высокотехнологического государства, что должно реализовываться через новую стратегию промышленно-инновационной политики. При этом неспособность к осуществлению инноваций порождает значительный риск оказаться на позициях аутсайдера, ведь, в конечном итоге, это приводит к ограничению возможностей развития и использования имеющегося потенциала [1].

Необходимость активизации использования научно-технического потенциала страны выдвигает в число приоритетов экономической политики России создание механизмов включения ценных знаний и технологических достижений в хозяйственный оборот. Однако в практике регулирования сферы интеллектуальной собственности не учитываются очевидные тенденции глобализации мировой экономики и транснационализации процессов создания современной наукоемкой продукции. Инерция самоизоляции отечественного научно-промышленного комплекса и невостребованность интеллектуального потенциала внутри страны влекут за собою консервацию результатов НИОКР с последующей утратой их ценности и сохранением причин «утечки умов» из Российской Федерации. Вместо требуемой организационной, юридической и финансовой помощи творческим коллективам и доведения результатов НИОКР до оборотоспособного рыночного продукта ряд государственных органов в последнее время только усиливали фискальный нажим на создателей наукоемкой продукции. Преодоление таких негативных тенденций требует активизации государственных усилий по коммерциализации результатов НИОКР, продвижению российских технологических достижений на зарубежные рынки и включению интеллектуально-кадрового потенциала страны в организацию транснационального производства наукоемкой продукции. Внедрение же инноваций в экономическую систему России позволит:

– обеспечить рост и качественное совершенствование основного капитала, как на уровне отдельной фирмы, региона так и на уровне национальной экономики в целом;

– осуществить прогрессивные структурные экономические сдвиги, которые касаются важнейших региональных экономических пропорций: воспроизводственных, отраслевых, стоимостных;

– реализовать новейшие достижения научно-технического прогресса и повысить на этой основе эффективность производства на микро-, мезо- и макроуровне.

Вышеуказанные обстоятельства позволят не только ускорить экономическое развитие государства, но и достичь необходимого уровня конкурентоспособности с целью свободного соперничества на мировых рынках товаров и услуг.

Список литературы

1. **Ветрова Е. Н., Гуторова Н. В.** Организационно-экономические механизмы обеспечения развития промышленности России // Экономика и управление. 2011. № 2.
2. **Ежов Г. П., Черкасов М. Н.** Синергетический подход при оценке эффективности инновационно-инвестиционных проектов // Актуальные проблемы современной науки. 2010. № 5.
3. **Пономарева О. А.** Инновации и их роль в развитии экономики России // Наука и общество. 2011. № 3.

УДК 532.5.031
Физико-математические науки

Цель данной работы заключается в рассмотрении задачи динамики популяций, основанной на модели «хищник - жертва», построении для нее дискретной схемы и визуализации результатов компьютерных вычислений. Задачей исследования является моделирование поведения хищников и жертв при различных начальных условиях и для разных временных и пространственных промежутков. В результате исследования построена дискретная схема задачи и приведены результаты визуализации решения.

Ключевые слова и фразы: хищник; жертва; диффузионное перемещение; конвективное перемещение.

Александр Евгеньевич Чистяков, к. ф.-м. н.
Юлия Валериевна Першина
Кафедра высшей математики
Южный федеральный университет
cheese_05@mail.ru; yuliapershina@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ И ЕЁ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НА ОСНОВЕ СЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (грант № 14.A18.21.0680).

Введение. Система «хищник - жертва» - сложная экосистема, для которой реализованы долговременные отношения между видами хищника и жертвы, типичный пример коэволюции. Отношения между хищниками и их жертвами развиваются циклически, являясь иллюстрацией нейтрального равновесия [2].

Модель «хищник - жертва» все чаще используется не только для моделирования поведения сообществ в экологии, но и применяется к социальным и экономическим моделям, что указывает на актуальность рассматриваемой задачи.

