

Коротков Анатолий Васильевич

ВРАЩЕНИЯ В ПЯТНАДЦАТИМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ

В работе рассмотрены вопросы вращения пятнадцатимерной ортогональной системы координат как ортогонального линейного преобразования в пятнадцатимерном евклидовом векторном пространстве. Такое преобразование характеризуется матрицей пятнадцатого порядка, которой соответствуют 225 элементов. Векторное произведение двух векторов позволяет получить матрицу вращения с 15 независимыми параметрами. Рассмотрены матрицы преобразования вращения, параметры (Эйлера), матрицы вращений вокруг координат, операторы момента импульса.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2013/2/27.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2013. № 2 (69). С. 86-96. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/2/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

так, что при $dx^i dx_i = dS^2$ находим $U^i U_i = 1$, причем восьмимерным импульсом является 8-вектор

$$p^i = McU^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, p \right)$$

Таким образом, энергия и импульс частицы в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве-времени индекса семь являются компонентами 8-вектора, что дает формулы преобразования этих величин в виде

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' + Vp'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p^1 = \frac{p'^1 + \frac{V}{c^2}\varepsilon'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p^2 = p'^2, \dots, p^7 = p'^7$$

Для квадрата 8-импульса свободной частицы в результате имеем

$$p^i p_i = M^2 c^2$$

Очевидно, что уравнения классической и релятивистской механики вытекают из уравнений механики восьмимерного пространства-времени индекса семь в пренебрежении четырьмя координатами векторов.

Отметим, что трехмерная векторная алгебра позволила получить теоретическую физику, использующую её как математическую базу во всех разделах, в том числе для построения частной теории относительности. Трехмерная векторная алгебра явилась основой для построения векторных алгебр размерности (1, 3), 7, 15, 31, 63, 127, ..., 2047, ..., $2^n - 1$, ... Данная работа является примером построения одного из многочисленных разделов теоретической физики (многомерной теоретической физики). Она показывает, что многомерные соотношения расширяют пространственные представления, причем они видоизменяются лишь в координатной форме. В векторной записи оба представления, как показано выше, на базе трехмерного пространства и четырехмерного пространства-времени полностью совпадают с семимерным векторным вариантом. Специалисты, владеющие трехмерным векторным исчислением, без труда освоят многомерное векторное исчисление во всех разделах теоретической физики. В векторной форме записи семимерное исчисление полностью воспроизводит законы трехмерного векторного исчисления. Отличия возникают лишь для взаимосвязи четырех и большего числа векторов, когда трехмерное исчисление уже не действует. При этом появляется значительное число многомерных инвариантных скалярных и векторных величин, характеризующих новые законы сохранения, отсутствующие в трёхмерном исчислении.

Список литературы

1. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набл, 1996. 244 с.
2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Краткий курс теоретической физики. М.: Наука, 1969. Кн. 1. Механика. Электродинамика. 359 с.

УДК 512.7

Физико-математические науки

В работе рассмотрены вопросы вращения пятнадцатимерной ортогональной системы координат как ортогонального линейного преобразования в пятнадцатимерном евклидовом векторном пространстве. Такое преобразование характеризуется матрицей пятнадцатого порядка, которой соответствуют 225 элементов. Векторное произведение двух векторов позволяет получить матрицу вращения с 15 независимыми параметрами. Рассмотрены матрицы преобразования вращения, параметры (Эйлера), матрицы вращений вокруг координат, операторы момента импульса.

Ключевые слова и фразы: пятнадцатимерная ортогональная система координат; евклидовое линейное векторное пространство; матрицы вращения; независимые параметры (Эйлера); операторы момента импульса.

Коротков Анатолий Васильевич, д. ф.-м. н., к.т.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

ВРАЩЕНИЯ В ПЯТНАДАТИМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ[©]

$$\left\| \begin{array}{ccc} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{array} \right\|$$

Каждое ортогональное линейное преобразование

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} (\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I}) \quad (1)$$

в пятнадцатимерной векторной алгебре сохраняет модули векторов и углы между векторами. Такое преобразование является (собственным) вращением, если оно сохраняет также векторное произведение двух векторов и $\det\|\mathbf{A}\|=1$. Преобразование $\det\|\mathbf{A}\|=-1$ является несобственным вращением или вращением с отражением.

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{15}$ - любой ортогональный базис, и пусть

$$\mathbf{x}' = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2 + \dots + x_{15}'\mathbf{e}_{15}, \quad \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_{15}\mathbf{e}_{15}$$

Каждое преобразование (1) задается формулами

$$x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,15}x_{15}$$

$$x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,15}x_{15}$$

...

$$x_{15}' = a_{15,1}x_1 + a_{15,2}x_2 + \dots + a_{15,15}x_{15}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

где для собственных вращений

$$\det(\mathbf{A}) = \det\|a_{i,k}\| = 1.$$

Так как рассматриваемая система координат является ортогональной, действительная матрица $\mathbf{A} = \|a_{i,k}\|$, описывающая каждое вращение, ортогональна ($\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I}$), т.е.

$$\sum_{j=1}^{15} a_{ij}a_{kj} = \sum_{j=1}^{15} a_{ij}a_{jk} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, 15)$$

и каждый коэффициент a_{ik} равен алгебраическому дополнению элемента a_{ki} в определителе $\det\|a_{i,k}\|$. Любые 105 из коэффициентов a_{ik} матрицы ортогональных преобразований определяют все 225, коэффициент a_{ik} есть косинус угла между базисным вектором $\mathbf{e}_i$ и повернутым базисным вектором

$$\mathbf{e}_k' = \mathbf{A}\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{15} a_{kj}\mathbf{e}_j$$

$$a_{ik} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k') = (\mathbf{e}_i, (\mathbf{A}\mathbf{e}_k))$$

Сохранение векторного произведения двух векторов при преобразовании вращения требует 90 дополнительных условий, так что лишь 15 из коэффициентов независимы и определяют все остальные.

