

Коротков Анатолий Васильевич

ВОСЬМИМЕРНОЕ ПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

В работе рассматриваются вопросы применимости семимерного векторного исчисления для всех разделов теоретической физики на примере начальных разделов теории поля. Показано, что уравнения классической и релятивистской механики вытекают из уравнений восьмимерного пространства-времени индекса семь в пренебрежении координатами четырех векторов. Данная работа показывает, что многомерные соотношения лишь расширяют пространственные представления, причем они видоизменяются лишь в координатной форме.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2013/2/26.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2013. № 2 (69). С. 82-86. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/2/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

УДК 512.7

Физико-математические науки

В работе рассматриваются вопросы применимости семимерного векторного исчисления для всех разделов теоретической физики на примере начальных разделов теории поля. Показано, что уравнения классической и релятивистской механики вытекают из уравнений восьмимерного пространства-времени индекса семь в пренебрежении координатами четырех векторов. Данная работа показывает, что многомерные соотношения лишь расширяют пространственные представления, причем они видоизменяются лишь в координатной форме.

Ключевые слова и фразы: векторное исчисление; семимерное, восьмимерное пространство-время; разделы теоретической физики; электродинамика; собственное время; псевдоевклидово пространство-время.

Коротков Анатолий Васильевич, д. ф.-м. н., к.т.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

ВОСЬМИМЕРНОЕ ПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ[©]

Частица в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве-времени

В теоретической физике, в частности в механике и электродинамике, широко используется понятие четырехмерного псевдоевклидового пространства-времени индекса три, которое характеризуется тремя отрицательными пространственными компонентами квадрата интервала

$$S^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

между событиями, определяемыми совокупностью координат (ct, x, y, z) . Эти координаты рассматриваются как компоненты четырехмерного радиус-вектора $x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, r)$, квадрат длины которого определяется выражением

$$x^i x_i = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2,$$

так, что $x_i = (ct, -r)$.

По нашему мнению, представляет интерес изучение свойств восьмимерного псевдоевклидового пространства-времени индекса семь, которое характеризуется семью отрицательными пространственными компонентами квадрата интервала между событиями, определяемыми совокупностью компонент восьмимерного радиус-вектора

$$x^i = (x^0, x^1, \dots, x^7) = (ct, r),$$

квадрат длины которого определяется выражением

$$x^i x_i = (x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^7)^2,$$

так, что $x_i = (ct, -r)$.

Рассмотрим свойства восьмимерного псевдоевклидового пространства-времени, полагая квадрат интервала между событиями инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой.

Пусть $x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^7$ и $x_2^0, x_2^1, \dots, x_2^7$ - координаты двух событий в некоторой системе К. Спрашивается, существует ли также система К', в которой оба эти события происходили в одном и том же месте пространства? Введем обозначение

$$(x_2^0 - x_1^0)^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 = c^2 t_{12}^2 \text{ и } (x_2^1 - x_1^1) + \dots + (x_2^7 - x_1^7) = l_{12}^2$$

Тогда квадрат интервала между событиями в системе К $S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$ и в системе К' $S'^2_{12} = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}$, причем в силу инвариантности квадрата интервала

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}.$$

Мы хотим, чтобы в системе К' оба события произошли в одной точке, т.е. чтобы $l'^2_{12} = 0$; тогда $S^2_{12} = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12}$. Следовательно, система отсчета с требуемым свойством существует. Расстояние между точками, где произошли события в этой системе отсчета, равно

$$ct'_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}$$

Собственное время

Предположим, что мы наблюдаем из некоторой инерциальной семимерной системы отсчета К движущиеся относительно нас часы. Введем также инерциальную семимерную систему отсчета К', движущуюся относительно К со скоростью, совпадающей с семимерной скоростью V движения часов в данный момент времени.

В течение бесконечно малого промежутка времени по неподвижным часам движущиеся часы проходят расстояние

$$dt = ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^7)^2)^{1/2}$$

В системе K' , связанной с движущимися часами, последние в данный момент времени покоятся, т.е.
 $dx'^1 = dx'^2 = \dots = dx'^7 = 0$.