Цель данной работы состоит в рассмотрении системы дифференциальных уравнений в форме Лотки-Вольтерра [Там же], построении дискретной схемы повышенной степени точности, разработке комплекса программ для численной реализации поставленной задачи и визуализации полученных результатов.

Для аппроксимации уравнений системы используем метод конечных объемов, учтем заполненности областей, что позволит рассматривать задачу в произвольной области, граница которой имеет ступенчатую форму. При этом получим более точную аппроксимацию уравнений на границе.

Рассматриваемая модель системы «хищник - жертва» имеет большую практическую значимость для моделирования экологических систем, где в расчет принимаются более одного вида живых существ, одни из которых поглощаются другими.

1. Постановка начально-краевой задачи. Исходными уравнениями динамики популяций (модель «хищник - жертва») являются [3-5]:

- уравнение, описывающее диффузионное перемещение жертв, а также динамику изменения их концентрации за счет роста и смертности запишется в виде:

$$N_t' = (\mu_N N_x')_x' + (\mu_N N_y')_y' + C_1(N_0 - N)N - C_2 P\,; \tag{1}$$

- уравнение, описывающее диффузионное и конвективное перемещение хищников, а также динамику изменения их концентрации за счет роста и смертности запишется в виде:

$$P_t' + uP_x' + vP_y' = (\mu_P P_x')_x' + (\mu_P P_y')_y' - C_3 P + C_4 NP\,; \tag{2}$$

- уравнения для компонентов вектора скорости конвективного движения хищников в направлении градиента жертв запишутся в виде:

$$\alpha u + \beta(u_t' + uu_x' + vu_y') = (\mu_v u_x')_x' + (\mu_v u_y')_y' + C_5 N_x' \tag{3}$$

$$\alpha v + \beta(v_t' + uv_x' + vv_y') = (\mu_v v_x')_x' + (\mu_v v_y')_y' + C_5 N_y'\,, \tag{4}$$

где N - концентрация жертв; P - концентрация хищников; N_0 - предельная концентрация; u, v - компоненты вектора скорости конвективного движения хищников; C_1 - коэффициент роста жертв, C_2 - коэффициент смертности жертв; C_3 - коэффициент роста хищников; C_4 - коэффициент смертности хищников; C_5 - коэффициент таксиса; μ_N - коэффициент диффузионного перемещения жертв; μ_P - коэффициент диффузионного перемещения хищников; μ_v - коэффициент диффузионного обмена для вектора скорости; α, β - весовые коэффициенты. Расчет скорости движения водной среды производится на основе математических моделей гидродинамики [1; 16; 17].

Система уравнений (1)-(4) рассматривается при следующих начальных

$$N(x,y,t) = N_0(x,y)\,,\quad P(x,y,t) = P_0(x,y)\,, \tag{5}$$

$$u(x,y,t) = 0\,,\ v(x,y,t) = 0\,,\ \text{при}\ t = 0$$

и граничных условиях:

$$N_n'(x,y,t) = 0\,,\qquad P_n'(x,y,t) = 0\,, \tag{6}$$

$$u(x,y,t) = 0\,,\ v(x,y,t) = 0\,,\ \text{при}\ (x,y) \in \gamma$$

2. Дискретная математическая модель динамики популяций. Расчетная область вписана в прямоугольник. Покроем область равномерной прямоугольной расчетной сеткой $\omega = \omega_t \times \omega_x \times \omega_y$. Дискретные аналоги операторов конвективного и диффузионного переноса в случае граничных условий в форме Неймана могут быть записаны в следующем виде [7; 11; 12; 14]:

$$(q_0)_{i,j}\, uc_x' \simeq (q_1)_{i,j}\, u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j}\, u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x}$$

$$(q_0)_{i,j} (\mu c_x')'_x \simeq (q_1)_{i,j}\, \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j}\, \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2}\,,$$

где q_m - коэффициенты заполненности контрольных областей.