Преобразование вращения поворачивает радиус-вектор $\mathbf{x}$ каждой точки 15-мерного евклидова пространства на угол δ вокруг направленной оси вращения, точки которой инварианты. Угол поворота δ и направляющие косинусы $c_1, c_2, \dots, c_{15}$ положительной оси вращения определяются формулами:

$$\cos \delta = \frac{\text{Tr}(\mathbf{A}) - 1}{14} = \frac{a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{15,15} - 1}{14}$$

$$c_1 = - \frac{(a_{2,3} - a_{3,2} + a_{4,5} - a_{5,4} + a_{7,6} - a_{6,7} + a_{8,9} - a_{9,8} + a_{11,10} - a_{10,11} + a_{13,12} - a_{12,13} + a_{14,15} - a_{15,14})}{14 \sin \delta}$$

$$c_2 = - \frac{(a_{4,6} - a_{6,4} + a_{5,7} - a_{7,5} + a_{3,1} - a_{1,3} + a_{8,10} - a_{10,8} + a_{14,12} - a_{12,14} + a_{15,13} - a_{13,15} + a_{11,9} - a_{9,11})}{14 \sin \delta}$$

$$c_3 = - \frac{(a_{6,5} - a_{5,6} + a_{1,2} - a_{2,1} + a_{4,7} - a_{7,4} + a_{8,11} - a_{11,8} + a_{13,14} - a_{14,13} + a_{10,9} - a_{9,10} + a_{12,15} - a_{15,12})}{14 \sin \delta}$$

$$c_4 = - \frac{(a_{5,1} - a_{1,5} + a_{7,3} - a_{3,7} + a_{6,2} - a_{2,6} + a_{8,12} - a_{12,8} + a_{9,13} - a_{13,9} + a_{11,15} - a_{15,11} + a_{10,14} - a_{14,10})}{14 \sin \delta}$$

$$c_5 = - \frac{(a_{7,2} - a_{2,7} + a_{3,6} - a_{6,3} + a_{1,4} - a_{4,1} + a_{8,13} - a_{13,8} + a_{10,15} - a_{15,10} + a_{14,11} - a_{11,14} + a_{12,9} - a_{9,12})}{14 \sin \delta}$$

$$c_6 = - \frac{(a_{1,7} - a_{7,1} + a_{2,4} - a_{4,2} + a_{5,3} - a_{3,5} + a_{8,14} - a_{14,8} + a_{15,9} - a_{9,15} + a_{12,10} - a_{10,12} + a_{11,13} - a_{13,11})}{14 \sin \delta}$$

$$c_7 = - \frac{(a_{3,4} - a_{4,3} + a_{6,1} - a_{1,6} + a_{2,5} - a_{5,2} + a_{8,15} - a_{15,8} + a_{12,11} - a_{11,12} + a_{9,14} - a_{14,9} + a_{13,10} - a_{10,13})}{14 \sin \delta}$$

$$c_8 = - \frac{(a_{9,1} - a_{1,9} + a_{10,2} - a_{2,10} + a_{11,3} - a_{3,11} + a_{12,4} - a_{4,12} + a_{13,5} - a_{5,13} + a_{14,6} - a_{6,14} + a_{15,7} - a_{7,15})}{14 \sin \delta}$$

$$c_9 = - \frac{(a_{11,2} - a_{2,11} + a_{13,4} - a_{4,13} + a_{14,7} - a_{7,14} + a_{1,8} - a_{8,1} + a_{3,10} - a_{10,3} + a_{5,12} - a_{12,5} + a_{6,12} - a_{15,6})}{14 \sin \delta}$$

$$c_{10} = - \frac{(a_{14,4} - a_{4,14} + a_{15,5} - a_{5,15} + a_{9,3} - a_{3,9} + a_{2,8} - a_{8,2} + a_{6,12} - a_{12,6} + a_{7,13} - a_{13,7} + a_{1,11} - a_{11,1})}{14 \sin \delta}$$

$$c_{11} = - \frac{(a_{13,6} - a_{6,13} + a_{10,1} - a_{1,10} + a_{15,4} - a_{4,15} + a_{3,8} - a_{8,3} + a_{5,14} - a_{14,5} + a_{2,9} - a_{9,2} + a_{7,12} - a_{12,7})}{14 \sin \delta}$$

$$c_{12} = -\frac{(a_{9,5}-a_{5,9}+a_{11,7}-a_{7,11}+a_{10,6}-a_{6,10}+a_{4,8}-a_{8,4}+a_{1,13}-a_{13,1}+a_{3,15}-a_{15,3}+a_{2,14}-a_{14,2})}{14\sin\delta}$$

$$c_{13} = -\frac{(a_{10,7}-a_{7,10}+a_{14,3}-a_{3,14}+a_{12,1}-a_{1,12}+a_{5,8}-a_{8,5}+a_{2,15}-a_{15,2}+a_{6,11}-a_{11,6}+a_{4,9}-a_{9,4})}{14\sin\delta}$$

$$c_{14} = -\frac{(a_{15,1}-a_{1,15}+a_{12,2}-a_{2,12}+a_{11,5}-a_{5,11}+a_{6,8}-a_{8,6}+a_{7,9}-a_{9,7}+a_{4,10}-a_{10,4}+a_{3,13}-a_{13,3})}{14\sin\delta}$$

$$c_{15} = -\frac{(a_{12,3}-a_{3,12}+a_{9,6}-a_{6,9}+a_{13,2}-a_{2,13}+a_{7,8}-a_{8,7}+a_{4,11}-a_{11,4}+a_{1,14}-a_{14,1}+a_{5,10}-a_{10,5})}{14\sin\delta}$$

$$\text{т.е. } c_l = -\frac{\sum_{i,k=1}^{15} \sigma_{ik}^l a_{ik}}{6\sin\delta}, \quad (i,k,l=1,2,\dots,15)$$

где σ_{ik}^l - тензор структурных констант пятнадцатимерной векторной алгебры, принимающий значения ± 1 или 0.

