Пыркова Ольга Анатольевна

ВКЛАД ОТ ЗАВИХРЕННОСТИ В РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ СМЕЩЕНИЯ ЛИНИИ ТОКА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В статье приводится решение неоднородного уравнения Гельмгольца для вертикального смещения линии тока с помощью функции Грина, удовлетворяющей принципу причинности. Основное внимание в работе автор акцентирует на вкладе в решение от завихренности в стратифицированном потоке в первом приближении. Распределение силовых источников, моделирующих цилиндр, получено из выполнения условия непротекания на его поверхности с учетом завихренности в потоке в первом приближении.

УДК 532.59
Физико-математические науки

В статье приводится решение неоднородного уравнения Гельмгольца для вертикального смещения линии тока с помощью функции Грина, удовлетворяющей принципу причинности. Основное внимание в работе автор акцентирует на вкладе в решение от завихренности в стратифицированном потоке в первом приближении. Распределение силовых источников, моделирующих цилиндр, получено из выполнения условия непротекания на его поверхности с учетом завихренности в потоке в первом приближении.

Ключевые слова и фразы: уравнение Гельмгольца; функция Грина; вертикальное смещение линии тока; задача Дирихле; завихренность; разложение в ряд.

Пыркова Ольга Анатольевна, к. ф.-м. н., доцент
Московский физико-технический институт (государственный университет)
opyr@mail.ru

ВКЛАД ОТ ЗАВИХРЕННОСТИ В РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ СМЕЩЕНИЯ ЛИНИИ ТОКА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ©

Работа выполнена при поддержке ГЗ05.

Ранее для вертикального смещения линии тока $\bar{\xi}$ было получено неоднородное уравнение Гельмгольца [5]:

$$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{y}^2} + k_0{}^2 a^2 \bar{\xi} = \bar{f}_y + \bar{\Omega}_0 \qquad (1)$$

с граничным условием типа Дирихле

$$\bar{\xi} = \sin\theta \qquad (2)$$

Здесь $\bar{x} = \frac{x}{a}$, $\bar{y} = \frac{y}{a}$ - безразмерные горизонтальная и вертикальная, соответственно, координаты точки; a - радиус обтекаемого цилиндра; $k_0 = \frac{N}{U_0}$, где U_0 - скорость набегающего невозмущенного потока, а $N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial y}$ - частота Брента-Вяйсяля; $\bar{f}_y$ - силовые источники, моделирующие цилиндр [3].

Решение уравнения (1) может быть представлено через функцию Грина [2], удовлетворяющую принципу причинности [1; 3; 6].

Завихренность в потоке представляется в виде суперпозиции завихренности в следе $\bar{\Omega}_0^*(\bar{r},\phi)$ и завихренности около обтекаемого цилиндра. Распределение завихренности вблизи поверхности тела (даже при $\mathrm{Re} >> 1$, где $\mathrm{Re}_a = \frac{\mathbf{U}_0 a}{\nu}$ - число Рейнольдса, $\mathbf{U}_0$ - горизонтальная составляющая скорости невозмущенного набегающего потока, ν - коэффициент вязкости) имеет сложный вид. Для его аппроксимации используется разложение в ряд по синусам [7], применяемое в настоящей работе. Следует заметить, что учет первого члена ряда (первое приближение) никак не описывает поле завихренности в окрестности зоны отрыва пограничного слоя, что может послужить причиной наличия определенных погрешностей в поле внутренних волн вблизи тела:

$$\bar{\Omega}_0(\bar{r},\phi) = \sum_{s=1}^{\infty} d_s(\bar{r},\mathrm{Re}_a)\,\sin s\phi + \bar{\Omega}_0^*(\bar{r},\phi) \qquad (3)$$

Распределение силовых источников, моделирующих цилиндр, выбирается исходя из выполнения условия непротекания (2) на его поверхности с учетом влияния завихренности.

Общий вид поправки к решению за счет завихренности. Завихренность в потоке вносит в вертикальное смещение линии тока поправку:

$$\bar{\xi}^{\omega}(\bar{r},\phi) = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} \bar{\Omega}_0(\bar{r}',\phi')G'(\bar{r},\bar{r}',\phi,\phi')\bar{r}'\,d\bar{r}'d\phi' = \int_1^{\bar{r}}\int_0^{\pi} \bar{\Omega}_0(\bar{r}',\phi')G'^{+}(\bar{r},\bar{r}',\phi,\phi')\bar{r}'\,d\bar{r}'d\phi' +$$
$$+\int_{\bar{r}}^{\infty}\int_0^{\pi} \bar{\Omega}_0(\bar{r}',\phi')G'^{-}(\bar{r},\bar{r}',\phi,\phi')\bar{r}'\,d\bar{r}'d\phi' \qquad (4)$$

