

Коротков Анатолий Васильевич

ФОРМУЛА ПЛАНКА В D-МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе рассмотрены вопросы описания силовых взаимодействий в области чрезвычайно малых расстояний, а также уточнения описания силовых взаимодействий в области привычных расстояний на базе использования многомерных векторных алгебр размерности $2n-1$, степенных и экспоненциальных функций в формуле Планка при изменении показателя степени. Приведены графики зависимости кривой (Планка) с изменением показателя степени, длины волны либо частоты излучения. Показана необходимость использования гамма-функции, многочленов Бернулли и дзета- функции для описания силовых взаимодействий в области малых расстояний.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2013/3/23.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2013. № 3 (70). С. 81-91. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/3/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

или

$$\frac{(\sin \varphi_{D-1} \psi'_{D-1})' + m_{D-1} (m_{D-1} + 1) \sin \varphi_{D-1} \psi_{D-1}}{\sin^{-1} \varphi_{D-1} \psi_{D-1}} = \frac{\Delta_D \Phi_D}{\Phi_D} = m_D (m_D + 0)$$

т.е., полагая $i=D-1$, имеем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_D \Phi_D + m_D (m_D + 0) \Phi_D = 0 \\ \frac{1}{\sin \varphi_{D-1}} (\sin \varphi_{D-1} \psi'_{D-1})' + \left(m_{D-1} (m_{D-1} + 1) - \frac{m_D (m_D + 0)}{\sin^2 \varphi_{D-1}} \right) \psi_{D-1} = 0 \end{cases}$$

Вводя переменную $x_{D-1} = \cos \phi_{D-1}$, после рассмотренных выше преобразований получим при $\lambda_{D-1} = 1$

$$(1 - x_{D-1}^2) \frac{d^2 y_{D-1}}{dx_{D-1}^2} - (2m_D + \lambda_D + 1) x_{D-1} \frac{dy_{D-1}}{dx_{D-1}} + (m_{D-1} - m_D)(m_{D-1} + m_D + 1) y_{D-1} = 0$$

и, следовательно, $2m_D + \lambda_{D-1} = 2\alpha_{D-1}$ и $m_{D-1} - m_D = n_{D-1}$, так что

$$C_{n_{D-1}}^{\alpha_{D-1}}(x_{D-1}) = \frac{\Gamma(n_{D-1} + 2\alpha_{D-1})}{\Gamma(n_{D-1} + 1) \Gamma(2\alpha_{D-1})} \times F(n_{D-1} + 2\alpha_{D-1}; -n_{D-1}; \alpha_{D-1} + \frac{1}{2}; \frac{1 - x_{D-1}}{2}), \quad n_{D-1} = 0, 1, 2, \dots,$$

что соответствует решению уравнения Лежандра.

Таким образом, найдено решение n -мерного уравнения Гельмгольца. Аналогичным образом можно найти решение других многомерных уравнений в частных производных - уравнения Лапласа, волнового уравнения, уравнения теплопроводности, диффузии и др. [3; 4].

Список литературы

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: в 3-х т. М.: Наука, 1974. Т. II. 295 с.
2. Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2011. 36 с.
3. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
4. Коротков А. В. Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. Новочеркасск: Набла, 1999. 100 с.

УДК 512.7

Физико-математические науки

В работе рассмотрены вопросы описания силовых взаимодействий в области чрезвычайно малых расстояний, а также уточнения описания силовых взаимодействий в области привычных расстояний на базе использования многомерных векторных алгебр размерности 2^n-1 , степенных и экспоненциальных функций в формуле Планка при изменении показателя степени. Приведены графики зависимости кривой (Планка) с изменением показателя степени, длины волны либо частоты излучения. Показана необходимость использования гамма-функции, многочленов Бернулли и дзета-функции для описания силовых взаимодействий в области малых расстояний.

Ключевые слова и фразы: силовые взаимодействия; чрезвычайно малые расстояния; алгебры размерности 2^n-1 ; расширение формулы Планка; графики кривых (Планка); гамма-функция; многочлены Бернулли; дзета-функция; статистика Бозе-Эйнштейна; закон Больцмана; закон Вина.

Коротков Анатолий Васильевич, к. техн. н., д. физ.-мат. н., доцент

Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск

avkorotkov1945@yandex.ru

ФОРМУЛА ПЛАНКА В D-МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[©]

$$\begin{vmatrix} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{vmatrix}$$

О размерности многомерных векторных алгебр

Широко распространенная и сыгравшая в естествознании замечательную роль трехмерная векторная алгебра (Гамильтона-Грассмана), доминирующая уже в течение полутора столетий, имеет, в то же время, существенные ограничения в описании различных физических процессов. Это связано, например, с тем, что

ограничение размерности приводит к ограничению степени зависимости силовых величин от расстояний величиной, обратной второй степени расстояния. В качестве другого недостатка выступает наличие в трехмерной векторной алгебре лишь трех законов сохранения физических величин и описание процессов лишь с помощью двух первых производных от расстояний.

Это обуславливает невозможность применения 3-D-векторных алгебр в области весьма малых расстояний и для увеличения точности описания процессов в области привычных расстояний. Поэтому принципиально важно построение многомерных векторных алгебр, остающихся в рамках линейных векторных пространств, но с фиксированным векторным произведением двух векторов. Этот принцип, видимо, был использован при создании трехмерной векторной алгебры.