Знак угла δ , либо направление оси вращения может выбираться произвольно. Направление положительной оси вращения совпадает с направлением собственного вектора $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \dots + c_{15}\mathbf{e}_{15}$, соответствующего собственному значению +1 оператора $\mathbf{A}$ и находимого путем приведения матрицы $\mathbf{A}$ к диагональному виду. Остальные собственные значения оператора $\mathbf{A}$ кратны; ими являются

$$\cos\delta \pm i\sin\delta = e^{\pm i\delta}, \text{ так что } T_r(A) = 1 + 14\cos\delta \text{ и } \det(A) = 1$$

Матрица преобразования $\mathbf{A}$, соответствующая данному вращению, описываемому числами $c_1, c_2, \dots, c_{15}$, есть

A=cosI+(1-cos)*														
c_1c_1	c_1c_2	c_1c_3	c_1c_4	c_1c_5	c_1c_6	c_1c_7	c_1c_8	c_1c_9	c_1c_{10}	c_1c_{11}	c_1c_{12}	c_1c_{13}	c_1c_{14}	c_1c_{15}
c_2c_1	c_2c_2	c_2c_3	c_2c_4	c_2c_5	c_2c_6	c_2c_7	c_2c_8	c_2c_9	c_2c_{10}	c_2c_{11}	c_2c_{12}	c_2c_{13}	c_2c_{14}	c_2c_{15}
c_3c_1	c_3c_2	c_3c_3	c_3c_4	c_3c_5	c_3c_6	c_3c_7	c_3c_8	c_3c_9	c_3c_{10}	c_3c_{11}	c_3c_{12}	c_3c_{13}	c_3c_{14}	c_3c_{15}
c_4c_1	c_4c_2	c_4c_3	c_4c_4	c_4c_5	c_4c_6	c_4c_7	c_4c_8	c_4c_9	c_4c_{10}	c_4c_{11}	c_4c_{12}	c_4c_{13}	c_4c_{14}	c_4c_{15}
c_5c_1	c_5c_2	c_5c_3	c_5c_4	c_5c_5	c_5c_6	c_5c_7	c_5c_8	c_5c_9	c_5c_{10}	c_5c_{11}	c_5c_{12}	c_5c_{13}	c_5c_{14}	c_5c_{15}
c_6c_1	c_6c_2	c_6c_3	c_6c_4	c_6c_5	c_6c_6	c_6c_7	c_6c_8	c_6c_9	c_6c_{10}	c_6c_{11}	c_6c_{12}	c_6c_{13}	c_6c_{14}	c_6c_{15}
c_7c_1	c_7c_2	c_7c_3	c_7c_4	c_7c_5	c_7c_6	c_7c_7	c_7c_8	c_7c_9	c_7c_{10}	c_7c_{11}	c_7c_{12}	c_7c_{13}	c_7c_{14}	c_7c_{15}
c_8c_1	c_8c_2	c_8c_3	c_8c_4	c_8c_5	c_8c_6	c_8c_7	c_8c_8	c_8c_9	c_8c_{10}	c_8c_{11}	c_8c_{12}	c_8c_{13}	c_8c_{14}	c_8c_{15}
c_9c_1	c_9c_2	c_9c_3	c_9c_4	c_9c_5	c_9c_6	c_9c_7	c_9c_8	c_9c_9	c_9c_{10}	c_9c_{11}	c_9c_{12}	c_9c_{13}	c_9c_{14}	c_9c_{15}
$c_{10}c_1$	$c_{10}c_2$	$c_{10}c_3$	$c_{10}c_4$	$c_{10}c_5$	$c_{10}c_6$	$c_{10}c_7$	$c_{10}c_8$	$c_{10}c_9$	$c_{10}c_{10}$	$c_{10}c_{11}$	$c_{10}c_{12}$	$c_{10}c_{13}$	$c_{10}c_{14}$	$c_{10}c_{15}$
