Коротков Анатолий Васильевич

# РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В работе рассматриваются вопросы построения способов решения многомерных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных на примере решения многомерного уравнения Гельмгольца. Аналогичные решения могут быть получены для волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения диффузии, уравнения Лапласа. Особое внимание следует уделить решению уравнений размерности 2 n-1, что соответствует применению многомерных векторных алгебр.



Источник
**Альманах современной науки и образования**
Тамбов: Грамота, 2013. № 3 (70). C. 76-81. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/3/

УДК 512.7
**Физико-математические науки**

*В работе рассматриваются вопросы построения способов решения многомерных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных на примере решения многомерного уравнения Гельмгольца. Аналогичные решения могут быть получены для волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения диффузии, уравнения Лапласа. Особое внимание следует уделить решению уравнений размерности $2^n$-1, что соответствует применению многомерных векторных алгебр.*

*Ключевые слова и фразы:* многомерные дифференциальные уравнения; частные производные; второй порядок; Гельмгольц; Лаплас; уравнение теплопроводности; волновое уравнение; уравнение диффузии; размерность пространства; многомерное пространство; многомерная векторная алгебра.

**Коротков Анатолий Васильевич**, к. техн. н., д. физ.-мат. н., доцент
*Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск*
*avkorotkov1945@yandex.ru*

# РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА©

$$\begin{Vmatrix} 3\text{-}D & 2^m\text{-}1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7\text{-}D & 2^m\text{-}1 \\ 2^m\text{-}1 & 2n+1 & 15\text{-}D \end{Vmatrix}$$

Будем искать решения $D=\lambda_i+i$-мерного уравнения Гельмгольца
($i = 1, 2, ..., D\text{-}2, D\text{-}1$), ($\lambda_i = D\text{-}1, D\text{-}2, ..., 2,1$)

$$\Delta_i \Phi_i + m_i^2 \Phi_i = 0,$$

записанного в сферической $D$-мерной системе координат $\left(\Phi_1\left(r_1, \varphi_2, ..., \varphi_{\lambda_1+2}\right)\right)$ [1; 2], понимая под $D$ размерность векторной алгебры, в виде:

$$\frac{1}{r_1^{\lambda_i}}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^{\lambda_i}\frac{\partial \Phi_i}{\partial r_1}\right)+\frac{1}{r_1^2 S_2^{\lambda_{i+1}}}\frac{\partial}{\partial \phi_{i+1}}\left(S_{i+1}^{\lambda_{i+1}}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \phi_{i+1}}\right)+\frac{1}{r_1^2 S_{i+1}^2 S_{i+2}^2}\frac{\partial}{\partial \phi_{i+2}}\left(S_{i+2}^{\lambda_{i+2}}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \phi_{i+2}}\right)+...+$$

$$+\frac{1}{r_1^2 S_{i+1}^2 S_{i+2}^2 ... S_{\lambda_{i+2}}^2 S_{\lambda_{i+1}}^2}\frac{\partial}{\partial \phi_{\lambda_{i+1}}}\left(S_{\lambda_{i+1}}^2\frac{\partial \Phi_i}{\partial \phi_{\lambda_{i+1}}}\right)+\frac{1}{r_1^2 S_{i+1}^2 S_{i+2}^2 ... S_{\lambda_{i+2}}^2 S_{\lambda_{i+1}}^2 S_{\lambda_i}}\frac{\partial}{\partial \phi_{\lambda i}}\left(S_{\lambda_i}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \phi_{\lambda_i}}\right)+$$

$$+\frac{1}{r_1^2 S_{i+1}^2 S_{i+2}^2 ... S_{\lambda_{i+2}}^2 S_{\lambda_{i+1}}^2 S_{\lambda_i}^2}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \phi_D^2}+m_i^2\Phi_i=0,$$

где $S_i = \sin\phi_i$, методом разделения переменных, полагая

$$\Phi_i\left(r_1, \phi_{i+1}, ..., \phi_D\right) = \psi_i\left(r_1\right)\Phi_{i+1}\left(\phi_{i+1}, \phi_{i+2}, ..., \phi_D\right)$$

В результате имеем

$$\frac{\Phi_{i+1}}{r_1^{\lambda_i}}\frac{d}{dr_1}\left(r_1^{\lambda_i}\frac{d\psi_i}{dr_1}\right)+\frac{\psi_i}{r_1^2}\Delta_{i+1}\Phi_{i+1}+m_i^2\psi_i\Phi_{i+1}=0$$

или

$$\frac{\left(r_1^{\lambda_i}\psi_i'\right)'+m_i^2 r_1^{\lambda_i}\psi_i}{r_1^{\lambda_{i+1}}\psi_i}=-\frac{\Delta_{i+1}\Phi_{i+1}}{\Phi_{i+1}}=m_{i+1}\left(m_{i+1}+\lambda_{i+1}\right),$$