Учитывая (3), получим

$$\bar{\xi}^{\omega}(\bar{r},\phi)=\sum_{s=1}^{\infty}\int_{1}^{\bar{r}} d_s(\bar{r}',\mathrm{Re}_a)\left[\int_0^{\pi} G'^{+}(\bar{r},\bar{r}',\phi,\phi')\sin s\phi' d\phi'\right]\bar{r}' d\bar{r}'+$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\int_{\bar{r}}^{\infty} d_s(\bar{r}',\mathrm{Re}_a)\left[\int_0^{\pi} G'^{-}(\bar{r},\bar{r}',\phi,\phi')\sin s\phi' d\phi'\right]\bar{r}' d\bar{r}'+ \qquad (5)$$
$$+\int_0^{\pi}\left[\begin{array}{l}\int_1^{\bar{r}}\bar{\Omega}_0^{*}(\bar{r}',\phi')G'^{+}(\bar{r},\bar{r}',\phi,\phi')\bar{r}' d\bar{r}'+\\ +\int_{\bar{r}}^{\infty}\bar{\Omega}_0^{*}(\bar{r}',\phi')G'^{-}(\bar{r},\bar{r}',\phi,\phi')\bar{r}' d\bar{r}'\end{array}\right]d\phi'$$

Сначала рассматривается вклад в смещение линии тока за счет завихренности $\bar{\xi}^{\omega}$ от первого слагаемого ряда в (3). Завихренность в следе учитывается при этом в первом приближении.

Учет первого приближения. При $s = 1$ согласно результатам [4]:

$$\bar{\xi}_1^{\omega}(\bar{r},\phi)=\int_1^{\bar{r}}\int_0^{\pi}\left[d_1(\bar{r}',\mathrm{Re}_a)\sin\phi'+\Omega_0^{*}(r',\phi')\right]\sin\phi'\times$$
$$\times\left[\begin{array}{l}J_1(k_0 a\bar{r}')Y_1(k_0 a\bar{r})\sin\phi+\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}J_{2n}(k_0 a\bar{r})J_1(k_0 a\bar{r}')\sin 2n\phi\end{array}\right]d\phi'\bar{r}' d\bar{r}'+$$
$$+\int_{\bar{r}}^{\infty}\int_0^{\pi}\left[d_1(\bar{r}',\mathrm{Re}_a)\sin\phi'+\Omega_0^{*}(r',\phi')\right]\sin\phi'\times$$
$$\times\left[\begin{array}{l}J_1(k_0 a\bar{r})Y_1(k_0 a\bar{r}')\sin\phi+\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}J_{2n}(k_0 a\bar{r})J_1(k_0 a\bar{r}')\sin 2n\phi\end{array}\right]d\phi'\bar{r}' d\bar{r}' \qquad (6)$$

В дальнейшем для краткости записи вводится обозначение

$$b_{n1} = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \qquad (7)$$

Тогда выражение для смещения за счет завихренности в потоке (6) принимает вид:

$$\bar{\xi}_1^{\omega}(\bar{r},\phi)=\left[Y_1(k_0 a\bar{r})\sin\phi+\sum_{n=1}^{\infty} b_{n1}J_{2n}(k_0 a\bar{r})\sin 2n\phi\right]\times$$
$$\times\int_1^{\bar{r}}\int_0^{\pi}\left[\begin{array}{l}d_1(\bar{r}',\mathrm{Re}_a)\sin\phi'+\\ +\Omega_0^{*}(r',\phi')\end{array}\right]J_1(k_0 a\bar{r}')\sin\phi' d\phi'\bar{r}' d\bar{r}'+$$
$$+J_1(k_0 a\bar{r})\sin\phi\times$$
$$\times\int_{\bar{r}}^{\infty}\int_0^{\pi}\left[\begin{array}{l}d_1(\bar{r}',\mathrm{Re}_a)\sin\phi'+\\ +\Omega_0^{*}(r',\phi')\end{array}\right]Y_1(k_0 a\bar{r}')\sin\phi' d\phi'\bar{r}' d\bar{r}'+ \qquad (8)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_{n1} J_{2n}\left(k_0 a\bar{r}\right)\sin 2n\phi \times$$

$$\times \int_{\bar{r}}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\left[\begin{array}{l} d_1\left(\bar{r}',\mathrm{Re}_a\right)\sin\phi'+ \\ \\ +\Omega_0^*\left(r',\phi'\right)\end{array}\right] J_1\left(k_0 a\bar{r}'\right)\sin\phi' d\phi'\bar{r}' d\bar{r}'$$

