Чистяков Александр Евгеньевич, Проценко Елена Анатольевна

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

В работе освещены вопросы построения пространственно-одномерной математической модели распространения поверхностных волн. Разработаны и программно реализованы математические модели гидродинамических процессов, основанные на волновом уравнении с учетом нелинейных процессов и без их учета, и модель, описываемая системой уравнений Навье-Стокса. На основе численных экспериментов показана целесообразность использования модели движения водной среды, описываемой системой уравнений Навье-Стокса.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2013. № 1 (68). C. 170-173. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/1/

6. **Сухинов А. И., Никитина А. В., Чистяков А. Е.** Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 9. С. 3-21.
7. **Сухинов А. И., Тимофеева Е. Ф. Чистяков А. Е.** Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 22-32.
8. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е.** Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 1. С. 3-20.
9. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е.** Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. Т. 13. № 1. С. 290-297.
10. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Алексеенко Е. В.** Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 3. С. 3-21.
11. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.** Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 159-167.
12. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.** Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 32-44.
13. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Тимофеева Е. Ф., Шишеня А. В.** Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 8. С. 32-44.
14. **Чистяков А. Е.** Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 66-77.
15. **Чистяков А. Е.** Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 237-249.
16. **Чистяков А. Е.** Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 8 (97). С. 75-82.
17. **Чистяков А. Е., Алексеенко Е. В., Колгунова О. В.** Вычислительные эксперименты с математическими моделями турбулентного обмена в мелководных водоемах // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 10 (87). С. 171-175.

УДК 519.6
Физико-математические науки

В работе освещены вопросы построения пространственно-одномерной математической модели распространения поверхностных волн. Разработаны и программно реализованы математические модели гидродинамических процессов, основанные на волновом уравнении с учетом нелинейных процессов и без их учета, и модель, описываемая системой уравнений Навье-Стокса. На основе численных экспериментов показана целесообразность использования модели движения водной среды, описываемой системой уравнений Навье-Стокса.

Ключевые слова и фразы: математическое моделирование; аккумуляция; абразия; метод баланса; дискретная модель.

Александр Евгеньевич Чистяков, к. ф.-м. н.
Елена Анатольевна Проценко, к. ф.-м. н.
Кафедра высшей математики
Южный федеральный университет
cheese_05@mail.ru; eapros@rambler.ru

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (грант № 14.A18.21.0680).

Для задач математического моделирования гидродинамических процессов в водоемах актуальной остается проблема построения и практического использования математических моделей движения водной среды на мелководье под воздействием поверхностных гравитационных волн. Одним из наиболее эффективных методов исследования реальных процессов гидродинамики в настоящее время становится численное моделирование [4; 11; 13].

Цель работы заключается в построении и реализации одномерных непрерывных и дискретных моделей распространения поверхностных волн в прибрежных водных системах, описывающих переформирование прибрежной зоны водоемов под воздействием движения воды и гравитационных сил, удовлетворяющих основным законам сохранения.

Непрерывная математическая модель поверхностных волн от начальных возмущений. При разработке гидродинамической модели движения водной среды использована гидростатическая модель, включающая уравнения движения Навье-Стокса, неразрывности для несжимаемой жидкости, гидростатики. В рамках теории мелкой воды исходными уравнениями движения водной среды являются [10-12]:

- система уравнений Навье-Стокса:

$$u'_t + uu'_x + wu'_z = -\frac{1}{\rho}P'_x + \left(\mu u'_x\right)'_x + \left(\eta u'_z\right)'_z \quad (1)$$

$$w'_t + uw'_x + ww'_z = -\frac{1}{\rho}P'_z + \left(\mu w'_x\right)'_x + \left(\eta w'_z\right)'_z; \quad (2)$$

- уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$u'_x + w'_z = 0; \quad (3)$$

- уравнение гидростатики:

$$P = \rho g\left(z + \xi\right) \quad (4)$$

Здесь $\xi(x,t)$ − отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного состояния; P - гидростатическое давление; ρ - плотность жидкости; μ, η - составляющие коэффициента турбулентного обмена; u, w - компоненты вектора скорости; x − горизонтальная координата; z − вертикальная координата; t − время; g - ускорение свободного падения.