т.е., полагая $i=1$, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases}\Delta_{i+1}\Phi_{i+1}+m_{i+1}\left(m_{i+1}+\lambda_{i+1}\right)\Phi_{i+1}=0\\ \dfrac{1}{r_1^{\lambda_i}}\left(r_1^{\lambda_i}\psi_i'\right)'+\left(m_i^2-\dfrac{m_{i+1}\left(m_{i+1}+\lambda_{i+1}\right)}{r_1^2}\right)\psi_i=0\end{cases}$$

Подстановка $x_i = m_i r_1 \quad y_i = \psi_i x_i^{\lambda_{i+1}/2}$ во второе из них приводит к уравнению Бесселя порядка $m_{i+1}+\lambda_{i+1}/2$:

$$\frac{d^2 y_i}{dx_i^2}+\frac{1}{x_i}\frac{dy_i}{dx_1}+\left(1-\frac{\left(m_{i+1}+\lambda_{i+1}/2\right)^2}{x_i^2}\right)y_i=0$$

или

$$\frac{1}{x_i}\frac{d}{dx_i}\left(x_i\frac{dy_i}{dx_i}\right)+(1-\frac{\left(m_{i+1}+\lambda_{i+1}/2\right)^2}{x_i^2})y_i=0,$$

т.е. к цилиндрическим функциям порядка $m_{i+1}+\lambda_{i+1}/2$.

Решения первого уравнения системы

$$\Delta_{i+1}\Phi_{i+1}+m_{i+1}\left(m_{i+1}+\lambda_{i+1}\right)\Phi_{i+1}=0$$

при

$$\Phi_{i+1}=\Phi_{i+1}\left(\phi_{i+1},...,\phi_D\right)$$

будем искать методом разделения переменных

$$\Phi_{i+1}\left(\phi_{i+1},...,\phi_D\right)=\ \psi_{i+1}\left(\phi_{i+1}\right)\Phi_{i+2}\left(\phi_{i+1},...,\phi_D\right)$$

В результате имеем

$$\frac{\Phi_{i+2}}{\sin^{\lambda_{i+1}}\phi_i}\frac{d}{d\phi_i}\left(\sin^{\lambda_{i+1}}\phi_{i+1}\frac{d\psi_{i+1}}{d\phi_{i+1}}\right)+\frac{\psi_{i+1}}{\sin^{i+1}\phi_i}\Delta_{i+2}\Phi_{i+2}+m_{i+1}\left(m_{i+1}+\lambda_{i+1}\right)\cdot\psi_{i+1}\Phi_{i+2}=0$$

или

$$\frac{\left(\sin^{\lambda_{i+1}}\phi_i\psi_i'\right)'+m_i\left(m_i+\lambda_{i+1}\right)\sin^{\lambda_{i+1}}\phi_i\psi_i}{\sin^{\lambda_{i+3}\backslash}\phi_i\psi_i}=-\frac{\Delta_{i+2}\Phi_{i+2}}{\Phi_{i+2}}=m_{i+2}\left(m_{i+2}+\lambda_{i+2}\right),$$

т.е., при *i=1* получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases}\Delta_{i+1}\Phi_{i+1}+m_{i+1}\left(m_{i+1}+\lambda_{i+1}\right)\Phi_{i+1}=0\\ \dfrac{1}{\sin^{\lambda_i}\phi_i}\left(\sin^{\lambda_i}\phi_i\psi_i'\right)'+\left(m_i\left(m_i+\lambda_i\right)-\dfrac{m_{i+1}\left(m_{i+1}+\lambda_{i+1}\right)}{\sin^i\phi_i}\right)\psi_i=0\end{cases}$$

Вводя переменную $x_i=\cos\phi_i$ и обозначая $V_i\left(x_i\right)=\psi_i\left(\phi_i\right)$, из второго уравнения получим соотношение

$$\frac{d}{dx_i}\left(\left(1-x_i^2\right)^3\frac{dV_i}{dx_i}\right)+\left(1-x_i^2\right)^2\left((m_i\left(m_i+\lambda_i\right)-\frac{m_{i+1}\left(m_{i+1}+\lambda_{i+1}\right)}{1-x_i^2})\right)V_i=0$$

Это уравнение может рассматриваться как частный случай более общего уравнения

$$\frac{d}{dx_i}\left(1-x_i^2\right)^{\lambda_{i+2}}\frac{dV_j}{dx_i}+\left(1-x_i^2\right)^{\lambda_{i+3}}\left(m_i\left(m_i+\lambda_i\right)-\frac{m_{i+1}\left(m_{i+1}+\lambda_{i+1}\right)}{1-x_i^2}\right)V_i=0,$$