$c_{11}c_1$	$c_{11}c_2$	$c_{11}c_3$	$c_{11}c_4$	$c_{11}c_5$	$c_{11}c_6$	$c_{11}c_7$	$c_{11}c_8$	$c_{11}c_9$	$c_{11}c_{10}$	$c_{11}c_{11}$	$c_{11}c_{12}$	$c_{11}c_{13}$	$c_{11}c_{14}$	$c_{11}c_{15}$
$c_{12}c_1$	$c_{12}c_2$	$c_{12}c_3$	$c_{12}c_4$	$c_{12}c_5$	$c_{12}c_6$	$c_{12}c_7$	$c_{12}c_8$	$c_{12}c_9$	$c_{12}c_{10}$	$c_{12}c_{11}$	$c_{12}c_{12}$	$c_{12}c_{13}$	$c_{12}c_{14}$	$c_{12}c_{15}$
$c_{13}c_1$	$c_{13}c_2$	$c_{13}c_3$	$c_{13}c_4$	$c_{13}c_5$	$c_{13}c_6$	$c_{13}c_7$	$c_{13}c_8$	$c_{13}c_9$	$c_{13}c_{10}$	$c_{13}c_{11}$	$c_{13}c_{12}$	$c_{13}c_{13}$	$c_{13}c_{14}$	$c_{13}c_{15}$
$c_{14}c_1$	$c_{14}c_2$	$c_{14}c_3$	$c_{14}c_4$	$c_{14}c_5$	$c_{14}c_6$	$c_{14}c_7$	$c_{14}c_8$	$c_{14}c_9$	$c_{14}c_{10}$	$c_{14}c_{11}$	$c_{14}c_{12}$	$c_{14}c_{13}$	$c_{14}c_{14}$	$c_{14}c_{15}$
$c_{15}c_1$	$c_{15}c_2$	$c_{15}c_3$	$c_{15}c_4$	$c_{15}c_5$	$c_{15}c_6$	$c_{15}c_7$	$c_{15}c_8$	$c_{15}c_9$	$c_{15}c_{10}$	$c_{15}c_{11}$	$c_{15}c_{12}$	$c_{15}c_{13}$	$c_{15}c_{14}$	$c_{15}c_{15}$
+sin δ (2)														
0	-c ₃	c ₂	-c ₅	c ₄	c ₇	-c ₆	-c ₉	c ₈	c ₁₁	-c ₁₀	c ₁₃	-c ₁₂	-c ₁₅	c ₁₄
c ₃	0	-c ₁	-c ₆	-c ₇	c ₄	c ₅	-c ₁₀	-c ₁₁	c ₈	c ₉	c ₁₄	c ₁₅	-c ₁₂	-c ₁₃
-c ₂	c ₁	0	-c ₇	c ₆	-c ₅	c ₄	-c ₁₁	c ₁₀	-c ₉	c ₈	c ₁₅	-c ₁₄	c ₁₃	-c ₁₂
c ₅	c ₆	c ₇	0	-c ₁	-c ₂	-c ₃	-c ₁₂	-c ₁₃	-c ₁₄	-c ₁₅	c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁
-c ₄	c ₇	-c ₆	c ₁	0	c ₃	-c ₂	-c ₁₃	c ₁₂	-c ₁₅	c ₁₄	-c ₉	c ₈	-c ₁₁	c ₁₀
-c ₇	-c ₄	c ₅	c ₂	-c ₃	0	c ₁	-c ₁₄	c ₁₅	c ₁₂	-c ₁₃	-c ₁₀	c ₁₁	c ₈	-c ₉
c ₆	-c ₅	-c ₄	c ₃	c ₂	-c ₁	0	-c ₁₅	-c ₁₄	c ₁₃	c ₁₂	-c ₁₁	-c ₁₀	c ₉	c ₈
c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₁₂	c ₁₃	c ₁₄	c ₁₅	0	-c ₁	-c ₂	-c ₃	-c ₄	-c ₅	-c ₆	-c ₇
-c ₈	c ₁₁	-c ₁₀	c ₁₃	-c ₁₂	-c ₁₅	c ₁₄	c ₁	0	c ₃	-c ₂	c ₅	-c ₄	-c ₇	c ₆
-c ₁₁	-c ₈	c ₉	c ₁₄	c ₁₅	-c ₁₂	-c ₁₃	c ₂	-c ₃	0	c ₁	c ₆	c ₇	-c ₄	-c ₅
c ₁₀	-c ₉	-c ₈	c ₁₅	-c ₁₄	c ₁₃	-c ₁₂	c ₃	c ₂	-c ₁	0	c ₇	-c ₆	c ₅	-c ₄
-c ₁₃	-c ₁₄	-c ₁₅	-c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₄	-c ₅	-c ₆	-c ₇	0	c ₁	c ₂	c ₃
c ₁₂	-c ₁₅	c ₁₄	-c ₉	-c ₈	-c ₁₁	c ₁₀	c ₅	c ₄	-c ₇	c ₆	-c ₁	0	-c ₃	c ₂
c ₁₅	c ₁₂	-c ₁₃	-c ₁₀	c ₁₁	-c ₈	-c ₉	c ₆	c ₇	c ₄	-c ₅	-c ₂	c ₃	0	-c ₁
-c ₁₄	c ₁₃	c ₁₂	-c ₁₁	-c ₁₀	c ₉	-c ₈	c ₇	-c ₆	c ₅	c ₄	-c ₃	-c ₂	c ₁	0