Система уравнений (1)-(4) дополнена следующими граничными условиями:

- на дне условие непроницаемости и трения:

$\rho\eta u'_n = \tau_b(t)$, $w = 0$, τ_b - тангенциальное напряжение на дне водоема;

- на поверхности задается подъем уровня и ветровые напряжения:

$\rho\eta u'_n = -\tau_b(t)$, $w = -\xi'$, τ_b - тангенциальное напряжение на поверхности дне водоема;

- на боковых границах условие свободного выхода:

$u'_n = 0$, $\xi'_n = 0$

Уравнение (1) с учетом (4) примет вид: $$u'_t + uu'_x + wu'_z = -g\xi'_x + \left(\mu u'_x\right)'_x + \left(\eta u'_z\right)'_z \quad (5)$$

Интегрируя по глубине $z \in [-\xi, H]$ уравнение (3), имеем: $$\xi'_t + \left(\left(H + \xi\right)u\right)'_x = 0 \quad (6)$$

Интегрируя по глубине $z \in [-\xi, H]$ уравнение (4) с учетом граничных условий, имеем:

$$\left(\left(H+\xi\right)u\right)'_t + \left(H+\xi\right)uu'_x = -g\left(H+\xi\right)\xi'_x + \left(\left(H+\xi\right)\mu u'_x\right)'_x + \frac{\tau_p}{\rho} - \frac{\tau_b}{\rho} \quad (7)$$

Пренебрегая в уравнении (7) нелинейностью, вязкостью и тангенциальными напряжениями на дне и поверхности водоема, имеем:

$$\left(\left(H+\xi\right)u\right)'_t = -gH\xi'_x \quad (8)$$

Из системы уравнений (6), (8) следует, что волны на свободной поверхности жидкости переменной глубины представляют решение задачи Коши. Таким образом, задача представляет собой уравнение колебания струны с определенными начальными условиями и выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(H(x)\frac{\partial\xi}{\partial x}\right), \quad (9)$$

где *H(x)* − глубина жидкости.

Уравнение (9) рассмотрено при следующих граничных условиях:

$$\xi(0,t) = u_1(t),\ \xi(l,t) = u_2(t) \quad (10)$$

и начальных условиях:

$$\xi(x,0) = \phi_0(x),\ \frac{\partial\xi}{\partial t}(x,0) = \phi_1(x) \quad (11)$$

В используемом уравнении колебания не присутствуют компоненты, отвечающие за вязкое трение. Данный факт ограничивает область применения исследуемой модели, что будет учтено при ее использовании.

Для получения консервативных разностных схем естественно исходить из уравнений баланса, записанных для элементарных объемов сеточной области [8; 9; 14]. Входящие в уравнения баланса интегралы и производные заменим приближенными разностными выражениями. В результате получим однородную разностную схему. Такой метод получения консервативных схем называют интегро-интерполяционным методом (методом баланса) [5; 15]. Для решения задачи (1)-(4) использованы схемы расщепления по физическим процессам [1-3].

Результаты численных экспериментов. После разработки программы было проведено тестирование ее на соответствие уже имеющимся результатам, которые были получены другими научными работами и опытным путем.

На Рисунках 1-3 приведены результаты численного моделирования в случае прямого дна $\left(H(x)=1\right)$. Слева приведена функция возвышения уровня, справа - функция скорости.

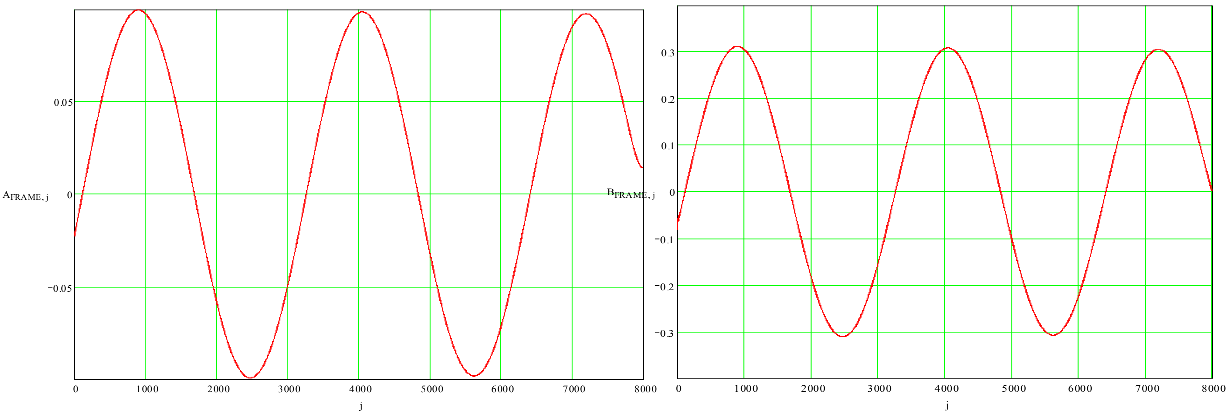

Рис. 1. *Результаты численных экспериментов на основе модели 1 (слева показана функция возвышения уровня, справа - функция скорости)*