для которого подстановка $V_i\left(x\right)=\left(1-x_i^2\right)^{\frac{m_{i+1}}{2}}y_i\left(x\right)$, $V_i\left(\pm1\right)\neq0$ дает

$$\left(1-x_i^2\right)\frac{d^2y_i}{dx_i^2}-\left(2m_{i+1}+\lambda_i+1\right)x_i\frac{dy_i}{dx_i}+\left(m_i-m_{i+1}\right)\left(m_i+m_{i+1}+\lambda_i\right)y_i=0,\quad y_i\left(\pm1\right)\neq0$$

Обозначив далее $2m_{i+1}+\lambda_i=2\alpha_i$ и $m_i\text{-}m_{i+1}=n_i$, получим уравнение

$$\left(1-x_i^2\right)\frac{d^2y_i}{dx_i^2}-\left(2\alpha_i+1\right)x_i\frac{dy_i}{dx_i}+n_i\left(n_i+2\alpha_i\right)y_i=0$$

Одним из решений этого дифференциального уравнения являются функции Гегенбауэра, выражаемые через гипергеометрическую и гамма-функции:

$$C_{n_i}^{\alpha_i}\left(x_i\right)=\frac{\Gamma\left(n_i+2\alpha_i\right)}{\Gamma\left(n_i+1\right)\Gamma\left(2\alpha_i\right)}\ F(n_i+2\alpha_i;\ -n_i;\ \alpha_i+\frac{1}{2};\ \frac{1-x_i}{2}),\qquad n_i=0,1,2,...$$

как многочлены при значениях $n_i$ с коэффициентами при $h^{n_i}$ в разложении функции $\left(1-2hx+h^2\right)^{-\alpha_i}$ по степеням *h*:

$$\left(1-2hx+h^2\right)^{-\alpha_i}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n_i}^{\alpha_i}\left(x_i\right)h^{n_i}$$

В частности, при $i=2$, $\lambda_2=D-2$ имеем:

$$\left(1-x_2^2\right)\frac{d^2y_2}{dx_2^2}-\left(2a_2+1\right)x_2\frac{dy_2}{dx_2}+n_2(n_2+2\alpha_2)y_2=0,\ y_2\left(\pm1\right)\neq0$$

и, следовательно,

$$n_2 = m_2 - m_3; \quad m_2 = \alpha_2 + n_2 - \frac{\lambda_2}{2};$$

$$\alpha_2 = m_3 + \frac{\lambda_2}{2}; \quad m_3 = \alpha_2 - \frac{\lambda_2}{2};$$

так что

$$C_{n_2}^{\alpha_2}(x_2) = \frac{\Gamma(n_2 + 2\alpha_2)}{\Gamma(n_2+1)\Gamma(2\alpha_2)} \times F(n_2 + 2\alpha_2;\ -n_2;\ \alpha_2 + \frac{1}{2};\ \frac{1-x_2}{2}), \quad n_2 = 0,1,2,...$$

Решения первого уравнения системы

$$\Delta_{i+1}\Phi_{i+1} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})\Phi_{i+1} = 0$$

при

$$\Phi_{i+1} = \Phi_{i+1}(\phi_{i+1},...,\phi_D)$$

будем искать методом разделения переменных

$$\Phi_{i+1}(\phi_{i+1},...,\phi_D) = \psi_{i+1}(\phi_{i+1})\Phi_{i+2}(\phi_{i+1},...,\phi_D)$$

В результате имеем

$$\frac{\Phi_{i+2}}{\sin^{\lambda_{i+1}}\phi_i}\frac{d}{d\phi_i}\left(\sin^{\lambda_{i+1}}\phi_{i+1}\frac{d\psi_{i+1}}{d\phi_{i+1}}\right) + \frac{\psi_{i+1}}{\sin^{i+1}\phi_i}\Delta_{i+2}\Phi_{i+2} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})\cdot\psi_{i+1}\Phi_{i+2} = 0$$

или

$$\frac{\left(\sin^{\lambda_{i+1}}\phi_i\psi_i'\right)' + m_i(m_i + \lambda_{i+1})\sin^{\lambda_{i+1}}\phi_i\psi_i}{\sin^{\lambda_{i+3}\backslash}\phi_i\psi_i} = -\frac{\Delta_{i+2}\Phi_{i+2}}{\Phi_{i+2}} = m_{i+2}(m_{i+2} + \lambda_{i+2}),$$

т.е., полагая $i=2$, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_{i+1}\Phi_{i+1} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})\Phi_{i+1} = 0 \\ \dfrac{1}{\sin^{\lambda_i}\phi_i}\left(\sin^{\lambda_i}\phi_i\psi_i'\right)' + \left(m_i(m_i + \lambda_i) - \dfrac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{\sin^i\phi_i}\right)\psi_i = 0 \end{cases}$$