Анализ способов построения векторных алгебр показал, что размерность алгебр определяется числом способов разбиения множества из n элементов на два непустых подмножества и соответствует ряду чисел: 1, 3, 7, 15, 31, ..., $2^n - 1$, ... Он определяется рекуррентной формулой вида:

$$P_{n+1} = 3P_n - 2P_{n-1}$$

Эти соотношения создают ряд, определяющий, кстати, все совершенные числа. Попытка сведения ряда к последовательности классических ортогональных многочленов оказалась неудачной, но позволила получить в рамках соотношения

$$P_{n+1}(x) = (A_n \cdot x + B_n) P_n(x) - C_n \cdot P_{n-1}(x),$$

где

$$A_n = -1/(2^n - 1); B_n = 3; C_n = 2,$$

следующую последовательность многочленов:

$$P_{-1}(x) = 0;$$

$$P_0(x) = 1;$$

$$P_1(x) = (-x/1 + 3) = -x + 3;$$

$$P_2(x) = (-x/3 + 3)(-x + 3) - 2 = x^2/3 - 4x + 7;$$

$$P_3(x) = (-x/7 + 3)(x^2/3 - 4x + 7) - 2(-x + 3) = -x^3/21 + 11/7x^2 - 11x + 15;$$

$$P_4(x) = (-x/15 + 3)(-x^3/21 + 11/7x^2 - 11x + 15) - 2(x^2/3 - 4x + 7) = x^4/315 - 26/105x^3 + 502/105x^2 - 26x + 31;$$

$$P_5(x) = (-x/31 + 3)(x^4/315 - 26/105x^3 + 502/105x^2 - 26x + 31) - 2(-x^3/21 + 11/7x^2 - 11x + 15) =$$

$$= -x^5/9765 + 15563/105x^4 - 2610/3255x^3 + 39186/3255x^2 - 57x + 63;$$

...

Здесь, очевидно, свободные члены последовательности многочленов создают числовой ряд, определяющий соотношение:

$$P_{n+1}(0) = 3P_n(0) - 2P_{n-1}(0)$$

Он соответствует производящей функции:

$$P_n(x) = e^x(e^x - n),$$

так что

$$P_n(x) = e^x(e^x - n) + 0e^{2x},$$

$$P_n'(x) = e^x(e^x - n) + 1e^{2x},$$

$$\text{и } P_n''(x) = e^x(e^x - n) + 3e^{2x},$$

причем дифференциальное уравнение зависимости имеет вид:

$$P_n''(x) - 3P_n'(x) + 2P_n(x) = 0$$

Запишем:

$$y = e^x(e^x - n) + 0e^{2x}$$

$$y' = e^x(e^x - n) + 1e^{2x}$$

$$y'' = e^x(e^x - n) + 3e^{2x}$$

$$y''' = e^x(e^x - n) + 7e^{2x}$$

$$y^{(4)} = e^x(e^x - n) + 15e^{2x}$$

...

$$y^{(k)} = e^x(e^x - n) + (2^k - 1)e^{2x}$$

Очевидно, что последние элементы каждой из этих формул создают ряд требуемых значений размерности многомерных векторных алгебр

$$\dots, -\frac{15}{16}, -\frac{7}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 0, 1, 3, 7, 15, \dots$$

Важным уравнением выступает рекуррентное соотношение для производных

$$y^{(k)} - 3y^{(k-1)} + 2y^{(k-2)} = 0$$

величины полиномов

$$P_{n+1}(x) = 3P_n(x) - 2P_{n-1}(x)$$

и разностей функций

$$dy^{(k)} - 3dy^{(k-1)} + 2dy^{(k-2)} = 0,$$

$$dy^{(i)} = y^{(i)} - y^{(i-1)}$$

Очевидно, что набор возможностей предложенной производящей функции весьма широк. Рекуррентное соотношение приемлемо для связи переменных в дифференциальной форме

$$y^{(k)} - 3y^{(k-1)} + 2y^{(k-2)} = 0,$$

$$\text{т.е. } y'' - 3y' + 2y = (e^x(e^x - n) + 3e^{2x}) - 3(e^x(e^x - n) + e^{2x}) + 2(e^x(e^x - n)) = 0$$

или

$$y''' - 3y'' + 2y' = (e^x(e^x - n) + 15e^{2x}) - 3(e^x(e^x - n) + 7e^{2x}) + 2(e^x(e^x - n) + 3e^{2x}) = 0$$

Разложение функции в степенной ряд можно осуществить, полагая $n=1$ и имея разность $y = e^{2x} - e^x$, тогда:

$$e^{2x} = 1 + \frac{(2x)^1}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^8}{8!} \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} \dots$$

$$y = 1 * \frac{x^1}{1!} + 3 * \frac{x^2}{2!} + 7 * \frac{x^3}{3!} + 15 * \frac{x^4}{4!} + 31 * \frac{x^5}{5!} + 63 * \frac{x^6}{6!} + 127 * \frac{x^7}{7!} + 255 * \frac{x^8}{8!} \dots$$

$$y(x) = e^{2x} - e^x$$

Разложение в степенной ряд, очевидно, дает требуемую последовательность размерностей векторных алгебр $0, 1, 3, 7, 15, \dots, 2^n - 1, \dots$

Вместе с тем, разности производных различных порядков дают иные последовательности с совершенно иными свойствами чисел, например:

$$\dots \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots$$

Отметим, что если определить закон умножения (и сложения) рассмотренного выше ряда чисел в виде

$$(a \otimes b) = (ab) + (a+b),$$

$$(a \oplus b) = (a+b) + (ab),$$

$$(a \otimes b) = (a \oplus b),$$

то таблица умножения (сложения) определяется числами того же ряда (Табл. 1).

Табл. 1

Таблица умножения и сложения чисел ряда $P_n(0)$									
\	1	3	7	15	31	63	127	255	511
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047
7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095
15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191
31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	16383
63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	16383	32767

Очевидно, что эти числа не выходят за рамки указанного числового ряда. Вторую последовательность эта таблица не удовлетворяет.

Силовые воздействия по законам Ньютона и Кулона не достаточно резко возрастают с уменьшением расстояния (обратно пропорционально второй степени расстояний (R^{-2})), что определяется трехмерной векторной алгеброй. Эту ситуацию могут исправить многомерные векторные алгебры, обеспечивающие обратную пропорциональность величин в значительно большей ($R^{-(D-1)}$) степени. Нами разработаны основы 7-, 15- и 31-мерной векторных алгебр [3-5], а также найден способ построения алгебр любой размерности из этого ряда чисел. При этом определены векторные произведения двух векторов 63-, 127-, 255-, 511-, 1023- и 2047-мерных векторных алгебр. Этот список может быть продолжен как угодно далеко.