16 симметричных параметров (Эйлера)

$$y_0 = \cos \frac{\delta}{2}, \quad y_1 = c_1 \sin \frac{\delta}{2}, \quad y_2 = c_2 \sin \frac{\delta}{2}, \dots, y_{15} = c_{15} \sin \frac{\delta}{2}, \quad (y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_{15}^2 = 1)$$

однозначно определяют вращение, так как из равенства (2) следует

$$\mathbf{A} = -\mathbf{I} + 2\mathbf{B},$$

где $\mathbf{I}$ - единичная матрица, а

$$\mathbf{B} = b_i b_j \pm b_k b_0$$

также определен тензором структурных констант.

Параметры $b_0, b_1, \dots, b_{15}$ и $-b_0, -b_1, \dots, -b_{15}$ представляют одно и то же вращение.

$$B=b_i b_j \pm b_k b_0 =$$

1*1+0*0	1*2-3*0	1*3+2*0	1*4-5*0	1*5+4*0	1*6+7*0	1*7-6*0	1*8-9*0	1*9+8*0	1*10+11*0	1*11-10*0	1*12+13*0	1*13-12*0	1*14-15*0	1*15+14*0
2*1+3*0	2*2+0*0	2*3-1*0	2*4-6*0	2*5-7*0	2*6+4*0	2*7+5*0	2*8-10*0	2*9-11*0	2*10+8*0	2*11+9*0	2*12+14*0	2*13+15*0	2*14-12*0	2*15-13*0
3*1-2*0	3*2+1*0	3*3+0*0	3*4-7*0	3*5+6*0	3*6-5*0	3*7+4*0	3*8-11*0	3*9+10*0	3*10-9*0	3*11+8*0	3*12+15*0	3*13-14*0	3*14+13*0	3*15-12*0
4*1+5*0	4*2+6*0	4*3+7*0	4*4+0*0	4*5-1*0	4*6-2*0	4*7-3*0	4*8-12*0	4*9-13*0	4*10-14*0	4*11-15*0	4*12+8*0	4*13+9*0	4*14+10*0	4*15+11*0
5*1-4*0	5*2+7*0	5*3-6*0	5*4+1*0	5*5+0*0	5*6+3*0	5*7-2*0	5*8-13*0	5*9+12*0	5*10-15*0	5*11+14*0	5*12-9*0	5*13+8*0	5*14-11*0	5*15+10*0
6*1-7*0	6*2-4*0	6*3+5*0	6*4+2*0	6*5-3*0	6*6+0*0	6*7+1*0	6*8-14*0	6*9+15*0	6*10+12*0	6*11-13*0	6*12-10*0	6*13+11*0	6*14+8*0	6*15-9*0
7*1+6*0	7*2-5*0	7*3-4*0	7*4+3*0	7*5+2*0	7*6-1*0	7*7+0*0	7*8-15*0	7*9-14*0	7*10+13*0	7*11+12*0	7*12-11*0	7*13-10*0	7*14+9*0	7*15+8*0
8*1+9*0	8*2+10*0	8*3+11*0	8*4+12*0	8*5+13*0	8*6+14*0	8*7+15*0	8*8+0*0	8*9-1*0	8*10-2*0	8*11-3*0	8*12-4*0	8*13-5*0	8*14-6*0	8*15-7*0
9*1-8*0	9*2+11*0	9*3-10*0	9*4+13*0	9*5-12*0	9*6-15*0	9*7+14*0	9*8+1*0	9*9+0*0	9*10+3*0	9*11-2*0	9*12+5*0	9*13-4*0	9*14-7*0	9*15+6*0
10*1-11*0	10*2-8*0	10*3+9*0	10*4+14*0	10*5+15*0	10*6-12*0	10*7-13*0	10*8+2*0	10*9-3*0	10*10+0*0	10*11+1*0	10*12+6*0	10*13+7*0	10*14-4*0	10*15-5*0
11*1+10*0	11*2-9*0	11*3-8*0	11*4+15*0	11*5-14*0	11*6+13*0	11*7-12*0	11*8+3*0	11*9+2*0	11*10-1*0	11*11+0*0	11*12+7*0	11*13-6*0	11*14+5*0	11*15-4*0
12*1-13*0	12*2-14*0	12*3-15*0	12*4-8*0	12*5+9*0	12*6+10*0	12*7+11*0	12*8+4*0	12*9-5*0	12*10-6*0	12*11-7*0	12*12+0*0	12*13+1*0	12*14+2*0	12*15+3*0
13*1+12*0	13*2-15*0	13*3+14*0	13*4-9*0	13*5-8*0	13*6-11*0	13*7+10*0	13*8+5*0	13*9+4*0	13*10-7*0	13*11+6*0	13*12-1*0	13*13+0*0	13*14-3*0	13*15+2*0
14*1+15*0	14*2+12*0	14*3-13*0	14*4-10*0	14*5+11*0	14*6-8*0	14*7-9*0	14*8+6*0	14*9+7*0	14*10+4*0	14*11-5*0	14*12-2*0	14*13+3*0	14*14+0*0	14*15-1*0
15*1-14*0	15*2+13*0	15*3+12*0	15*4-11*0	15*5-10*0	15*6+9*0	15*7-8*0	15*8+7*0	15*9-6*0	15*10+5*0	15*11+4*0	15*12-3*0	15*13-2*0	15*14+1*0	15*15+0*0

0	-c ₃	c ₂	-c ₅	c ₄	c ₇	-c ₆	-c ₉	c ₈	c ₁₁	-c ₁₀	c ₁₃	-c ₁₂	-c ₁₅	c ₁₄
c ₃	0	-c ₁	-c ₆	-c ₇	c ₄	c ₅	-c ₁₀	-c ₁₁	c ₈	c ₉	c ₁₄	c ₁₅	-c ₁₂	-c ₁₃
-c ₂	c ₁	0	-c ₇	c ₆	-c ₅	c ₄	-c ₁₁	c ₁₀	-c ₉	c ₈	c ₁₅	-c ₁₄	c ₁₃	-c ₁₂
c ₅	c ₆	c ₇	0	-c ₁	-c ₂	-c ₃	-c ₁₂	-c ₁₃	-c ₁₄	-c ₁₅	c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁
-c ₄	c ₇	-c ₆	c ₁	0	c ₃	-c ₂	-c ₁₃	c ₁₂	-c ₁₅	c ₁₄	-c ₉	c ₈	-c ₁₁	c ₁₀
-c ₇	-c ₄	c ₅	c ₂	-c ₃	0	c ₁	-c ₁₄	c ₁₅	c ₁₂	-c ₁₃	-c ₁₀	c ₁₁	c ₈	-c ₉
c ₆	-c ₅	-c ₄	c ₃	c ₂	-c ₁	0	-c ₁₅	-c ₁₄	c ₁₃	c ₁₂	-c ₁₁	-c ₁₀	c ₉	c ₈
c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₁₂	c ₁₃	c ₁₄	c ₁₅	0	-c ₁	-c ₂	-c ₃	-c ₄	-c ₅	-c ₆	-c ₇
-c ₈	c ₁₁	-c ₁₀	c ₁₃	-c ₁₂	-c ₁₅	c ₁₄	c ₁	0	c ₃	-c ₂	c ₅	-c ₄	-c ₇	c ₆
-c ₁₁	-c ₈	c ₉	c ₁₄	c ₁₅	-c ₁₂	-c ₁₃	c ₂	-c ₃	0	c ₁	c ₆	c ₇	-c ₄	-c ₅
c ₁₀	-c ₉	-c ₈	c ₁₅	-c ₁₄	c ₁₃	-c ₁₂	c ₃	c ₂	-c ₁	0	c ₇	-c ₆	c ₅	-c ₄
-c ₁₃	-c ₁₄	-c ₁₅	-c ₈	c ₉	c ₁₀	c ₁₁	c ₄	-c ₅	-c ₆	-c ₇	0	c ₁	c ₂	c ₃
c ₁₂	-c ₁₅	c ₁₄	-c ₉	-c ₈	-c ₁₁	c ₁₀	c ₅	c ₄	-c ₇	c ₆	-c ₁	0	-c ₃	c ₂
c ₁₅	c ₁₂	-c ₁₃	-c ₁₀	c ₁₁	-c ₉	-c ₈	c ₆	c ₇	c ₄	-c ₅	-c ₂	c ₃	0	-c ₁
-c ₁₄	c ₁₃	c ₁₂	-c ₁₁	-c ₁₀	c ₉	-c ₈	c ₇	-c ₆	c ₅	c ₄	-c ₃	-c ₂	c ₁	0