В силу инвариантности квадрата интервала

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dt^2 = c^2 dt'^2,$$

откуда промежуток времени, зафиксированный движущимися часами

$$dt' = \sqrt{1 - V^2 / c^2} dt.$$

Промежуток времени, показываемый движущимися часами, если по неподвижным часам пройдет время $\Delta t = t_2 - t_1$,

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - V^2 / c^2} dt$$

Очевидно, что собственное время движущегося объекта всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени в неподвижной системе. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных, и

интеграл $\frac{1}{c} \int_a^b dS$, взятый между двумя точками, имеет максимальное значение, если часы неподвижны.

Преобразование координат восьмимерного пространства-времени

Найдем формулы преобразования координат при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Искомое преобразование математически выражается как собственное вращение восьмимерной системы координат $ct, x^1, x^2, \dots, x^7$.

Всякое вращение в восьмимерном пространстве можно разложить на двадцать восемь вращений в плоскостях. Рассматривая поворот в плоскости tx^1 при неизменяемых координатах $x^2, x^3, \dots, x^7$ и квадрате интервала от точки ct, x до начала координат, получим связь между старыми и новыми координатами в этом преобразовании в виде

$$\begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ch & Sh & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Sh & Ch & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x'^7 \end{pmatrix} *$$

$$ct = ct' ch\psi + x'^1 sh\psi,$$

$$x^1 = ct' sh\psi + x'^1 ch\psi,$$

где ψ - угол поворота, причем $c^2 t'^2 - (x'^1)^2 = c^2 t^2 - (x^1)^2$. Остается определить угол ψ , который может зависеть только от относительной скорости V двух инерциальных семимерных систем отсчета.

Рассмотрим движение в системе K . Тогда $x'^1 = 0$ и, следовательно:

$$ct = ct' ch\psi,$$

$$x^1 = ct' sh\psi$$

или, разделив одно на другое:

$$\frac{x^1}{ct} = th\psi$$

Но x^1/t есть, очевидно, семимерная скорость V системы относительно K' , таким образом,

$$th\psi = \frac{V}{c},$$

отсюда

$$sh\psi = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad ch\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

В результате находим:

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x^1 = \frac{x'^1 + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x^2 = x'^2, \dots, x^7 = x'^7$$

Это искомые формулы преобразования. Они близки преобразованиям Лоренца и имеют для дальнейшего фундаментальное значение.

Формулы, выражающие $t', x'^1, x'^2, \dots, x'^7$ через $t, x^1, x^2, \dots, x^7$ получаются заменой V на $-V$. При предельном переходе $c \rightarrow \infty$ эти формулы переходят в преобразование, близкое преобразованию Галилея.

Из преобразований координат объектов в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве-времени можно оценить изменения длин и промежутков времени.

Пусть длина покоящейся в системе K линейки $\Delta x^1 = x_2^1 - x_1^1$; координаты концов линейки в системе K' в один и тот же момент времени t'

$$x_2^1 = \frac{x_2'^1 + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x_1^1 = \frac{x_1'^1 + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

так, что

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

что полностью соответствует ранее полученным результатам.

Преобразование скорости

Найдем формулы, связывающие скорость движущейся частицы в одной системе отсчета со скоростью той же частицы в другой системе. Для этого рассмотрим систему K' , движущуюся относительно системы K с семимерной скоростью V вдоль оси x^1 , тогда

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dx^1 = \frac{dx'^1 + V dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dx^2 = dx'^2, \dots, dx^7 = dx'^7.$$

Разделив на первое равенство остальные, находим:

$$v^1 = \frac{dx^1}{dt} = \frac{dx'^1 + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'^1} = \frac{v'^1 + V}{1 + \frac{V v'^1}{c^2}}$$

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt} = \frac{dx'^2 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'^1} = \frac{v'^2 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V v'^1}{c^2}},$$

...

$$v^7 = \frac{dx^7}{dt} = \frac{dx'^7 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'^1} = \frac{v'^7 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V v'^1}{c^2}}.$$