Вводя переменную $x_i = \cos\phi_i$ и обозначая $V_i(x_i) = \psi_i(\phi_i)$, из второго уравнения получим соотношение

$$\frac{d}{dx_i}\left(\left(1-x_i^2\right)^3\frac{dV_i}{dx_i}\right) + \left(1-x_i^2\right)^2\left((m_i(m_i + \lambda_i) - \frac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{1-x_i^2})\right)V_i = 0$$

Это уравнение может рассматриваться как частный случай более общего уравнения

$$\frac{d}{dx_i}\left(1-x_i^2\right)^{\lambda_{i+2}}\frac{dV_j}{dx_i} + \left(1-x_i^2\right)^{\lambda_{i+3}}\left(m_i(m_i + \lambda_i) - \frac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{1-x_i^2}\right)V_i = 0,$$

для которого подстановка $V_i(x) = \left(1-x_i^2\right)^{\frac{m_{i+1}}{2}}y_i(x)$, $V_i(\pm 1) \neq 0$ дает

$$\left(1-x_i^2\right)\frac{d^2y_i}{dx_i^2} - (2m_{i+1} + \lambda_i + 1)x_i\frac{dy_i}{dx_i} + (m_i - m_{i+1})(m_i + m_{i+1} + \lambda_i)y_i = 0, \quad y_i(\pm 1) \neq 0$$

Обозначив далее $2m_{i+1} + \lambda_i = 2\alpha_i$ и $m_i - m_{i+1} = n_i$, получим уравнение

$$\left(1-x_i^2\right)\frac{d^2y_i}{dx_i^2} - (2\alpha_i + 1)x_i\frac{dy_i}{dx_i} + n_i(n_i + 2\alpha_i)y_i = 0$$

Одним из решений этого дифференциального уравнения являются функции Гегенбауэра, выражаемые через гипергеометрическую и гамма-функции

$$C_{n_i}^{\alpha_i}(x_i) = \frac{\Gamma(n_i + 2\alpha_i)}{\Gamma(n_i+1)\Gamma(2\alpha_i)} F(n_i + 2\alpha_i;\ -n_i;\ \alpha_i + \frac{1}{2};\ \frac{1-x_i}{2}), \quad n_i = 0,1,2,...$$

как многочлены при значениях $n_i$ с коэффициентами при $h^{n_i}$ в разложении функции $\left(1-2hx + h^2\right)^{-\alpha_i}$ по степеням h:

$$\left(1-2hx + h^2\right)^{-\alpha_i} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n_i}^{\alpha_i}(x_i)h^{n_i}$$

В частности, при $i = 2$, $\lambda_2 = D - 2$ имеем:

$$\left(1-x_2^2\right)\frac{d^2y_2}{dx_2^2} - (2a_2 + 1)x_2\frac{dy_2}{dx_2} + n_2(n_2 + 2\alpha_2)y_2 = 0, \ y_2(\pm 1) \neq 0$$

и, следовательно,

$$n_2 = m_2 - m_3;\quad m_2 = \alpha_2 + n_2 - \frac{\lambda_2}{2};$$

$$\alpha_2 = m_3 + \frac{\lambda_2}{2};\quad m_3 = \alpha_2 - \frac{\lambda_2}{2};$$

так что

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}_2}^{\alpha_2}(\mathrm{x}_2) = \frac{\Gamma(\mathrm{n}_2 + 2\alpha_2)}{\Gamma(\mathrm{n}_2+1)\Gamma(2\alpha_2)} \times \mathrm{F}(\mathrm{n}_2 + 2\alpha_2;\ \text{-}\,\mathrm{n}_2;\ \alpha_2 + \frac{1}{2};\ \frac{1\text{-}\mathrm{x}_2}{2}),\quad \mathrm{n}_2 = 0,1,2,...$$

Решения первого уравнения системы

$$\Delta_{\mathrm{i+1}}\Phi_{\mathrm{i+1}} + \mathrm{m}_{\mathrm{i+1}}(\mathrm{m}_{\mathrm{i+1}} + \lambda_{i+1})\Phi_{\mathrm{i+1}} = 0$$

при

$$\Phi_{i+1} = \Phi_{i+1}(\phi_{i+1},...,\phi_{\mathrm{D}})$$

будем искать методом разделения переменных

$$\Phi_{\mathrm{i+1}}(\phi_{i+1},...,\phi_D) = \psi_{i+1}(\phi_{i+1})\Phi_{i+2}(\phi_{i+1},...,\phi_D)$$