Отметим, что вторым по значимости законом распределения силовых взаимодействий на относительно малых расстояниях является закон Юкавы, в котором использована экспоненциальная зависимость сил от расстояний наряду со степенной. Характерную экспоненциальную особенность проявляют ортогональные обобщенные многочлены Лагерра. Не менее важны также статистика Бозе-Эйнштейна и формула Планка, обеспечившие торжество степенных и экспоненциальных соотношений, а также комбинаторного анализа для описания силовых взаимодействий на малых расстояниях.

Таким образом, напрашивается вывод:

- применение многомерных векторных алгебр для описания процессов на малых расстояниях должно сопровождаться использованием экспоненциальных и степенных зависимостей сил от расстояний;
- необходимо использовать комбинаторный анализ при нахождении способов разбиения множества элементов на непустые подмножества;
- необходимо объединить законы Ньютона (Кулона), Юкавы, Планка, статистику Бозе-Эйнштейна и комбинаторный анализ на единой базе 2^n -1-мерных векторных алгебр.

Особое внимание следует уделить возможным законам сохранения. Отметим, что каждой векторной алгебре соответствует закон сохранения оператора момента импульсов как сумма квадратов операторов отдельных координат.

2^n-1 -мерным векторным алгебрам соответствует также (векторное) произведение операторов момента импульсов. Именно такой принцип формирования векторных алгебр должен быть положен в основу их определения.

История вопроса

В формировании выдающейся формулы Планка участвовало большое количество физиков и математиков. Наиболее существенные моменты относятся к получению законов теплового излучения. Наибольшие вклады в теорию теплового излучения абсолютно черных тел внесли такие знаменитые физики как, собственно, Планк, его предшественники по отдельным частям работы Релей и Джинс, получившие формулу Релея-Джинса, совпадающую с опытной зависимостью распределения излучения абсолютно черного тела по частотам и длинам волн в области больших длин волн. Кроме того, Больцман и Стефан получили закон Стефана-Больцмана для энергетической светимости абсолютно черного тела. Не менее важную зависимость получил Вин, объяснивший смещение максимального значения спектральной плотности энергетической светимости.

Суть вопроса

Предшественники Планка работали в рамках трехмерной классической термодинамики, как и Планк, построивший свою знаменитую формулу для спектральной плотности энергетической светимости, имеющую вид:

$$E_{\lambda,T} = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{e^{hc/k\lambda T} - 1},$$

где e - основание натуральных логарифмов, c - скорость света, k - постоянная Больцмана; указал на квантовый характер теплового излучения. В последующем периоде времени серьезные результаты были получены в рамках квантовой статистики Бозе-Эйнштейна и представлении о фотонном газе в фазовом пространстве, определяемом тремя пространственными координатами и тремя координатами импульса частиц. Эта статистика Бозе-Эйнштейна применима к фотонному газу в трехмерном пространстве (шестимерном фазовом пространстве). Квантовая статистика Бозе-Эйнштейна объяснила квантовый характер теплового излучения абсолютно черного тела.

Тем не менее, участие большого числа знаменитых ученых в данной теме не дало ответа на некоторые принципиальные вопросы. Основной из них - это размерность физического пространства, определяющая размерность фазового пространства и, вслед за этим, - размерность статистики Бозе-Эйнштейна и, как результат, видоизменение формулы Планка на случай изменения размерности пространства.

В настоящее время, спустя столетие, многомерные пространства никого не удивляют. Разработаны векторные алгебры для пространств больших размерностей (не только 1 и 3, но также векторные алгебры размерности 7, 15, 31), и найдены структурные константы алгебр больших размерностей (63, 127, ..., 1023, 2047, ...).

Это требует нахождения выражения для формулы Планка в случае больших размерностей пространства. С этой целью будем рассматривать формулу Планка в относительных единицах [1]. Для этого полагаем

$$z = \frac{kT}{hc} \lambda, \quad \lambda = \frac{hc}{kT} z, \quad d\lambda = \frac{hc}{kT} dz$$

Подставив эту замену в формулу Планка

$$E_{\lambda,T} = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{e^{hc/k\lambda T} - 1}$$

и произведя интегрирование, получим формулу

$$E_T = 2\pi hc^2 \left(\frac{kT}{hc} \right)^4 \int_0^\infty \frac{z^{-5}}{e^{1/z} - 1} dz, \quad \text{т.е.} \quad E_z = \frac{z^{-5}}{e^{1/z} - 1}$$

Интеграл в формуле для E_T равен $\frac{3!\pi^4}{90}$, так что попутно определяется закон Стефана-Больцмана с универсальными константами π , k , h , c :

$$\sigma_3 = 2\pi hc^2 * \frac{\pi^4}{15} \left(\frac{k}{hc} \right)^4$$

Формула Планка построена в трехмерном физическом пространстве. Вместе с тем, кроме трехмерного пространства можно предположить наличие иных пространственных структур. Размерности векторных алгебр при этом определяются числами, которые создают числовой ряд: 1, 3, 7, 15, 31, ..., 2^n-1 , ..., или рекуррентным соотношением

$$P_{n+1} = 3P_n - 2P_{n-1}$$

Будем рассматривать выражения формулы Планка для размерности пространства $D = 0, 1, 2, \dots$. Формула (Планка) в относительных единицах позволяет построить графики для $E_{z,n}$ как функцию z и n (или D). Эти графики для некоторых значений n приведены ниже. На Рис. 1 представлены графики зависимости

E_z при $z = z(\lambda)$ и $n = 2, 3, 4 \dots$ Жирной линии соответствует формула Планка, то есть $n = 5$ (или $D = 3$). Амплитуда $E_{n_{\max}}$ резко возрастает с ростом n , что представляет определенные неудобства в работе.