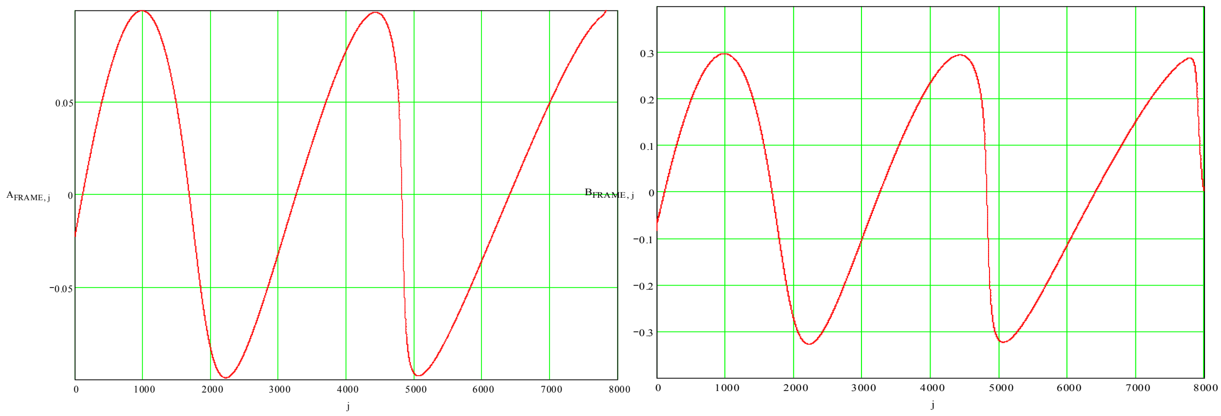

Рис. 2. *Результаты численных экспериментов на основе модели 2 (слева показана функция возвышения уровня, справа - функция скорости)*

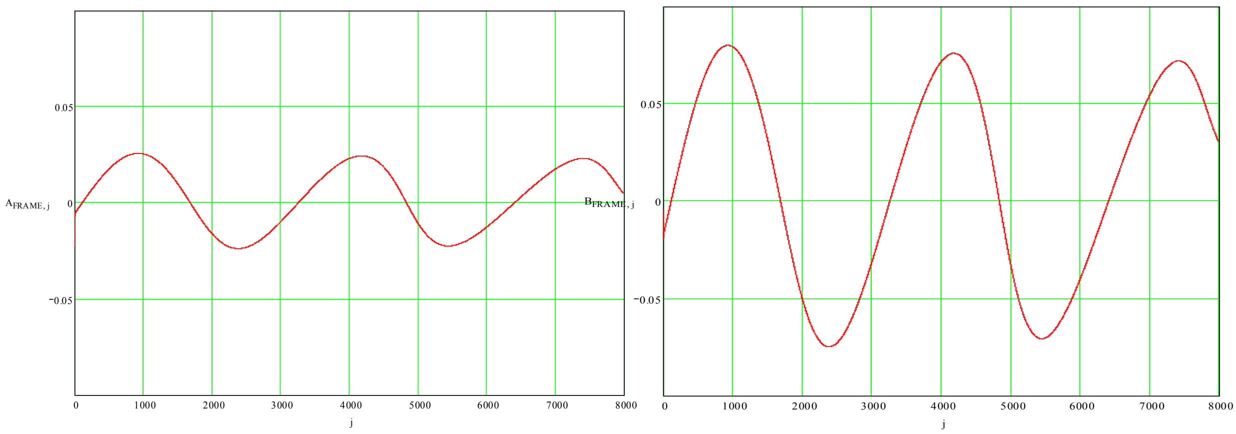

Рис. 3. *Результаты численных экспериментов на основе модели 3 (слева показана функция возвышения уровня, справа - функция скорости)*

Волновая модель 1 не описывает нелинейные гидродинамические процессы в отличие от математических моделей 2 и 3. Анализ Рисунка 1 показал, что профиль волны в процессе не меняется. Модель 3, описываемая уравнением Навье-Стокса, учитывает инертность гидродинамических процессов, в отличие от оставшихся моделей. Амплитуда функции возвышения уровня, представленная на графике 3, меньше значений амплитуд функций, представленных на Рисунках 1-2.