В результате имеем

$$\frac{\Phi_{i+2}}{\sin^{\lambda_{i+1}}\phi_i}\frac{d}{d\phi_i}\left(\sin^{\lambda_{i+1}}\phi_{i+1}\frac{d\psi_{i+1}}{d\phi_{i+1}}\right) + \frac{\psi_{i+1}}{\sin^{i+1}\phi_i}\Delta_{i+2}\Phi_{i+2} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})\cdot\psi_{i+1}\Phi_{i+2} = 0$$

или

$$\frac{\left(\sin^{\lambda_{i+1}}\phi_i\psi_i'\right)' + \mathrm{m}_i(\mathrm{m}_i + \lambda_{i+1})\sin^{\lambda_{i+1}}\phi_i\psi_i}{\sin^{\lambda_{i+3}\backslash}\phi_i\psi_i} = \text{-}\frac{\Delta_{i+2}\Phi_{i+2}}{\Phi_{i+2}} = \mathrm{m}_{i+2}(\mathrm{m}_{i+2} + \lambda_{i+2}),$$

т.е., полагая *i=3*, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases}\Delta_{i+1}\Phi_{i+1} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})\Phi_{i+1} = 0\\ \dfrac{1}{\sin^{\lambda_i}\phi_i}\left(\sin^{\lambda_i}\phi_i\psi_i'\right)' + \left(m_i(m_i + \lambda_i)\text{-}\dfrac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{\sin^i\phi_i}\right)\psi_i = 0\end{cases}$$

Вводя переменную $x_i = \cos\phi_i$ и обозначая $\mathrm{V}_i(\mathrm{x}_i) = \psi_i(\phi_i)$, из второго уравнения получим соотношение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_i}\left(\left(1\text{-}\mathrm{x}_i^2\right)^3\frac{\mathrm{dV}_i}{\mathrm{dx}_i}\right) + \left(1\text{-}\mathrm{x}_i^2\right)^2\left((\mathrm{m}_i(\mathrm{m}_i + \lambda_i)\text{-}\frac{\mathrm{m}_{i+1}(\mathrm{m}_{i+1} + \lambda_{i+1})}{1\text{-}\mathrm{x}_i^2})\right)\mathrm{V}_i = 0$$

Это уравнение может рассматриваться как частный случай более общего уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_i}\left(1\text{-}\mathrm{x}_i^2\right)^{\lambda_{i+2}}\frac{\mathrm{dV}_j}{\mathrm{dx}_i} + \left(1\text{-}\mathrm{x}_i^2\right)^{\lambda_{i+3}}\left(\mathrm{m}_i(\mathrm{m}_i + \lambda_\mathrm{i})\text{-}\frac{\mathrm{m}_\mathrm{i+1}(\mathrm{m}_\mathrm{i+1} + \lambda_\mathrm{i+1})}{1\text{-}\mathrm{x}_i^2}\right)\mathrm{V}_i = 0,$$

для которого подстановка $\mathrm{V_i}(\mathrm{x}) = \left(1\text{-}\mathrm{x_i^2}\right)^{\frac{\mathrm{m_{i+1}}}{2}}\mathrm{y_i}(\mathrm{x})$, $\mathrm{V_i}(\pm1) \neq 0$ дает

$$\left(1 - \mathrm{x_i^2}\right)\frac{\mathrm{d^2y_i}}{\mathrm{dx_i^2}} - \left(2\mathrm{m_{i+1}} + \lambda_\mathrm{i} + 1\right)\mathrm{x_i}\frac{\mathrm{dy_i}}{\mathrm{dx_i}} + \left(\mathrm{m_i} - \mathrm{m_{i+1}}\right)\left(\mathrm{m_i} + \mathrm{m_{i+1}} + \lambda_\mathrm{i}\right)\mathrm{y_i} = 0,\quad \mathrm{y_i}(\pm1) \neq 0$$

Обозначив далее $2m_{i+1} + \lambda_i = 2\alpha_i$ и $m_i\text{-}m_{i+1} = n_i$, получим уравнение

$$\left(1\text{-}\mathrm{x_i^2}\right)\frac{\mathrm{d^2y_i}}{\mathrm{dx_i^2}}\text{-}\left(2\alpha_\mathrm{i} + 1\right)\mathrm{x_i}\frac{\mathrm{dy_i}}{\mathrm{dx_i}} + \mathrm{n_i}\left(\mathrm{n_i} + 2\alpha_\mathrm{i}\right)\mathrm{y_i} = 0$$

Одним из решений этого дифференциального уравнения являются функции Гегенбауэра, выражаемые через гипергеометрическую и гамма-функции

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n_i}}^{\alpha_\mathrm{i}}(\mathrm{x_i}) = \frac{\Gamma(\mathrm{n_i} + 2\alpha_\mathrm{i})}{\Gamma(\mathrm{n_i}+1)\Gamma(2\alpha_\mathrm{i})}\ \mathrm{F}(\mathrm{n_i} + 2\alpha_\mathrm{i};\ \text{-}\,\mathrm{n_i};\ \alpha_\mathrm{i} + \frac{1}{2};\ \frac{1\text{-}\mathrm{x_i}}{2}),\qquad \mathrm{n_i} = 0,1,2,...$$