Аппроксимация уравнения (1) в случае граничных условий в форме Неймана имеет вид:

$$\begin{aligned}(q_0)_{i,j} \frac{\hat{N}_{i,j} - N_{i,j}}{\tau} &= (q_1)_{i,j} (\mu_N)_{i+1/2,j} \frac{\bar{N}_{i+1,j} - \bar{N}_{i,j}}{h_x^2} - \\ &- (q_2)_{i,j} (\mu_N)_{i-1/2,j} \frac{\bar{N}_{i,j} - \bar{N}_{i-1,j}}{h_x^2} + (q_3)_{i,j} (\mu_N)_{i,j+1/2} \frac{\bar{N}_{i,j+1} - \bar{N}_{i,j}}{h_y^2} - \\ &- (q_4)_{i,j} (\mu_N)_{i,j-1/2} \frac{\bar{N}_{i,j} - \bar{N}_{i,j-1}}{h_y^2} + (q_0)_{i,j} \left(C_1 \left(N_0 - N_{i,j} \right) \bar{N}_{i,j} - C_2 P_{i,j} \right),\end{aligned} \tag{7}$$

где $\hat{N}$ - значение концентрации жертв на следующем временном слое, N - значение концентрации жертв на текущем временном слое, $\bar{N}_{i,j}=\sigma\hat{N}_{i,j}+(1-\sigma)N_{i,j}$ $\sigma\in[0,1]$.

Дискретный аналог уравнения (2) примет вид:

$$\begin{aligned}&(q_0)_{i,j}\frac{\hat{P}_{i,j}-P_{i,j}}{\tau}+(q_1)_{i,j}u_{i+1/2,j}\frac{\bar{P}_{i+1,j}-\bar{P}_{i,j}}{2h_x}+\\&+(q_2)_{i,j}u_{i-1/2,j}\frac{\bar{P}_{i,j}-\bar{P}_{i-1,j}}{2h_x}+(q_3)_{i,j}v_{i,j+1/2}\frac{\bar{P}_{i,j+1}-\bar{P}_{i,j}}{2h_y}+\\&+(q_4)_{i,j}v_{i,j-1/2}\frac{\bar{P}_{i,j}-\bar{P}_{i,j-1}}{2h_y}=(q_1)_{i,j}(\mu_P)_{i+1/2,j}\frac{\bar{P}_{i+1,j}-\bar{P}_{i,j}}{h_x^2}-\\&-(q_2)_{i,j}(\mu_P)_{i-1/2,j}\frac{\bar{P}_{i,j}-\bar{P}_{i-1,j}}{h_x^2}+(q_3)_{i,j}(\mu_P)_{i,j+1/2}\frac{\bar{P}_{i,j+1}-\bar{P}_{i,j}}{h_y^2}-\\&-(q_4)_{i,j}(\mu_P)_{i,j-1/2}\frac{\bar{P}_{i,j}-\bar{P}_{i,j-1}}{h_y^2}+(q_0)_{i,j}\left(-C_3+C_4N_{i,j}\right)\bar{P}_{i,j}\end{aligned}\tag{8}$$

Запишем аппроксимацию уравнений (3)-(4) в случае граничных условиях первого рода:

- для компоненты u:

$$\begin{aligned}&\alpha\bar{u}_{i,j}+\beta\left(\frac{\hat{u}_{i,j}-u_{i,j}}{\tau}+u_{i+1/2,j}\frac{\bar{u}_{i+1,j}-\bar{u}_{i,j}}{2h_x}+u_{i-1/2,j}\frac{\bar{u}_{i,j}-\bar{u}_{i-1,j}}{2h_x}+\right.\\&\left.+v_{i,j+1/2}\frac{\bar{u}_{i,j+1}-\bar{u}_{i,j}}{2h_y}+v_{i,j-1/2}\frac{\bar{u}_{i,j}-\bar{u}_{i,j-1}}{2h_y}\right)=(\mu_v)_{i+1/2,j}\frac{\bar{u}_{i+1,j}-\bar{u}_{i,j}}{h_x^2}-\\&-(\mu_v)_{i-1/2,j}\frac{\bar{u}_{i,j}-\bar{u}_{i-1,j}}{h_x^2}+(\mu_v)_{i,j+1/2}\frac{\bar{u}_{i,j+1}-\bar{u}_{i,j}}{h_y^2}-(\mu_v)_{i,j-1/2}\frac{\bar{u}_{i,j}-\bar{u}_{i,j-1}}{h_y^2}+C_5\frac{N_{i+1,j}-N_{i-1,j}}{2h_x};\end{aligned}\tag{9}$$