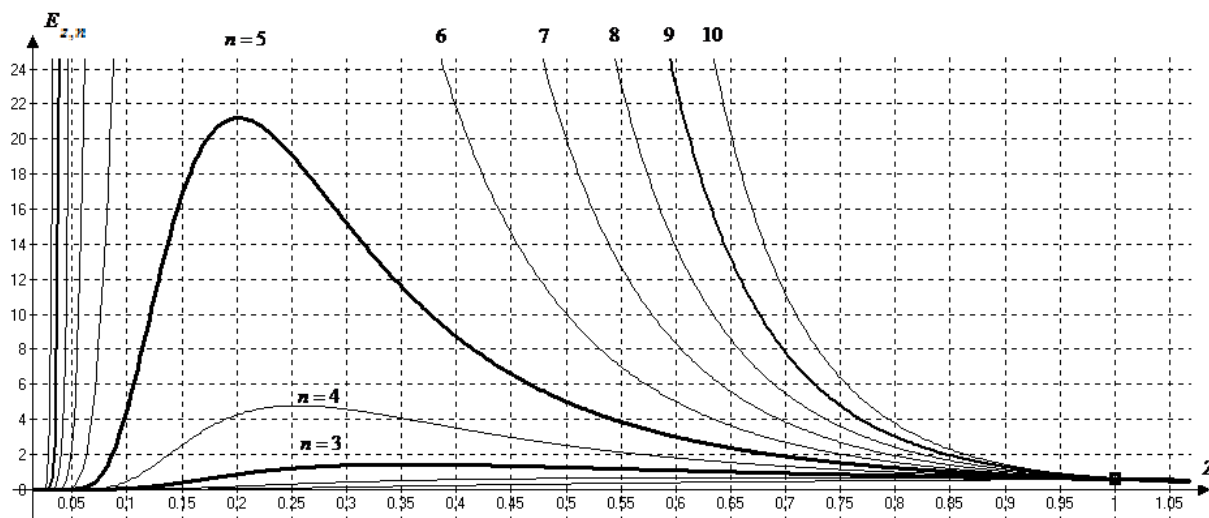


Рис. 1

Логарифмический масштаб по оси ординат исключает этот недостаток (Рис. 2), но усложняет анализ закономерности.

Рисунки 1 и 2 показывают, что имеют место две точки пересечения кривых Планка для различных значений n , определяемые началом координат и точкой $(1, \frac{-1}{e-1})$ для логарифмического масштаба по оси $\ln E_{n,z}$ или $(1, \frac{1}{e-1})$ для равномерного распределения по оси $E_{n,z}$. Ненулевая точка пересечения кривых может быть использована для целей масштабирования длин. При больших D кривые приобретают свойства единичного импульсного воздействия.

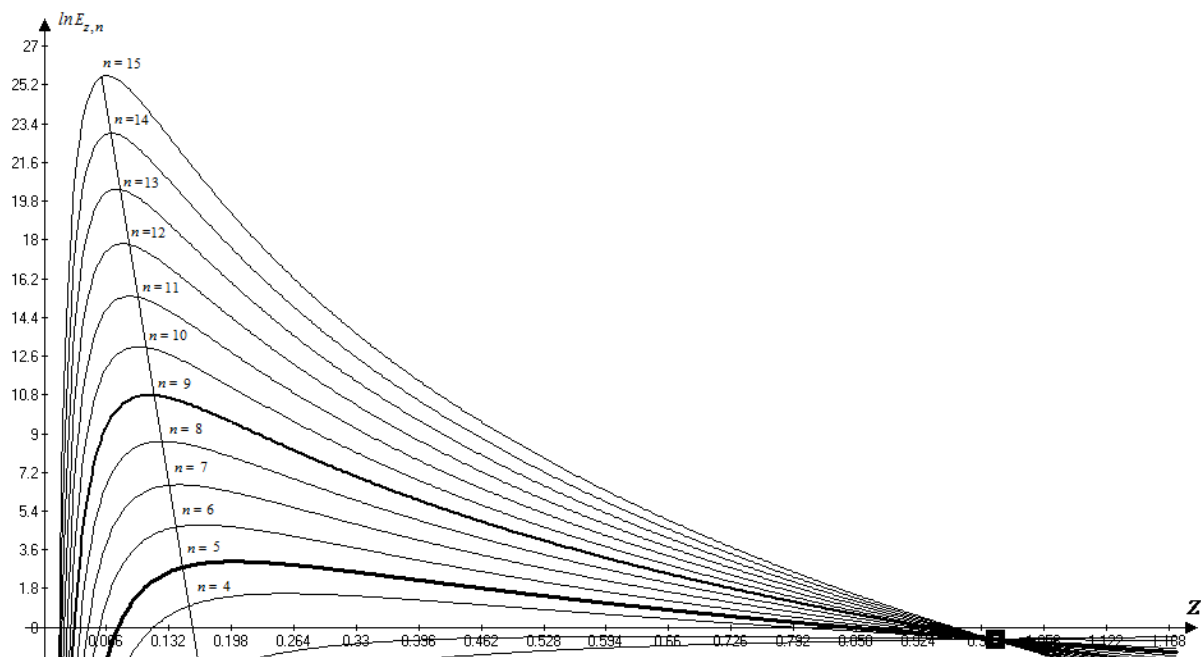


Рис. 2

Все графики для формулы Планка при изменении n имеют одинаковую форму, спадающую на малых и больших длинах волн. Увеличение n сопровождается резким ростом амплитуды $E_{n_{\max}}$. Имеет место смещение амплитуды $E_{z_{\max}}$ для различных n в сторону меньших длин волн при увеличении n . Степень смещения