как многочлены при значениях $n_i$ с коэффициентами при $h^{n_i}$ в разложении функции $\left(1\text{-}2\mathrm{hx} + \mathrm{h}^2\right)^{\text{-}\alpha_\mathrm{i}}$ по степеням h:

$$\left(1\text{-}2\mathrm{hx} + \mathrm{h}^2\right)^{\text{-}\alpha_\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{C}_{\mathrm{n_i}}^{\alpha_\mathrm{i}}(\mathrm{x_i})h^{n_i}$$

При $i = 3$, $\lambda_3 = D - 3$ имеем:

$$\left(1\text{-}\mathrm{x}_3^2\right)\frac{\mathrm{d^2y_3}}{\mathrm{dx}_3^2} - \left(2a_3 + 1\right)\mathrm{x}_3\frac{\mathrm{dy}_3}{\mathrm{dx}_3} + \mathrm{n}_3(\mathrm{n}_3 + \lambda_3)\mathrm{y}_3 = 0,\ \mathrm{y}_3(\pm1) \neq 0$$

и, следовательно,

$$n_3 = m_3 - m_4; \quad m_3 = \alpha_3 + n_3 - \frac{\lambda_3}{2};$$

$$\alpha_3 = m_4 + \frac{\lambda_3}{2}; \quad m_4 = \alpha_3 - \frac{\lambda_3}{2};$$

так что

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}_3}^{\alpha_3}(\mathrm{x}_3) = \frac{\Gamma(\mathrm{n}_3 + 2\alpha_3)}{\Gamma(\mathrm{n}_3+1)\Gamma(2\alpha_3)} \times \mathrm{F}(\mathrm{n}_3 + 2\alpha_3;\ -\mathrm{n}_3;\ \alpha_3 + \frac{1}{2};\ \frac{1-\mathrm{x}_3}{2}), \quad \mathrm{n}_3 = 0,1,2,...$$

…………………………………………………………………………………….

Аналогичным образом получаются решения подобных уравнений при $i = 4, 5, \ldots, D\text{-}2$; $\lambda_4, \lambda_5, \ldots, \lambda_{D-2}, \ldots$

Решение уравнения $\Delta_{\mathrm{D-2}}\Phi_{\mathrm{D-2}} + \mathrm{m}_{\mathrm{D-2}}(\mathrm{m}_{\mathrm{D-2}}+2)\Phi_{\mathrm{D-2}} = 0,\ \Phi_{\mathrm{D-2}} = \Phi_{\mathrm{D-2}}(\phi_{\mathrm{D-2}},...,\phi_D)$

будем искать методом разделения переменных, т.е.

$$\Delta_{\mathrm{D-2}}\Phi_{\mathrm{D-2}}(\phi_{D-2},...,\phi_D) = \psi_{\mathrm{D-1}}(\phi_{\mathrm{D-1}})\Phi_{\mathrm{D-1}}(\phi_{D-1},\phi_D)$$

В результате имеем

$$\frac{\Phi_{D-1}}{\sin^2\phi_{D-2}}\frac{d}{d\phi_{D-2}}\left((\sin^2\varphi_{D-2}\frac{d\psi_{D-2}}{d\varphi_{D-2}})\right) + \frac{\psi_{D-2}}{\sin^2\varphi_{D-2}}\Delta_{D-1}\Phi_{D-1} + m_{D-2}(m_{D-2}+2)\cdot\psi_{D-2}\Phi_{D-1} = 0$$

или

$$\frac{\left(\sin^2\varphi_{D-2}\psi'_{D-2}\right)' + \mathrm{m}_{D-2}(\mathrm{m}_{D-2}+2)\sin^2\varphi_{D-2}\psi_{D-2}}{\sin^0\varphi_{D-2}\psi_{D-2}} = \frac{\Delta_{D-1}\Phi_{D-1}}{\Phi_{D-1}} = \mathrm{m}_{D-1}(\mathrm{m}_{D-1}+1),$$

т.е., при $i = D\text{-}2$, систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_{D-1}\Phi_{D-1} + m_{D-1}(m_{D-1}+1)\Phi_{D-1} = 0 \\ \dfrac{1}{\sin^2\varphi_{D-2}}\left(\sin^2\varphi_{D-2}\psi'_{D-2}\right)' + \left(m_{D-2}(m_{D-2}+2)\text{-}\dfrac{m_{D-1}(m_{D-1}+1)}{\sin^2\varphi_{D-2}}\right)\psi_{D-2} = 0 \end{cases}$$