- для компоненты v:

$$\begin{aligned}&\alpha\bar{v}_{i,j}+\beta\left(\frac{\hat{v}_{i,j}-v_{i,j}}{\tau}+u_{i+1/2,j}\frac{\bar{v}_{i+1,j}-\bar{v}_{i,j}}{2h_x}+u_{i-1/2,j}\frac{\bar{v}_{i,j}-\bar{v}_{i-1,j}}{2h_x}+\right.\\&\left.+v_{i,j+1/2}\frac{\bar{v}_{i,j+1}-\bar{v}_{i,j}}{2h_y}+v_{i,j-1/2}\frac{\bar{v}_{i,j}-\bar{v}_{i,j-1}}{2h_y}\right)=(\mu_v)_{i+1/2,j}\frac{\bar{v}_{i+1,j}-\bar{v}_{i,j}}{h_x^2}-\\&-(\mu_v)_{i-1/2,j}\frac{\bar{v}_{i,j}-\bar{v}_{i-1,j}}{h_x^2}+(\mu_v)_{i,j+1/2}\frac{\bar{v}_{i,j+1}-\bar{v}_{i,j}}{h_y^2}-(\mu_v)_{i,j-1/2}\frac{\bar{v}_{i,j}-\bar{v}_{i,j-1}}{h_y^2}+C_5\frac{N_{i,j+1}-N_{i,j-1}}{2h_y}\end{aligned}\tag{10}$$

Выражения (9)-(10) аппроксимируют уравнения (3)-(4) в случае ступенчатой формы расчетной области.

Уравнения (7)-(10) являются дискретным аналогом системы уравнений (1)-(4), описывающей поведение динамики изменения концентрации популяций, состоящей из двух видов. Первый вид условно назовем жертвами, второй - хищниками.

3. Результаты работы программного комплекса. В целях моделирования возможных сценариев поведения биологической системы, состоящей из хищников и жертв, был разработан комплекс программ. Рассматривается двумерная сетка размером 100х100 ед., шаг по пространству равен 1, шаг по времени равен 0,01. Вес для разностной схемы равен 0,5. В начальный момент времени моделирования концентрация жертв задавалась постоянным значением равным 1, исходная концентрация хищников приведена на Рис. 1. Концентрация хищников показана палитрой. При моделировании изменения концентрации популяций использованы следующие параметры: предельная концентрация, коэффициент роста жертв $C_1=1$, коэффициент смертности жертв $C_2=1$, коэффициент роста хищников $C_3=1$, коэффициент смертности хищников $C_4=1$, коэффициент таксиса $C_5=10$, коэффициент диффузии равен 1.