Для более краткой записи далее будут использоваться обозначения:

$$\mathrm{J1}_{\alpha}^{\beta}\left(\mathrm{Re}_a,k_0 a\right)=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{\pi}\left[\begin{array}{l} d_1\left(\bar{r}',\mathrm{Re}_a\right)\sin\phi'+ \\ \\ +\bar{\Omega}_0^*\left(\bar{r}',\phi'\right)\end{array}\right] J_1\left(k_0 a\bar{r}'\right)\sin\phi' d\phi'\bar{r}' d\bar{r}' \qquad (9)$$

$$\mathrm{Y1}_{\alpha}^{\beta}\left(\mathrm{Re}_a,k_0 a\right)=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{\pi}\left[\begin{array}{l} d_1\left(\bar{r}',\mathrm{Re}_a\right)\sin\phi'+ \\ \\ +\bar{\Omega}_0^*\left(\bar{r}',\phi'\right)\end{array}\right] Y_1\left(k_0 a\bar{r}'\right)\sin\phi' d\phi'\bar{r}' d\bar{r}'$$

Тогда выражение для вертикального смещения линии тока за счет наличия завихренности в потоке (8) с учетом обозначений (9) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1^{\omega}\left(\bar{r},\phi\right) &= Y_1\left(k_0 a\bar{r}\right)\,\mathrm{J1}_1^{\bar{r}}\left(\mathrm{Re}_a,k_0 a\right)\,\sin\phi+ \\ &+J_1\left(k_0 a\bar{r}\right)\,\mathrm{Y1}_{\bar{r}}^{\infty}\left(\mathrm{Re}_a,k_0 a\right)\,\sin\phi+ \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} b_{n1}\,J_{2n}\left(k_0 a\bar{r}\right)\,\mathrm{J1}_1^{\infty}\left(\mathrm{Re}_a,k_0 a\right)\,\sin 2n\phi \end{aligned} \qquad (10)$$

На поверхности цилиндра:

$$\bar{\xi}_1^{\omega}(1,\phi)\;\approx\;J_1\left(k_0 a\right)\,\mathrm{Y1}_1^{\infty}(\mathrm{Re}_a,k_0 a)\,\sin\phi \qquad (11)$$

и так как здесь имеет место условие непротекания (2), то во избежание искажения формы цилиндра:

$$\bar{\xi}\;=\;\bar{\xi}^{f}\;+\;\bar{\xi}^{\omega}\;=\;\sin\phi \qquad (12)$$

и в первом приближении, имея в виду, что [Там же]

$$\bar{\xi}^{f}\,(1,\varphi)=-\frac{f_1}{2}\sin\varphi+f_1\frac{\left(k_0 a\right)^3}{6}\sin 2\varphi-\frac{f_2}{4}\sin 2\varphi-f_2\frac{\left(k_0 a\right)^3}{6}\sin\varphi$$

при больших числах Фруда для вертикального смещения линии тока имеет место следующее соотношение:

$$\bar{\xi}_1\left(1,\phi\right)\;\approx\;J_1\left(k_0 a\right)\,\mathrm{Y1}_1^{\infty}(\mathrm{Re}_a,k_0 a)\,\sin\phi\;-\;\frac{f_1}{2}\;\sin\phi\;\approx\;\sin\phi$$

то есть для выполнения условия непротекания (12) используется следующее распределение силовых источников на поверхности цилиндра:

$$f_{\,1}\approx\;2\,\left\lfloor J_1\left(k_0 a\right)\mathrm{Y1}_1^{\infty}\left(\mathrm{Re}_a,k_0 a\right)\,-\,1\right\rfloor \qquad (13)$$

Список литературы

1. **Аксенов А. В., Городцов В. А., Стурова И. В.** Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью: препринт № 282. М.: ИПМ АН СССР, 1983. 59 с.
2. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976, 527 с.
3. **Городцов В. А., Теодорович Э. В.** Обтекание цилиндра потоком однородной стратифицированной жидкости // Современные вопросы механики сплошной среды: междувед. сб. М.: МФТИ, 1985. С. 75-81.
4. **Пыркова О. А.** Решение неоднородного уравнения Гельмгольца для смещения линии тока // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2012. № 8 (63). С. 137-141.
5. **Пыркова О. А.** Сведение системы уравнений обтекания цилиндра к уравнению для вертикального отклонения линии тока в плоском случае // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2011. № 2 (45). С. 46-49.
6. **Miles John W., Hupper H. E.** Lee Waves in a Stratified Flow. Part 2. Semi-Circular Obstacle // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 33. Part 4. P. 803-814.
7. **Noak B. R., Eckelmann H.** A Low-Dimensional Galerkin Method for the Three-Dimensional Flow around a Circular Cylinder // Phys. Fluids. 1994. Vol. 6. P. 124-142.