Эти формулы и определяют преобразование скоростей, представляя собой закон сложения скоростей. В предельном случае $c \rightarrow \infty$ они переходят в формулы, близкие формулам классической механики $v^1 = v'^1 + V$, $v^2 = v'^2$, ..., $v^7 = v'^7$. В частном случае движения частицы параллельно оси x^1 $v^1 = v$, $v^2 = v^3 = v^7 = 0$. Тогда $v^2 = v^3 = \dots = v^7 = 0$, а $v^1 = v'$, причем,

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V v'}{c^2}}.$$

Легко убедиться в том, что сумма двух скоростей, меньших или равных скорости c , есть снова скорость, не большая скорости c .

Выберем оси так, чтобы скорость частицы в данный момент лежала в плоскости $x^1 x^2$, тогда скорость частицы в системе K имеет компоненты

$v^1 = v \cos Q$, $v^2 = v \sin Q$, а в системе K' имеем $v'^1 = v' \cos Q'$, $v'^2 = v' \sin Q'$ (v, v' и Q, Q' - абсолютные величины скоростей и углы, образованные семимерными скоростями с осями x^1 и x'^1 соответственно в системах K и K'). Тогда находим

$$\operatorname{tg} Q = \frac{v^2}{v^1} = \frac{v'^2 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{v'^1 + V} = \frac{v' \sin Q' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{v' \cos Q' + V}$$

Эта формула определяет изменение направления скорости при переходе от одной системы отсчета к другой.

Рассмотрим изменение направления скорости частиц, движущихся со скоростью c (явление абберации). В этом случае $v = v' = c$ и

$$\operatorname{tg} Q = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\cos Q' + V/c} \sin Q'$$

В случае $V \ll c$ находим с точностью до членов порядка V/c

$$\operatorname{tg} Q = \operatorname{tg} Q' \left(1 - \frac{V}{c \cos Q'} \right)$$

Вводя угол $\Delta Q = Q' - Q$ (абберации), находим с той же точностью:

$$\Delta Q = \frac{V}{c} \sin Q'$$

т.е. элементарную формулу для абберации света.

Энергия и импульс свободной частицы

Для вывода уравнения движения частиц будем исходить из принципа наименьшего действия. Начнем с нахождения интеграла действия для свободной частицы.

Интеграл действия для свободной частицы должен быть инвариантом относительно преобразований координат и поэтому должен быть взят от скаляра, причем под интегралом должны стоять дифференциалы в первой степени. Таким скаляром для свободной частицы является величина $\text{const} \cdot dS = Mc dS$, где M - некоторая постоянная, так что

$$S_m = -Mc \int dS,$$

причем интеграл $\int dS$ имеет максимальное значение в той системе отсчета, где часы неподвижны, следовательно:

$$S_m = -Mc \int dS = -Mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - V^2 / c^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

где $L = -Mc^2 \sqrt{1 - V^2 / c^2}$ - функция Лагранжа.

Разложим ее в ряд по степеням V/c и, опустив члены высших порядков, получим:

$$L = -Mc^2 + \frac{MV^2}{2}$$

Постоянный член в функции Лагранжа может быть опущен. После этого мы вернемся к классическому выражению $L = MV^2/2$. В то же время выясняется смысл постоянной M , которая как производная $\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{V}$, т.е.

$$p = \frac{MV}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$

При малых скоростях ($V \ll c$) это выражение переходит в классическое $\mathbf{p} = M\mathbf{V}$.

Производная от импульса по времени есть сила, действующая на частицу. Пусть скорость частицы изменяется только по направлению, т.е. сила направлена перпендикулярно к скорости, тогда

$$\frac{dp}{dt} = \frac{M}{\sqrt{(1 - V^2 / c^2)^3}} \frac{dV}{dt}$$

Энергия частицы определяется уравнением $\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial V} V - L$, т.е.

$$\varepsilon = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$

Здесь и далее скалярные произведения даны без скобок.

Энергия свободной частицы не обращается в нуль при $V=0$, а остается конечной величиной, равной $\varepsilon = Mc^2$.