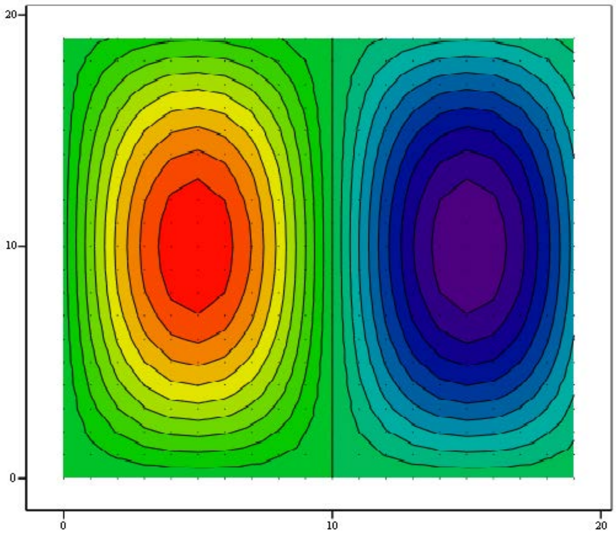

Рис. 1. *Начальное распределение концентрации хищников*

На Рис. 2-5 приведены результаты использования предложенных алгоритмов и построенного на их основе программного обеспечения. Стрелочками показано направление движения хищников, цветом показана концентрация популяций.

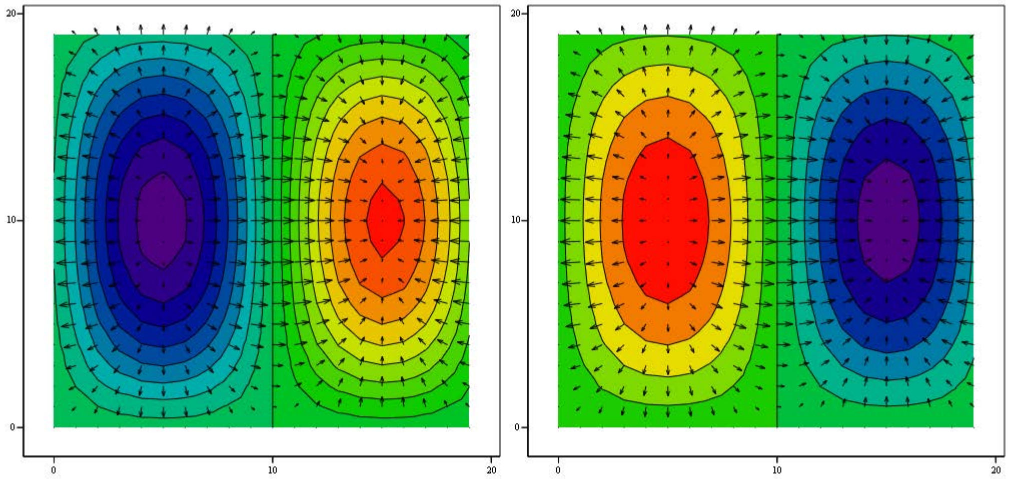

Рис. 2. *Распределение концентраций жертв (слева) и хищников (справа) через время 100 у.е.*

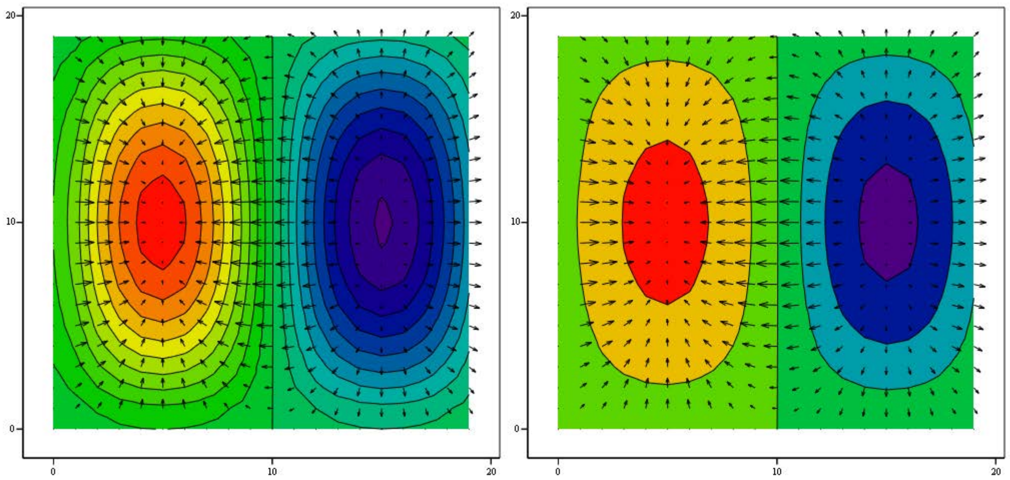

Рис. 3. *Распределение концентраций жертв (слева) и хищников (справа) через 500 у.е.*