Вводя переменную $x_{D-2} = \cos\phi_{D-2}$, после рассмотренных выше преобразований получим при $\lambda_{D-2} = 2$

$$\left(1-\mathrm{x}_{D-2}^2\right)\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}_{D-2}}{\mathrm{dx}_{D-2}^2} - (2\mathrm{m}_{D-1} + \lambda_{D-1} + 1)\mathrm{x}_{D-2}\frac{\mathrm{dy}_{D-2}}{\mathrm{dx}_{D-2}} + (\mathrm{m}_{D-2} - \mathrm{m}_{D-1})(\mathrm{m}_{D-2} + \mathrm{m}_{D-1} + 2)\mathrm{y}_{D-2} = 0$$

и, следовательно, $2m_{D-1} + \lambda_{D-2} = 2\alpha_{D-2}$ и $m_{D-2}\text{-}m_{D-1} = n_i$, так что

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}_i}^{\alpha_i}(\mathrm{x_i}) = \frac{\Gamma(\mathrm{n_i} + 2\alpha_\mathrm{i})}{\Gamma(\mathrm{n_i}+1)\Gamma(2\alpha_\mathrm{i})} \times \mathrm{F}(\mathrm{n_i} + 2\alpha_\mathrm{i};\ -\mathrm{n_i};\ \alpha_\mathrm{i} + \frac{1}{2};\ \frac{1-\mathrm{x_i}}{2}), \quad \mathrm{n_i} = 0,1,2,...$$

В частности, при $i = D-2$, $\lambda_{D-2} = 2$, имеем

$$\left(1\text{-}\mathrm{x}_{\mathrm{D-2}}^2\right)\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}_{D-2}}{\mathrm{dx}_{D-2}^2} - (2a_{D-2}+1)\mathrm{x}_{D-2}\frac{\mathrm{dy}_{D-2}}{\mathrm{dx}_{D-2}} + \mathrm{n}_{D-2}(\mathrm{n}_{D-2} + D - 2)\mathrm{y}_{D-2} = 0,\ \mathrm{y}_{D-2}(\pm 1) \neq 0$$

и, следовательно,

$$n_{\mathrm{D-2}} = m_{\mathrm{D-2}} - m_{\mathrm{D-1}}; \quad m_{D-2} = \alpha_{D-2} + n_{D-2} - \frac{\lambda_{D-2}}{2};$$

$$\alpha_{\mathrm{D-2}} = m_{\mathrm{D-2}} + \frac{\lambda_{\mathrm{D-2}}}{2}; \quad m_{\mathrm{D-2}} = \alpha_{D-2} - \frac{\lambda_{D-2}}{2};$$

так что

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}_{D-2}}^{\alpha_{D-2}}(\mathrm{x}_{D-2}) = \frac{\Gamma(\mathrm{n}_{D-2} + 2\alpha_{D-2})}{\Gamma(\mathrm{n}_{D-2}+1)\Gamma(2\alpha_{D-2})} \times \mathrm{F}(\mathrm{n}_{D-2} + 2\alpha_{D-2}; -\mathrm{n}_{D-2}; \alpha_{D-2} + \frac{1}{2}; \frac{1-\mathrm{x}_{D-2}}{2}), \mathrm{n}_{D-2} = 0,1,2,...$$

Решение уравнения $\Delta_{\mathrm{D-1}}\Phi_{\mathrm{D-1}} + \mathrm{m}_{\mathrm{D-1}}(\mathrm{m}_{\mathrm{D-1}}+1)\Phi_{\mathrm{D-1}} = 0,\quad \Phi_{\mathrm{D-1}} = \Phi_{\mathrm{D-1}}(\phi_{\mathrm{D-1}},\phi_D)$

будем искать методом разделения переменных

$$\Phi_{\mathrm{D-1}}(\phi_{D-1},\phi_D) = \psi_{\mathrm{D-1}}(\phi_{\mathrm{D-1}})\Phi_{\mathrm{D}}(\phi_D)$$

В результате имеем

$$\frac{\Phi_D}{\sin\phi_{D-1}}\frac{d}{d\phi_{D-1}}\left((\sin\varphi_{D-1}\frac{d\psi_{D-1}}{d\varphi_{D-1}})\right) + \frac{\psi_{D-1}}{\sin^2\varphi_{D-1}}\Delta_D\Phi_D + m_{D-1}(m_{D-1}+1)\cdot\psi_{D-1}\Phi_D = 0$$

или

$$\frac{\left(\sin\varphi_{D-1}\psi'_{D-1}\right)' + \mathrm{m}_{D-1}\left(\mathrm{m}_{D-1}+1\right)\sin\varphi_{D-1}\psi_{D-1}}{\sin^{-1}\varphi_{D-1}\psi_{D-1}} = \frac{\Delta_D\Phi_D}{\Phi_D} = \mathrm{m}_D\left(\mathrm{m}_D+0\right)$$