Следующие 15 матриц преобразования описывают правые вращения на угол вокруг *i*-й координатной оси:

$A_1(\varphi) =$														
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	cosφ	-sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	cosφ	-sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	cosφ	sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	cosφ	-sinφ	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	sinφ	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-sinφ	cosφ	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	-sinφ	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	sinφ	cosφ	0	0

$A_2(\varphi) =$														
cosφ	0	sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-sinφ	0	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	cosφ	0	-sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	cosφ	0	-sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	sinφ	0	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	sinφ	0	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	cosφ	-sinφ	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	sinφ	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-sinφ	cosφ	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	-sinφ	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	sinφ	cosφ	0	0

$A_6(\varphi) =$													
$\cos\varphi$	0	0	$-\sin\varphi$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$\cos\varphi$	0	0	0	0	$\sin\varphi$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$\cos\varphi$	0	0	$-\sin\varphi$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sin\varphi$	0	0	$\cos\varphi$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$\cos\varphi$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$\sin\varphi$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-\sin\varphi$	0	0	0	0	$\cos\varphi$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$\cos\varphi$	0	0	0	0	$-\sin\varphi$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$\cos\varphi$	0	0	$\sin\varphi$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cos\varphi$	0	0	0	$-\sin\varphi$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cos\varphi$	0	$\sin\varphi$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$-\sin\varphi$	0	0	$\cos\varphi$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$\sin\varphi$	0	0	0	0	$\cos\varphi$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\sin\varphi$	0	0	$\cos\varphi$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sin\varphi$	0	0	0	$\cos\varphi$

[illegible][illegible][illegible][illegible]

[illegible]

[illegible]

При этом $A_i^{-1}(\varphi) = A_i'(\varphi) = A_i(-\varphi)$ ($i=1,2,\dots,15$).

Каждая матрица $A = \|a_{ik}\|$, описывающая собственное вращение в пятнадцатимерном евклидовом пространстве, может быть различными способами представлена в виде произведения пятнадцати матриц

$A = A_{i_1}(\varphi_1) A_{i_2}(\varphi_2) \dots A_{i_{15}}(\varphi_{15})$, где некоторые из индексов i_k и i_{16-k} могут совпадать.

Обратное вращение $A' = A^{-1}$ представляется матрицей

$$A' = A_{i15}(-\varphi_{15}) A_{i14}(-\varphi_{14}) \dots A_{i1}(-\varphi_1),$$

так что $AA' = A'A = 1$

Существует огромное число способов, которыми матрицу вращения (1) можно выразить в виде произведения 15-ти матриц вращения вокруг отдельных осей.

Бесконечно малое 15-мерное вращение на бесконечно малый угол $d\delta$ вокруг оси вращения с направляющими косинусами $c_1, c_2, \dots, c_{15}$ описывается соотношением

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{x}' = (\mathbf{I} + d\mathbf{A}) \mathbf{x}$$

$I+dA$ есть ортогональное бесконечно малое преобразование. В ортонормированном координатном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{15}$ преобразование описывается кососимметрической матрицей

0	$-c_3$	c_2	$-c_5$	c_4	c_7	$-c_6$	$-c_9$	c_8	c_{11}	$-c_{10}$	c_{13}	$-c_{12}$	$-c_{15}$	c_{14}
c_3	0	$-c_1$	$-c_6$	$-c_7$	c_4	c_5	$-c_{10}$	$-c_{11}$	c_8	c_9	c_{14}	c_{15}	$-c_{12}$	$-c_{13}$
$-c_2$	c_1	0	$-c_7$	c_6	$-c_5$	c_4	$-c_{11}$	c_{10}	$-c_9$	c_8	c_{15}	$-c_{14}$	c_{13}	$-c_{12}$
c_5	c_6	c_7	0	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_{12}$	$-c_{13}$	$-c_{14}$	$-c_{15}$	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}
$-c_4$	c_7	$-c_6$	c_1	0	c_3	$-c_2$	$-c_{13}$	c_{12}	$-c_{15}$	c_{14}	$-c_9$	c_8	$-c_{11}$	c_{10}
$-c_7$	$-c_4$	c_5	c_2	$-c_3$	0	c_1	$-c_{14}$	c_{15}	c_{12}	$-c_{13}$	$-c_{10}$	c_{11}	c_8	$-c_9$
c_6	$-c_5$	$-c_4$	c_3	c_2	$-c_1$	0	$-c_{15}$	$-c_{14}$	c_{13}	c_{12}	$-c_{11}$	$-c_{10}$	c_9	c_8
c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	0	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$
$-c_8$	c_{11}	$-c_{10}$	c_{13}	$-c_{12}$	$-c_{15}$	c_{14}	c_1	0	c_3	$-c_2$	c_5	$-c_4$	$-c_7$	c_6
$-c_{11}$	$-c_8$	c_9	c_{14}	c_{15}	$-c_{12}$	$-c_{13}$	c_2	$-c_3$	0	c_1	c_6	c_7	$-c_4$	$-c_5$
c_{10}	$-c_9$	$-c_8$	c_{15}	$-c_{14}$	c_{13}	$-c_{12}$	c_3	c_2	$-c_1$	0	c_7	$-c_6$	c_5	$-c_4$
$-c_{13}$	$-c_{14}$	$-c_{15}$	$-c_8$	c_9	c_{10}	c_{11}	c_4	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	0	c_1	c_2	c_3
c_{12}	$-c_{15}$	c_{14}	$-c_9$	$-c_8$	$-c_{11}$	c_{10}	c_5	c_4	$-c_7$	c_6	$-c_1$	0	$-c_3$	c_2
c_{15}	c_{12}	$-c_{13}$	$-c_{10}$	c_{11}	$-c_8$	$-c_9$	c_6	c_7	c_4	$-c_5$	$-c_2$	c_3	0	$-c_1$
$-c_{14}$	c_{13}	c_{12}	$-c_{11}$	$-c_{10}$	c_9	$-c_8$	c_7	$-c_6$	c_5	c_4	$-c_3$	$-c_2$	c_1	0