беспрдельно уменьшается с ростом n . Её можно оценить, продифференцировав формулу (Планка) и решив уравнение $\frac{dE_{n,z}}{dz} = 0$. Имеем

$$E_{n,z} = \frac{z^{-n}}{e^{1/z} - 1}$$

Дифференцируя эту формулу по z , получаем соотношение

$$\frac{dE_{z,n}}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{z^{-n}}{e^{1/z} - 1} \right) = \frac{-nz^{-(n+1)}(e^{1/z} - 1) - z^{-(n+2)}e^{1/z}}{(e^{1/z} - 1)^2}$$

Полагая это выражение равным нулю, в результате преобразований получим

$$z_{\max}^{-1} = n(1 - e^{-1/z_{\max}})$$

Решение этого трансцендентного уравнения дает таблицу значений $z_{\max}$, соответствующих максимальному значению $E_{z_{\max}}$ и, очевидно, отклоняющемуся с ростом n в сторону меньших значений z . С ростом n степень отклонения $E_{z_{\max}}$ беспрдельно уменьшается (Табл. 2).

Табл. 2

D	n	$z_{\max}$	D	n	$z_{\max}$	D	n	$z_{\max}$
0	2	1,593624262	7	9	8,998881625	14	16	15,99999820
1	3	2,821439372	8	10	9,999545794	15	17	16,99999930
2	4	3,920690395	9	11	10,99981625	16	18	17,99999973
3	5	4,965114232	10	12	11,99992626	17	19	18,99999989
4	6	5,984901226	11	13	12,99997061	18	20	19,99999996
5	7	6,993575687	12	14	13,99998836	19	21	20,99999998
6	8	7,997309068	13	15	14,99999541	20	22	21,99999999

Следует отметить, что амплитуды $E_{z,n}$ для различных $z_{\max}$ лежат на одной и той же кривой, определяемой уравнением

$$E_{z_{\max}} \approx e^{\left(\frac{1}{3z}\right)^2} - 1$$

Возвращаясь от безразмерного вспомогательного переменного $z_{\max}$ к размерным величинам, находим:

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{kT} z_{\max} = \frac{hc}{4,97kT}$$

или

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4,97k} = 2,89 \cdot 10^{-1} [\text{см} \cdot \text{K}] = \text{const},$$

что соответствует закону Вина.

Формула Планка как функция частоты излучения имеет следующий вид:

$$E_{\nu,T} = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

где e - основание натуральных логарифмов, c - скорость света, k - постоянная Больцмана. Будем рассматривать формулу Планка в относительных единицах. Для этого полагаем

$$y = \frac{h}{kT} \nu, \quad \nu = \frac{kT}{h} y, \quad d\nu = \frac{kT}{h} dy$$

Подставив эту замену в формулу Планка

$$E_{\nu,T} = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

и произведя интегрирование, получим формулу

$$E_T = 2\pi hc^2 \left(\frac{kT}{hc} \right)^4 \int_0^\infty \frac{y^3}{e^y - 1} dy, \quad \text{т.е.} \quad E_y = \frac{y^3}{e^y - 1}$$

Интеграл в формуле для E_T равен $\frac{3!\pi^4}{90}$, так что попутно определяется закон Стефана-Больцмана с универсальными константами π , k , h , c :

$$\sigma_3 = 2\pi h c^2 * \frac{\pi^4}{15} \left(\frac{k}{hc}\right)^4$$

Будем рассматривать выражения формулы Планка для размерности пространства $D = 0, 1, 2, \dots$ в зависимости от частоты излучения в относительных единицах. Это позволяет построить графики для $E_{y,D}$ как функцию y и D . Эти графики для некоторых значений D приведены ниже. На Рис. 3 представлены графики зависимости E_y при $y = y(\nu)$ и $D = 2, 3, 4, \dots$. Жирной линии соответствует формула Планка, то есть $D=3$, а полужирной $D=7$. Наблюдается слоёность пространства, построенного из жирных и нежирных линий, соответствующих размерности векторных алгебр (1,3,7,15...) либо несоответствующих этой размерности. Амплитуда $E_{y_{\max}}$ резко возрастает с ростом D , что является недостатком.

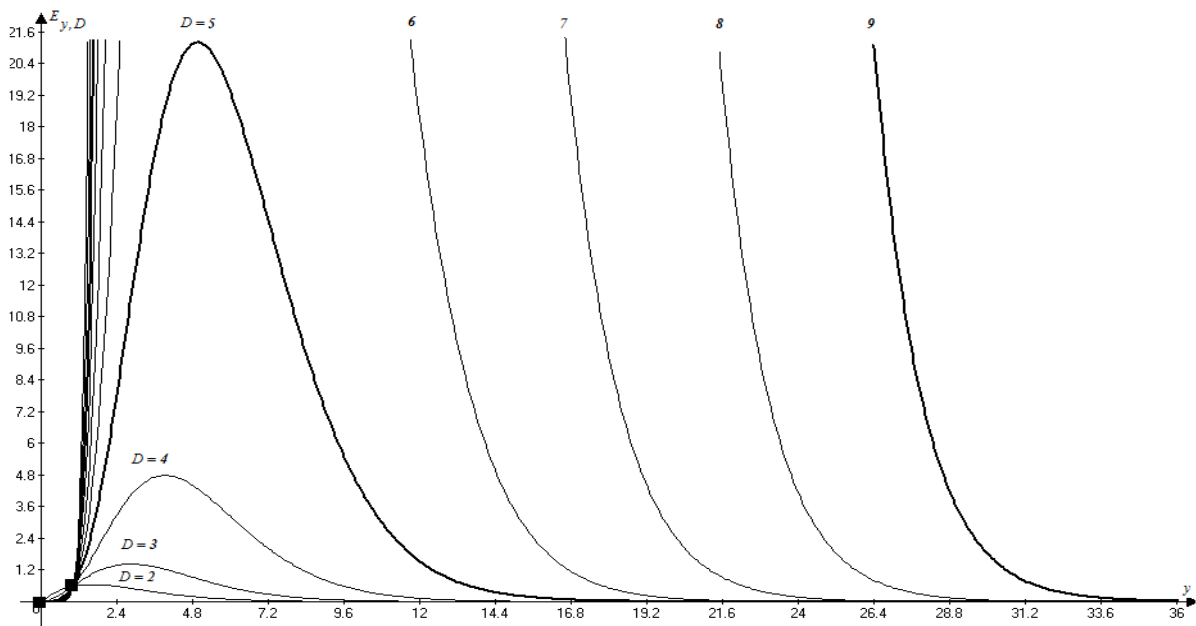


Рис. 3

Логарифмический масштаб по оси ординат исключает этот недостаток (Рис. 4), но усложняет анализ закономерности.