т.е., полагая $i=D\text{-}1$, имеем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_D\Phi_D + m_D\left(m_D+0\right)\Phi_D = 0 \\ \dfrac{1}{\sin\ \varphi_{D-1}}\left(\sin\varphi_{D-1}\psi'_{D-1}\right)' + \left(m_{D-1}\left(m_{D-1}+1\right) - \dfrac{m_D\left(m_D+0\right)}{\sin^2\varphi_{D-1}}\right)\psi_{D-1} = 0 \end{cases}$$

Вводя переменную $x_{D-1} = \cos\phi_{D-1}$, после рассмотренных выше преобразований получим при $\lambda_{D-1} = 1$

$$\left(1-\mathrm{x}^2_{D-1}\right)\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}_{D-1}}{\mathrm{dx}^2_{D-1}} - \left(2\mathrm{m}_D+\lambda_D+1\right)\mathrm{x}_{D-1}\frac{\mathrm{dy}_{D-1}}{\mathrm{dx}_{D-1}} + \left(\mathrm{m}_{D-1}-\mathrm{m}_D\right)\left(\mathrm{m}_{D-1}+\mathrm{m}_D+1\right)\mathrm{y}_{D-1} = 0$$

и, следовательно, $2m_D + \lambda_{D-1} = 2\alpha_{D-1}$ и $m_{D-1}\text{-}m_D = n_{D-1}$, так что

$$\mathrm{C}^{\alpha_{D-1}}_{\mathrm{n}_{D-1}}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{D\text{-}1}}\right) = \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}_{\mathrm{D\text{-}1}}+2\alpha_{\mathrm{D\text{-}1}}\right)}{\Gamma\left(\mathrm{n}_{\mathrm{D\text{-}1}}+1\right)\Gamma\left(2\alpha_{\mathrm{D\text{-}1}}\right)} \times \mathrm{F}(\mathrm{n}_{\mathrm{D\text{-}1}}+2\alpha_{\mathrm{D\text{-}1}};\ \text{-}\mathrm{n}_{\mathrm{D\text{-}1}};\ \alpha_{\mathrm{D\text{-}1}}+\frac{1}{2};\ \frac{1\text{-}\mathrm{x}_{\mathrm{D\text{-}1}}}{2}),\quad \mathrm{n}_{\mathrm{D\text{-}1}} = 0,1,2,...,$$

что соответствует решению уравнения Лежандра.

Таким образом, найдено решение *n*-мерного уравнения Гельмгольца. Аналогичным образом можно найти решение других многомерных уравнений в частных производных - уравнения Лапласа, волнового уравнения, уравнения теплопроводности, диффузии и др. [3; 4].

*Список литературы*


1. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции: в 3-х т. М.: Наука, 1974. Т. II. 295 с.
2. **Коротков А. В.** Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2011. 36 с.
3. **Коротков А. В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
4. **Коротков А. В.** Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. Новочеркасск: Набла, 1999. 100 с.


---

УДК 512.7
**Физико-математические науки**

*В работе рассмотрены вопросы описания силовых взаимодействий в области чрезвычайно малых расстояний, а также уточнения описания силовых взаимодействий в области привычных расстояний на базе использования многомерных векторных алгебр размерности $2^n$-1, степенных и экспоненциальных функций в формуле Планка при изменении показателя степени. Приведены графики зависимости кривой (Планка) с изменением показателя степени, длины волны либо частоты излучения. Показана необходимость использования гамма-функции, многочленов Бернулли и дзета- функции для описания силовых взаимодействий в области малых расстояний.*

*Ключевые слова и фразы:* силовые взаимодействия; чрезвычайно малые расстояния; алгебры размерности $2^n$-1; расширение формулы Планка; графики кривых (Планка); гамма-функция; многочлены Бернулли; дзета-функция; статистика Бозе-Эйнштейна; закон Больцмана; закон Вина.

**Коротков Анатолий Васильевич**, к. техн. н., д. физ.-мат. н., доцент
*Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск*
*avkorotkov1945@yandex.ru*

## ФОРМУЛА ПЛАНКА В D-МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ©

$$\begin{Vmatrix} 3\text{-}D & 2^m\text{-}1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7\text{-}D & 2^m\text{-}1 \\ 2^m\text{-}1 & 2n+1 & 15\text{-}D \end{Vmatrix}$$

*О размерности многомерных векторных алгебр*

Широко распространенная и сыгравшая в естествознании замечательную роль трехмерная векторная алгебра (Гамильтона-Грассмана), доминирующая уже в течение полутора столетий, имеет, в то же время, существенные ограничения в описании различных физических процессов. Это связано, например, с тем, что