так что $dA = \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial \delta}, \delta = 0 \right) d\delta$

Она получается путем дифференцирования соотношения (2). При этом

$$dx'=(dA)x=[cx]d\delta,$$

где $\mathbf{c} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \dots + c_{15} \mathbf{e}_{15}$ - единичный вектор в направлении положительной оси вращения, а $[\mathbf{c}\mathbf{x}]$ - векторное произведение векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{x}$. Более того, если $\mathbf{w}$ - любой кососимметрический линейный оператор в 15-мерном евклидовом пространстве, представляемый в ортонормированном координатном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{15}$ кососимметрической матрицей

0	$-w_3$	w_2	$-w_5$	w_4	w_7	$-w_6$	$-w_9$	w_8	w_{11}	$-w_{10}$	w_{13}	$-w_{12}$	$-w_{15}$	w_{14}
w_3	0	$-w_1$	$-w_6$	$-w_7$	w_4	w_5	$-w_{10}$	$-w_{11}$	w_8	w_9	w_{14}	w_{15}	$-w_{12}$	$-w_{13}$
$-w_2$	w_1	0	$-w_7$	w_6	$-w_5$	w_4	$-w_{11}$	w_{10}	$-w_9$	w_8	w_{15}	$-w_{14}$	w_{13}	$-w_{12}$
w_5	w_6	w_7	0	$-w_1$	$-w_2$	$-w$	$-w_{12}$	$-w_{13}$	$-w_{14}$	$-w_{15}$	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}
$-w_4$	w_7	$-w_6$	w_1	0	w_3	$-w_2$	$-w_{13}$	w_{12}	$-w_{15}$	w_{14}	$-w_9$	w_8	$-w_{11}$	w_{10}
$-w_7$	$-w_4$	w_5	w_2	$-w_3$	0	w_1	$-w_{14}$	w_{15}	w_{12}	$-w_{13}$	$-w_{10}$	w_{11}	w_8	$-w_9$
w_6	$-w_5$	$-w_4$	w_3	w_2	$-w_1$	0	$-w_{15}$	$-w_{14}$	w_{13}	w_{12}	$-w_{11}$	$-w_{10}$	w_9	w_8
w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	0	$-w_1$	$-w_2$	$-w_3$	$-w_4$	$-w_5$	$-w_6$	$-w_7$
$-w_8$	w_{11}	$-w_{10}$	w_{13}	$-w_{12}$	$-w_{15}$	w_{14}	w_1	0	w_3	$-w_2$	w_5	$-w_4$	$-w_7$	w_6
$-w_{11}$	$-w_8$	w_9	w_{14}	w_{15}	$-w_{12}$	$-w_{13}$	w_2	$-w_3$	0	w_1	w_6	w_7	$-w_4$	$-w_5$
w_{10}	$-w_9$	$-w_8$	w_{15}	$-w_{14}$	w_{13}	$-w_{12}$	w_3	w_2	$-w_1$	0	w_7	w_5	w_4	$-w_6$
$-w_{13}$	$-w_{14}$	$-w_{15}$	$-w_8$	w_9	w_{10}	w_{11}	w_4	$-w_5$	$-w_6$	$-w_7$	0	w_1	w_2	w_3
w_{12}	$-w_{15}$	w_{14}	$-w_9$	$-w_8$	$-w_{11}$	w_{10}	w_5	w_4	$-w_7$	w_6	$-w_1$	0	$-w_3$	w_2
w_{15}	w_{12}	$-w_{13}$	$-w_{10}$	w_{11}	$-w_8$	$-w_9$	w_6	w_7	w_4	$-w_5$	$-w_2$	w_3	0	$-w_1$
$-w_{14}$	w_{13}	w_{12}	$-w_{11}$	$-w_{10}$	w_9	$-w_6$	w_7	$-w_5$	w_4	w_3	$-w_2$	$-w_1$	w_2	0

где $c=w_1e_1+w_2e_2+\dots+w_{15}e_{15}$.

Рассмотренные матрицы характеризуют вращение пятнадцатимерного пространства на конечные углы. Чтобы получить вид матриц бесконечно малых вращений вокруг осей, разложим каждый элемент матрицы конечного вращений в ряд Тейлора по углам и удержим члены первого порядка малости. При этом

$$L_j = i \frac{\partial}{\partial \phi_j} A_j(\phi), \phi = 0$$

и мы получим матрицы бесконечно малых преобразований координат (генераторов группы) в виде

L_1								L_2															
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$-i$	0	0	0	0	0	0	0	$-i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$-i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-i$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$-i$	0	0	0	$-i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0									

[illegible][illegible][illegible][illegible]