Рис. 3 и 4 показывают, что имеют место две точки пересечения кривых Планка для различных значений D , определяемые началом координат и точкой $(1, \frac{-1}{e-1})$ для логарифмического масштаба по оси $\ln E_{y,D}$ или $(1, \frac{1}{e-1})$ для равномерного распределения по оси $E_{y,D}$. Ненулевая точка пересечения кривых может быть использована для целей масштабирования времени (частоты).

Все графики для формулы Планка при изменении D имеют одинаковую форму, спадающую на малых и больших частотах. Увеличение D сопровождается резким ростом амплитуды $E_{D_{\max}}$. Имеет место смещение амплитуды $E_{y_{\max}}$ для различных D в сторону больших частот при увеличении D . Степень смещения можно

оценить, решив уравнение $\frac{dE_{y,D}}{dy} = 0$.

Продифференцируем формулу (Планка)

$$\frac{dE_{y,D}}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{y^D}{e^y - 1} \right) = \frac{Dy^{D-1}(e^y - 1) - y^D e^y}{(e^y - 1)^2}$$

и положим

$$(D(e^y - 1) - ye^y) = 0$$

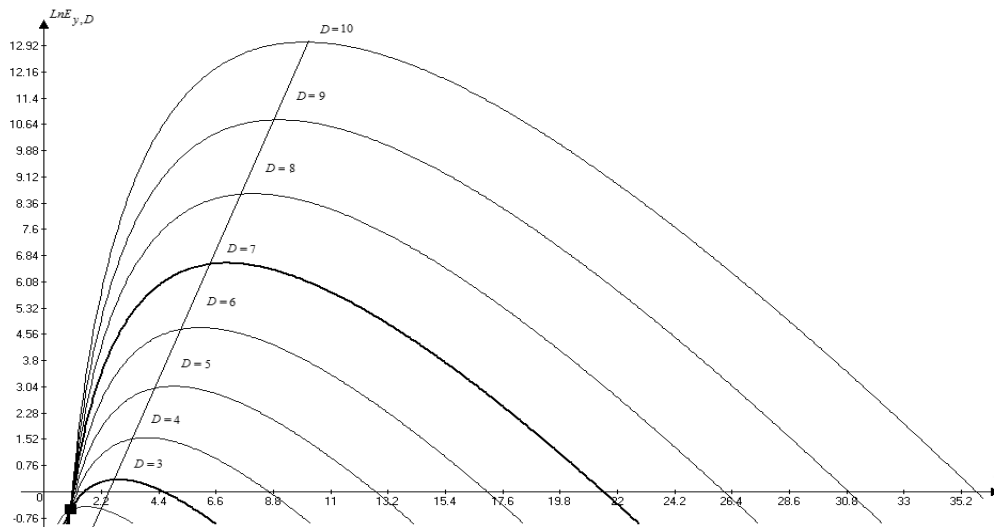


Рис. 4

Отсюда, умножая на e^{-y} , получим соотношение

$$y_{\max} = D(1 - e^{-y_{\max}})$$

Решение этого трансцендентного уравнения дает таблицу значений $y_{\max}$, соответствующих максимальному значению $E_{y_{\max}}$ и, очевидно, отклоняющемуся с ростом D в сторону больших значений y . С ростом D степень отклонения $E_{y_{\max}}$ беспрестанно уменьшается (Табл. 3).

Табл. 3

D	$y_{\max}$	D	$y_{\max}$	D	$y_{\max}$
2	1,593624262	9	8,998881625	16	15,99999820
3	2,821439372	10	9,999545794	17	16,99999930
4	3,920690395	11	10,99981625	18	17,99999973
5	4,965114232	12	11,99992626	19	18,99999989
6	5,984901226	13	12,99997061	20	19,99999996
7	6,993575687	14	13,99998836	21	20,99999998
8	7,997309068	15	14,99999541	22	21,99999999

Следует отметить, что амплитуды $E_{y,D}$ для различных $y_{\max}$ лежат на одной и той же кривой, определяемой уравнением

$$E_{y_{\max}} \approx e^{\left(\frac{y}{3}\right)^2} - 1$$

Возвращаясь от безразмерного вспомогательного переменного $y_{\max}$ к размерным величинам, находим:

$$\nu_{\max} = \frac{kT}{h} y_{\max} = \frac{2,821kT}{h}$$

или

$$\frac{\nu_{\max}}{T} = \frac{2,821k}{h} = 5,87 \cdot 10^{10} \left[\frac{1}{K \cdot c} \right] = const,$$

что является аналогом закона Вина.

При этом $\nu_{\max}$ пропорциональна температуре.

Очевидно, рассмотрение зависимости y и z от n и D дает целый ряд постоянных размерных и безразмерных величин, а также соотношений между ними при изменении n и D , например, соотношение

$$\lambda_{\max} \cdot \nu_{\max} = \frac{2,82}{4,97} c = 0,567 c \text{ [см/с]}$$

Такие соотношения можно строить при каждом значении n . Например:

$$\frac{\nu_{\max}}{\lambda_{\max} T^2} = 2,031 \cdot 10^{12} \left[\frac{1}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{K}^2} \right] = const$$

Площадь под кривой (Планка) в относительных единицах можно найти, используя соотношение

$$S = \Gamma * \zeta,$$

где Γ - гамма-, а ζ - дзета-функция Римана.