На Рисунке 4 приведены результаты численного моделирования в случае скошенного дна $\left(H(x)=H_0(1-kx)\right)$, глубина изменялась от 1 м до 50 см.

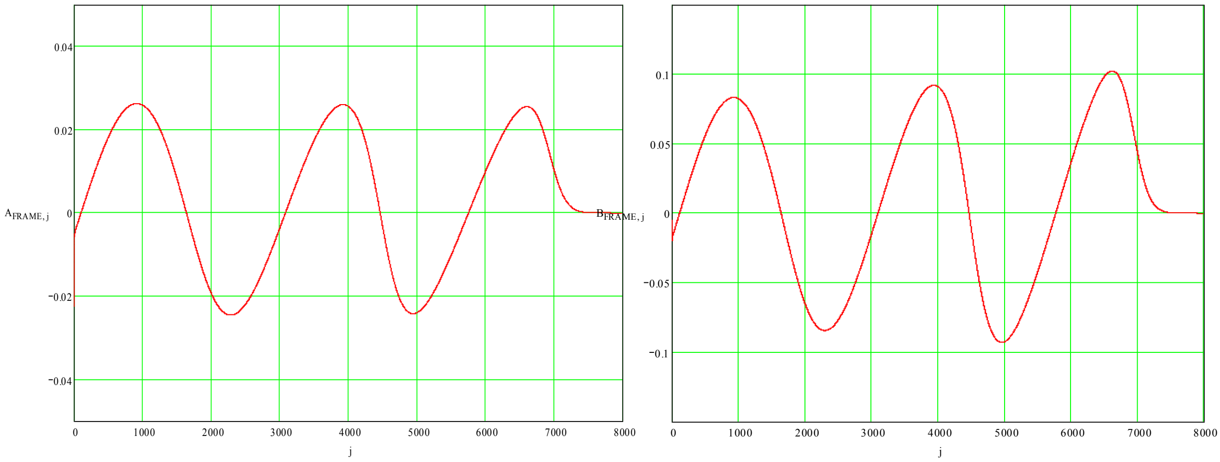

Рис. 4. *Результаты численных экспериментов на основе модели 3 (слева показана функция возвышения уровня, справа - функция скорости)*

Анализ результатов численного эксперимента позволяет сделать вывод, что при уменьшении глубины водоема возрастает скорость движения водной среды, амплитуда колебаний при этом практически не изменяется.

Выводы. Разработаны и программно реализованы следующие пространственно-одномерные непрерывные и дискретные модели описания движения водной среды: волновые модели, без учета нелинейных процессов и с учетом нелинейных процессов, гидродинамическая модель, задаваемая уравнением Навье-Стокса. На основе анализа результатов численных экспериментов показана целесообразность использования модели движения водной среды, описываемой системой уравнений Навье-Стокса.

Список литературы

1. **Алексеенко Е. В., Сидоренко Б. В., Колгунова О. В., Чистяков А. Е.** Сравнительный анализ классических и неклассических моделей гидродинамики водоемов с турбулентным обменом // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 8 (97). С 6-18.
2. **Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Щенников В. В.** Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15. № 1. С. 197-207.
3. **Дегтярева Е. Е., Чистяков А. Е.** Моделирование транспорта наносов по данным экспериментальных исследований в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 2 (127). С. 112-118.
4. **Леонтьев И. О.** Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. М.: Геос, 2001. 272 с.
5. **Проценко Е. А.** Двумерная конечно-разностная модель формирования наносов в прибрежной зоне водоема и ее программная реализация // Инженерный вестник Дона. 2010. Т. 13. № 3. С. 23-31.
6. **Проценко Е. А.** Модель и алгоритмы решения задачи о транспорте наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 8 (97). С. 71-75.
7. **Проценко Е. А.** Программная реализация одномерной математической модели транспорта наносов в прибрежной зоне водоема // Вестник Таганрогского государственного педагогического института. 2012. № 1. С. 48-55.
8. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
9. **Сухинов А. И., Тимофеева Е. Ф., Чистяков А. Е.** Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 22-32.
10. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е.** Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. Т. 13. С. 290-297.
11. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Алексеенко Е. В.** Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 3. С. 3-21.
12. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.** Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 159-167.
13. **Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.** Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 32-44.
14. **Чистяков А. Е.** Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 66-77.
15. **Чистяков А. Е.** Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 8 (97). С. 75-82.