Число генераторов группы равно числу независимых параметров. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что генераторы группы пятнадцатимерных вращений удовлетворяют следующим (перестановочным) соотношениям:

$$m([L_2L_3]+[L_4L_5]+[L_7L_6]+[L_8L_9]+[L_{11}L_{10}]+[L_{13}L_{12}]+[L_{14}L_{15}])=iL_1$$

$$m([L_4L_6] + [L_5L_7] + [L_3L_1] + [L_8L_9] + [L_{11}L_{10}] + [L_{13}L_{12}] + [L_{14}L_{15}]) = iL_2$$

$$m([L_6L_5]+[L_1L_2]+[L_4L_7]+[L_8L_9]+[L_{11}L_{10}]+[L_{13}L_{12}]+[L_{14}L_{15}])=iL_3$$

$$m([L_5 L_1] + [L_7 L_3] + [L_6 L_2] + [L_8 L_9] + [L_{11} L_{10}] + [L_{13} L_{12}] + [L_{14} L_{15}]) = iL_4$$

$$m([L_7L_2]+[L_3L_6]+[L_1L_4]+[L_8L_9]+[L_{11}L_{10}]+[L_{13}L_{12}]+[L_{14}L_{15}])=iL_5$$

$$m([L_1 L_7] + [L_2 L_4] + [L_5 L_3] + [L_8 L_9] + [L_{11} L_{10}] + [L_{13} L_{12}] + [L_{14} L_{15}]) = iL_6$$

$$\begin{aligned}
m([L_3L_4] + [L_6L_1] + [L_2L_5] + [L_8L_9] + [L_{11}L_{10}] + [L_{13}L_{12}] + [L_{14}L_{15}]) &= iL_7 \\
m([L_2L_3] + [L_4L_5] + [L_7L_6] + [L_8L_9] + [L_{11}L_{10}] + [L_{13}L_{12}] + [L_{14}L_{15}]) &= iL_8 \\
m([L_2L_3] + [L_4L_5] + [L_7L_6] + [L_8L_9] + [L_{11}L_{10}] + [L_{13}L_{12}] + [L_{14}L_{15}]) &= iL_8 \\
m([L_2L_3] + [L_4L_5] + [L_7L_6] + [L_8L_9] + [L_{11}L_{10}] + [L_{13}L_{12}] + [L_{14}L_{15}]) &= iL_9 \\
m([L_2L_3] + [L_4L_5] + [L_7L_6] + [L_8L_9] + [L_{11}L_{10}] + [L_{13}L_{12}] + [L_{14}L_{15}]) &= iL_{10} \\
m([L_2L_3] + [L_4L_5] + [L_7L_6] + [L_8L_9] + [L_{11}L_{10}] + [L_{13}L_{12}] + [L_{14}L_{15}]) &= iL_{11} \\
m([L_2L_3] + [L_4L_5] + [L_7L_6] + [L_8L_9] + [L_{11}L_{10}] + [L_{13}L_{12}] + [L_{14}L_{15}]) &= iL_{12} \\
m([L_2L_3] + [L_4L_5] + [L_7L_6] + [L_8L_9] + [L_{11}L_{10}] + [L_{13}L_{12}] + [L_{14}L_{15}]) &= iL_{13} \\
m([L_2L_3] + [L_4L_5] + [L_7L_6] + [L_8L_9] + [L_{11}L_{10}] + [L_{13}L_{12}] + [L_{14}L_{15}]) &= iL_{14} \\
m([L_2L_3] + [L_4L_5] + [L_7L_6] + [L_8L_9] + [L_{11}L_{10}] + [L_{13}L_{12}] + [L_{14}L_{15}]) &= iL_{15}
\end{aligned}$$

где $m=15$, что соответствует соотношениям пятнадцатимерной векторной алгебры.

У группы пятнадцатимерных вращений, коммутирующих между собой, генераторов нет: её ранг равен единице и подалгебры Картана отсутствуют. Из генераторов группы пятнадцатимерных вращений, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми генераторами

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_{15}^2 = 14I,$$

так что скалярный квадрат оператора момента импульса сохраняется.

В случае пятнадцатимерных вращений оператор Казимира сопоставляется квадрату момента 15-импульса. Совокупность всех вращений пятнадцатимерного пространства обладает следующими свойствами:

1. Два последовательных вращения (произведение вращений) есть снова вращение; произведению вращений соответствует произведение матриц, которое снова является матрицей того же типа.

2. Среди вращений имеется такое, при котором пространство переходит само в себя (единичное вращение); такому вращению соответствует единичная матрица.

3. Каждому вращению A_i можно сопоставить обратное вращение A_i^{-1} , которое задается углами $-\phi_i$. Произведение исходного и обратного вращений эквивалентно единичному вращению $A_i \cdot A_i^{-1} = 1$. Обратному вращению соответствует матрица A_i^{-1} , обратная исходной.

Совокупность вращений, обладающих тремя перечисленными свойствами, образует подгруппу Q_{15} ортогональной группы O_{15} . Матрицы пятнадцатимерных вращений образуют также группу.

Список литературы

1. Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2011. 36 с.
2. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набл, 1996. 244 с.
3. Коротков А. В. Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. Новочеркасск: Набл, 1999. 100 с.

УДК 512.7

Физико-математические науки

В статье рассмотрены вопросы классификации мезонов с единичным спином применительно к семимерной физике и семипараметровым семимерным ортогональным Q_7 преобразованиям, прогнозирующим наличие частиц с пространственным спином 1, определяемых совокупностью двух мультиплетов по 7 частиц в каждом из них, сосредоточенных из 7 GAUGE и HIGGS бозонов, а также в группе из 42 известных бозонов. Прогнозируется наличие ещё 7 бозонов со спином 1.

Ключевые слова и фразы: бозоны; единичный спин; семимерная физика; семипараметровые семимерные ортогональные Q_7 преобразования; кварки; изоспин; четность; странность; очарование; боттом.

Коротков Анатолий Васильевич, д. ф.-м. н., к.т.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

МЕЗОНЫ СО СПИНОМ 1 В СЕМИМЕРНОЙ ФИЗИКЕ[©]

Семипараметровые семимерные ортогональные Q_7 преобразования вращения [1] прогнозируют наличие 63 частиц с пространственным спином $J=1$, определяемых совокупностями мультиплетов по 7 частиц. Известные частицы со спином $J=1$ сосредоточены в мультиплете из 14-ти GAUGE и HIGGS бозонов, а также в