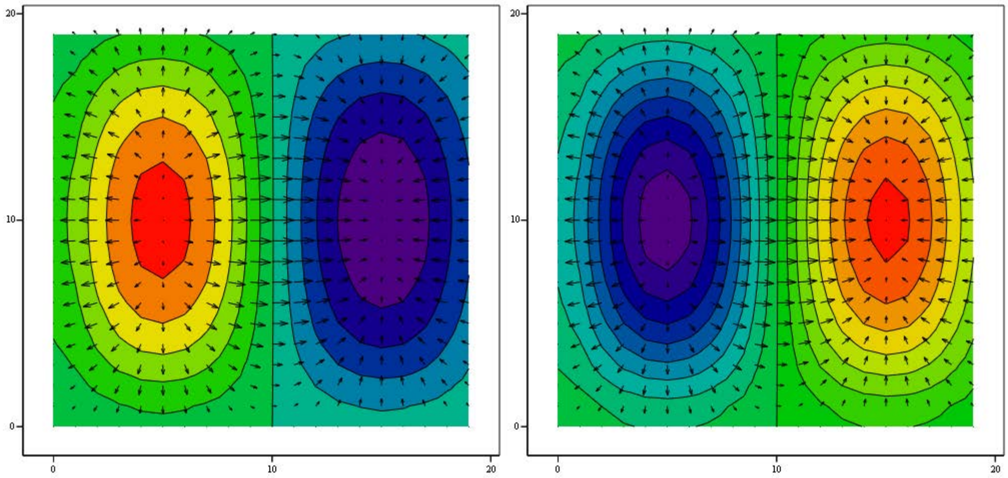

Рис. 4. *Распределение концентраций жертв (слева) и хищников (справа) через 1000 у.е.*

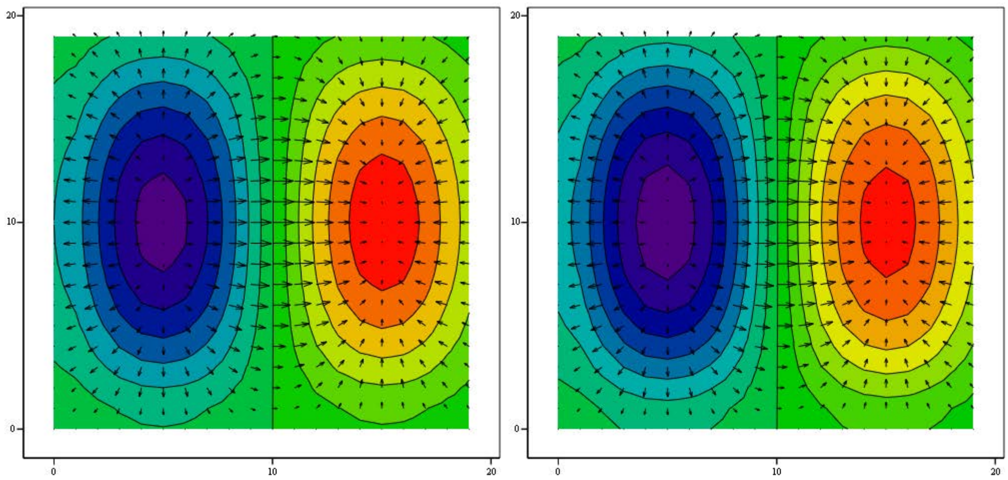

Рис. 5. *Распределение концентраций жертв (слева) и хищников (справа) через 1500 у.е.*

Из приведенных рисунков видно периодическое изменение концентраций популяций. Возможны другие сценарии развития этой экосистемы. Например, система выходит на стационар или наступает полное поглощение жертв хищниками, после чего хищники умирают.