Определим характер изменения площадей кривых (Планка) в зависимости от n или D (Табл. 4), полученные путем интегрирования.

Табл. 4

$D, (n)$	(3)	2,(4)	3,(5)	4,(6)	5,(6)	6,(8)	7,(9)	...	15,(17)
$\Gamma(D+1)$	1,00000	2,00000	6,00000	24,0000	120,000	720,000	5040,00	...	$1,308*10^{12}$
$\zeta(D+1)=$	1,64493	1,20205	1,08232	1,03692	1,01734	1,00834	1,00407	...	1,00001528
$=\zeta(D+1)$	$\pi^2/6,00$	$\pi^3/25,79$	$\pi^4/90,0$	$\pi^5/295,1$	$\pi^6/925,0$	$\pi^7/2995$	$\pi^8/9450$	...	$\pi^{16}/90032220$
$S = \Gamma * \zeta$	1,64493	2,40410	6,49390	24,8861	122,081	726,005	5060,51	...	$1,308*10^{12}$
зн. $\zeta/D!$	6,00000	12,8970	15,0000	12,2967	7,70830	4,16010	1,87500	...	$6,8848*10^{-5}$

Очевидно, что площадь графика $S = \Gamma(D+1) * \zeta(D+1)$, характеризующая энергию, с ростом размерности пространства интенсивно возрастает. Коэффициент пропорциональности определяется числами z_{max} либо y_{max} в Таблицах 2, 3. Отметим, что для распределений по частотам и длинам волн площади графиков при данном D совпадают. Функция (знаменатель $\zeta/D!$) дает график, совпадающий с кривой Планка, т.е. (зн. $\zeta/D!$) = $E_{v,D}$.

При этом

$$n-1 = D+1, \quad \Gamma(n-1) = D!, \quad \Gamma(D+1) = D!,$$

$$\zeta(n-1) = \frac{\pi^{n-1}}{(зн.\zeta)(n-2)!}, \quad \zeta(D+1) = \frac{\pi^{D+1}}{(зн.\zeta)D!}$$

Интегрирование дает

$$\int_0^\infty \frac{z^{-n}}{e^{1/z}-1} dz = \Gamma(n-1)\zeta(n-1), \quad \int_0^\infty \frac{y^D}{e^y-1} dy = \Gamma(D+1)\zeta(D+1)$$

Коэффициент пропорциональности определяется формулой Планка.

Так, в случае $n=5$ ($D=3$)

$$\Gamma(4) = 3!$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{3! * 15},$$

причем постоянная Стефана-Больцмана равняется

$$\sigma_3 = 2\pi hc^2 * \frac{\pi^4}{15} \left(\frac{k}{hc}\right)^4$$

При иной размерности пространства меняются величины

$$\Gamma(D+1) = D!, \quad \zeta(D+1) = \frac{\pi^{D+1}}{(зн.\zeta)D!},$$

а, следовательно, и σ_D . Например, при $D=7$

$$\sigma_7 = 2\pi hc^2 \frac{8\pi^8}{15} \left(\frac{k}{hc}\right)^8,$$

при $D=15$

$$\sigma_{15} = 2\pi hc^2 \frac{9,003*10^7}{1,308*10^{12}} \pi^{16} \left(\frac{k}{hc}\right)^{16}$$

В трехмерном пространстве

$$\nu_{max} = \frac{kT}{h} y_{max} = 2,82 \frac{kT}{h} \quad \frac{\nu_{max}}{T} = 2,82 \frac{k}{h} = const$$

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{kT} z_{max} = \frac{hc}{4,97kT}, \quad \lambda_{max} T = \frac{hc}{4,97k} = const$$

$$\lambda_{max} \nu_{max} = y_{max} z_{max} = \frac{2,82c}{4,97} = 0,567c = const$$

В семимерном пространстве

$$v_{\max} = \frac{kT}{h} y_{\max} = 6,993 \frac{kT}{h}, \quad \frac{v_{\max}}{T} = 6,993 \frac{k}{h} = \text{const}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{kT} z_{\max} = \frac{hc}{8,998kT}, \quad \lambda_{\max} T = \frac{hc}{8,998k} = \text{const}$$

$$\lambda_{\max} v_{\max} = y_{\max} z_{\max} = \frac{6,993c}{8,998} = 0,777c = \text{const}$$

Для пятнадцатимерного пространства

$$v_{\max} = \frac{kT}{h} y_{\max} = 14,999 \frac{kT}{h}, \quad \frac{v_{\max}}{T} = 14,999 \frac{k}{h} = \text{const}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{kT} z_{\max} = \frac{hc}{16,999kT}, \quad \lambda_{\max} T = \frac{hc}{16,999k} = \text{const}$$

$$\lambda_{\max} v_{\max} = \frac{14,999c}{16,999} = 0,882c = \text{const}$$

Коэффициенты ...,0,567*c,...0,777*c,...0,882*c,... в третьих строчках характеризуют дискретность скорости движения частиц, которая проявляется уровнями скорости. Эти уровни заданы размерностью векторных алгебр, могут быть рассчитаны с большой точностью, так что спектр скоростей частиц строго фиксирован. В области малых скоростей (меньших, чем 0,4 с) расстояния между соседними уровнями существенно уменьшаются, и спектр скоростей плавно переходит в непрерывный.