При малых скоростях ($V \ll c$) имеем, разлагая по степеням V/c ,

$$\varepsilon = Mc^2 + \frac{MV^2}{2},$$

т.е., за вычетом энергии покоя, классическое выражение для кинетической энергии частицы.

Из выражения для энергии и импульса частицы найдем следующие соотношения между ними

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2 = (Mc)^2$$

$$\text{и } p = \frac{\varepsilon V}{c^2}$$

При $V=c$ импульс и энергия частицы обращаются в бесконечность, так что частица с отличной от нуля массой не может двигаться со скоростями, равными скоростям света. В случае $M=0$ при этом имеем

$$p = \frac{\varepsilon}{c}$$

Восьмерный импульс

Уточним закон преобразования энергии и импульса частицы при переходе от одной системы отсчета к другой.

Восьмерной скоростью при этом является 8-вектор

$$U^i = \frac{dx^i}{dS} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \frac{dx^i}{cdt}$$

с компонентами

$$U^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \frac{V}{c\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \right)$$

так, что при $dx^i dx_i = dS^2$ находим $U^i U_i = 1$, причем восьмимерным импульсом является 8-вектор

$$p^i = McU^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, p \right)$$

Таким образом, энергия и импульс частицы в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве-времени индекса семь являются компонентами 8-вектора, что дает формулы преобразования этих величин в виде

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' + Vp'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p^1 = \frac{p'^1 + \frac{V}{c^2}\varepsilon'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p^2 = p'^2, \dots, p^7 = p'^7$$

Для квадрата 8-импульса свободной частицы в результате имеем

$$p^i p_i = M^2 c^2$$

Очевидно, что уравнения классической и релятивистской механики вытекают из уравнений механики восьмимерного пространства-времени индекса семь в пренебрежении четырьмя координатами векторов.

Отметим, что трехмерная векторная алгебра позволила получить теоретическую физику, использующую её как математическую базу во всех разделах, в том числе для построения частной теории относительности. Трехмерная векторная алгебра явилась основой для построения векторных алгебр размерности (1, 3), 7, 15, 31, 63, 127, ..., 2047, ..., $2^n - 1$, ... Данная работа является примером построения одного из многочисленных разделов теоретической физики (многомерной теоретической физики). Она показывает, что многомерные соотношения расширяют пространственные представления, причем они видоизменяются лишь в координатной форме. В векторной записи оба представления, как показано выше, на базе трехмерного пространства и четырехмерного пространства-времени полностью совпадают с семимерным векторным вариантом. Специалисты, владеющие трехмерным векторным исчислением, без труда освоят многомерное векторное исчисление во всех разделах теоретической физики. В векторной форме записи семимерное исчисление полностью воспроизводит законы трехмерного векторного исчисления. Отличия возникают лишь для взаимосвязи четырех и большего числа векторов, когда трехмерное исчисление уже не действует. При этом появляется значительное число многомерных инвариантных скалярных и векторных величин, характеризующих новые законы сохранения, отсутствующие в трёхмерном исчислении.

Список литературы

1. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набл, 1996. 244 с.
2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Краткий курс теоретической физики. М.: Наука, 1969. Кн. 1. Механика. Электродинамика. 359 с.

УДК 512.7

Физико-математические науки

В работе рассмотрены вопросы вращения пятнадцатимерной ортогональной системы координат как ортогонального линейного преобразования в пятнадцатимерном евклидовом векторном пространстве. Такое преобразование характеризуется матрицей пятнадцатого порядка, которой соответствуют 225 элементов. Векторное произведение двух векторов позволяет получить матрицу вращения с 15 независимыми параметрами. Рассмотрены матрицы преобразования вращения, параметры (Эйлера), матрицы вращений вокруг координат, операторы момента импульса.

Ключевые слова и фразы: пятнадцатимерная ортогональная система координат; евклидовое линейное векторное пространство; матрицы вращения; независимые параметры (Эйлера); операторы момента импульса.

Коротков Анатолий Васильевич, д. ф.-м. н., к.т.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

ВРАЩЕНИЯ В ПЯТНАДЦАТИМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ[©]

$$\left\| \begin{array}{ccc} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{array} \right\|$$