Из приведенного примера видно, что разработанное программное обеспечение может быть применено для моделирования развития экосистем, состоящих из двух видов, один из которых поглощает другой.

Вывод. В данной работе рассмотрена математическая модель системы «хищник - жертва». Для системы дифференциальных уравнений, описывающих данную модель, составлены дискретные аналоги, разработан комплекс программ. На Рисунках 1-5, иллюстрирующих полученные результаты, наблюдается характерное «запаздывание» максимальной численности хищников относительно максимальной численности жертв.

Отличительные особенности разработанных алгоритмов и выполненной на их основе программной реализации - это высокая размерность задачи, возможность привязки к реальной физической экологической системе, учет заполненности контрольных объемов в дискретных алгоритмах, что позволяет получать достаточно высокую точность даже на грубых сетках за счет более точной аппроксимации границы.

Список литературы

1. **Алексеенко Е. В., Сидоренко Б. В., Колгунова О. В., Чистяков А. Е.** Сравнительный анализ классических и неклассических моделей гидродинамики водоемов с турбулентным обменом // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 8 (97). С. 6-18.
2. **Вольтерра В.** Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
3. **Никитина А. В.** Модели биологической кинетики, стабилизирующие экологическую систему таганрогского залива // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 8 (97). С. 130-134.
4. **Никитина А. В.** Численное решение задачи динамики токсичных водорослей в Таганрогском заливе // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 113-116.
5. **Сухинов А. И., Никитина А. В.** Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море // Известия ЮФУ. 2011. № 8 (121). С. 62-73.

6. **Сухинов А. И., Никитина А. В., Чистяков А. Е.** Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 9. С. 3-21.
7. **Сухинов А. И., Тимофеева Е. Ф. Чистяков А. Е.** Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 22-32.
8. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е.** Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 1. С. 3-20.
9. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е.** Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. Т. 13. № 1. С. 290-297.
10. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Алексеенко Е. В.** Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 3. С. 3-21.
11. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.** Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 159-167.
12. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.** Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 32-44.
13. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Тимофеева Е. Ф., Шишеня А. В.** Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 8. С. 32-44.
14. **Чистяков А. Е.** Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 66-77.
15. **Чистяков А. Е.** Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 237-249.
16. **Чистяков А. Е.** Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 8 (97). С. 75-82.
17. **Чистяков А. Е., Алексеенко Е. В., Колгунова О. В.** Вычислительные эксперименты с математическими моделями турбулентного обмена в мелководных водоемах // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 10 (87). С. 171-175.

УДК 519.6
Физико-математические науки

В работе освещены вопросы построения пространственно-одномерной математической модели распространения поверхностных волн. Разработаны и программно реализованы математические модели гидродинамических процессов, основанные на волновом уравнении с учетом нелинейных процессов и без их учета, и модель, описываемая системой уравнений Навье-Стокса. На основе численных экспериментов показана целесообразность использования модели движения водной среды, описываемой системой уравнений Навье-Стокса.

Ключевые слова и фразы: математическое моделирование; аккумуляция; абразия; метод баланса; дискретная модель.

Александр Евгеньевич Чистяков, к. ф.-м. н.
Елена Анатольевна Проценко, к. ф.-м. н.
Кафедра высшей математики
Южный федеральный университет
cheese_05@mail.ru; eapros@rambler.ru

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (грант № 14.A18.21.0680).

Для задач математического моделирования гидродинамических процессов в водоемах актуальной остается проблема построения и практического использования математических моделей движения водной среды на мелководье под воздействием поверхностных гравитационных волн. Одним из наиболее эффективных методов исследования реальных процессов гидродинамики в настоящее время становится численное моделирование [4; 11; 13].

Цель работы заключается в построении и реализации одномерных непрерывных и дискретных моделей распространения поверхностных волн в прибрежных водных системах, описывающих переформирование прибрежной зоны водоемов под воздействием движения воды и гравитационных сил, удовлетворяющих основным законам сохранения.