Получим также разложение функции (Планка)

$$E_{v,D} = \frac{v^3}{e^v - 1}$$

в степенной ряд для $D=2,3,4, \dots$

Имеем, для $v_i=2,3,4, \dots$

$$-\frac{v^1}{2!} + \left(\frac{v^0}{1!} + \frac{v^2}{2!3!} - \frac{v^4}{3!5!} + \frac{2!v^6}{5!7!} - \frac{4!v^8}{6!8!} \right)$$

$$-\frac{v^2}{2!} + \left(\frac{v^1}{1!} + \frac{v^3}{2!3!} - \frac{v^5}{3!5!} + \frac{2!v^7}{5!7!} - \frac{4!v^9}{6!8!} \right)$$

$$-\frac{v^3}{2!} + \left(\frac{v^2}{1!} + \frac{v^4}{2!3!} - \frac{v^6}{3!5!} + \frac{2!v^8}{5!7!} - \frac{4!v^{10}}{6!8!} \right)$$

$$-\frac{v^4}{2!} + \left(\frac{v^3}{1!} + \frac{v^5}{2!3!} - \frac{v^7}{3!5!} + \frac{2!v^9}{5!7!} - \frac{4!v^{11}}{6!8!} \right)$$

Отметим, что эти функции дают графики, совпадающие с функцией Планка при низких частотах (Рис. 5). С увеличением числа элементов ряда степень совпадения графиков увеличивается. Очевидно, что многочлены в скобках отличаются только множителем v^k .

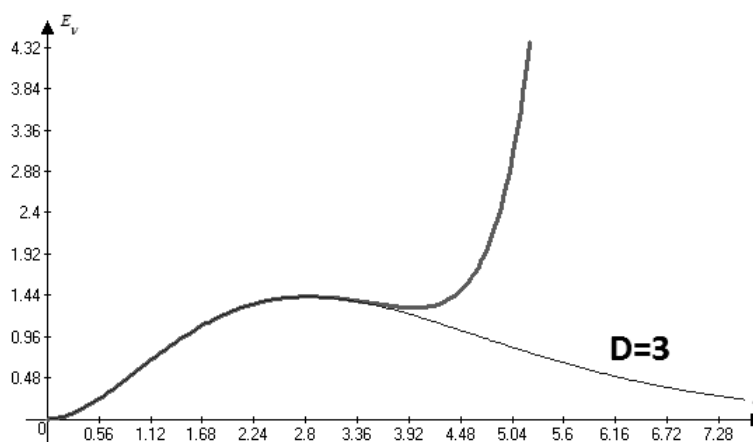


Рис. 5

Заключение

Таким образом, описание силовых взаимодействий может быть связано с увеличением размерности (2^n-1) -пространства с уменьшением расстояний от привычных значений в область микромира. Размерность векторных алгебр может быть сколь угодно большой. Векторные алгебры большой размерности могут задействовать формулу Планка с изменением показателя степени n или D в степенной части функции. Это позволяет рассматривать единое поле как структуру, определяемую размерностью пространства, т.е. степенью степенной части формулы Планка.

Очевидно, попытка описать силовые взаимодействия в области малых расстояний значениями, значительно превышающими величину, обратно пропорциональную квадрату расстояний, приводит к необходимости повышения степени в формуле Планка. Сама формула при этом существенно видоизменяется, значение степени в ней может определяться размерностью многомерной векторной алгебры, причем с ростом размерности неограниченно возрастают силовые взаимодействия между частицами, и осуществляется смещение максимума кривой в сторону весьма малых значений расстояний.

Площадь под кривой (Планка) определяется через гамма- и дзета-функции и интенсивно растет с ростом D и n . При этом гамма-функция определяет факториал D , а дзета-функция - число π^{D+1} . Константы связи между переменными в многомерных пространствах индивидуальны для каждой из размерностей.

Необходимо отметить, что повышение размерности векторных алгебр сопровождается лишь изменением соотношений между координатами, поскольку алгебры любой меньшей размерности являются подалгебрами более высокой размерности. Это приводит к тому, что соотношения между координатами меняются дискретно, как и количество задействованных координат. Так, трехмерная алгебра получается из семимерной пренебрежением значениями четырех координат $x_4, x_5, x_6, x_7 = 0$, аналогично можно пренебрегать координатами в алгебрах больших размерностей. Таким образом, имеет место единый способ описания силовых взаимодействий по мере уменьшения расстояний между частицами вплоть до самых малых значений.

Итак, изменение степени частоты в формуле Планка позволяет использовать эту формулу в многомерном слоёном пространстве с фиксацией значений дискретных уровней не только энергии, но и скорости движения частиц, сколь угодно близкой к величине c .

Список литературы

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
2. Зисман Г. А., Тодес О. М. Курс общей физики. М: Наука, 1972. Т. 3. 496 с.
3. Коротков А. В. Элементы многомерного (15- и 31-мерного) векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2012. 76 с.
4. Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2011. 36 с.
5. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.

УДК 316.4.066

Социологические науки

Статья представляет собой анализ результатов социологического исследования детерминации поведенческих установок молодых участников добровольческого движения в Российской Федерации, проведенного в январе 2013 года методом формализованного интервью в фокус-группе. Базируясь на полученных данных, автор дает практические рекомендации, позволяющие повысить эффективность как процесса привлечения новых волонтеров, так и собственно молодежной добровольческой деятельности на современном этапе.

Ключевые слова и фразы: добровольческая деятельность; фокус-группа; мотивация; поведенческая установка; эффективность.

Крапивенский Анатолий Соломонович, к. соц. н.

Волгоградский институт молодежной политики и социальной работы
krapivensky@list.ru

СОЦИАЛЬНО-МОТИВАЦИОННЫЕ АСПЕКТЫ МОЛОДЕЖНОЙ ДОБРОВОЛЬЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ[©]

Для современной российской молодежи добровольческая деятельность (волонтерство) представляет собой относительно новый вид социальной активности, если рассматривать его в контексте изменившихся с начала 90-х годов XX века социально-экономической и идеологической составляющих общественного устройства.

Как известно, «социальная среда предъявляет к человеку нравственные, деловые и социальные требования. В ходе их выполнения у него формируются определенные взгляды, характер, привычки, развивается его психика, от простейших в ней процессов до психологических свойств личности» [1, с. 23].