Легкоконец Владимир Калинникович

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОПУЛЯЦИЙ ЖИВОТНЫХ И РАСТЕНИЙ

Устойчивость одномерных динамических систем, которые лежат в основе математических моделей популяций растений и животных, играет важную роль в экологии. Применяемый ранее метод определения устойчивости полностью не решал эту проблему. Предлагается метод, основанный на теории А. М. Ляпунова, который решает её полностью.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2013. № 3 (70). C. 96-102. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/3/

УДК 51
Физико-математические науки

Устойчивость одномерных динамических систем, которые лежат в основе математических моделей популяций растений и животных, играет важную роль в экологии. Применяемый ранее метод определения устойчивости полностью не решал эту проблему. Предлагается метод, основанный на теории А. М. Ляпунова, который решает её полностью.

Ключевые слова и фразы: теория устойчивости; нелинейная динамическая дискретная система; система дифференциальных уравнений; система разностных уравнений; математическая модель популяций.

Легкоконец Владимир Калинникович
Институт управления, бизнеса и права, г. Пятигорск
vladimirlegkokonec@bk.ru

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОПУЛЯЦИЙ ЖИВОТНЫХ И РАСТЕНИЙ©

1. Введение

Значительная часть математических моделей популяций растений и животных, используемых в экологии, может быть представлена нелинейными одномерными динамическими системами. Для определения устойчивости этих систем используется принцип сжатых отображений. Он не решает полностью данную задачу. Без рассмотрения остаются критические случаи. В предлагаемой статье доказывается, что для одномерных динамических моделей, используемых в экологии, можно без ограничений использовать теорию устойчивости А. М. Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений. Она полностью решает проблему устойчивости для рассматриваемых дискретных динамических систем.

2. Дифференциальные уравнения, сохраняющие устойчивость при дискредитации

В работе [1] изучаются дифференциальные уравнения, которые сохраняют устойчивость при дискредитации, а также доказывается устойчивость полученных при этом разностных уравнений.

Далее исследуются именно такие уравнения. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_s = \sum_{j=1}^{n} p_{sj} f_j(z_j), \quad s = 1,....,n \tag{1}$$

Здесь p_{sj} - постоянные коэффициенты, функции $f_j(z_j)$ определены и непрерывны при $\left|z_j\right| \le H$ $(0 < H \le +\infty)$ и обладают свойством $z_j f_j(z_j) > 0$ при $z_j \ne 0$. Соответствующая (1) система разностных уравнений:

$$y_s(k+1) = y_s(k) + h\sum_{j=1}^{n} p_{sj} f_j(y_j(k)), \quad s = 1,......,n \tag{2}$$

Здесь h - шаг дискретизации $(h > 0)$, а целочисленный аргумент k принимает значения 0, 1,… .

Допустим, что функции $f_j(z_j)$ в правой части системы (1) определены, непрерывны и $\left|z_j\right| < H$ $\left(0 < H \le +\infty\right)$. Предположим, что выполнены условия a и b:

a. Функции $f_j(z_j)$ обладают свойством $z_j f_j(z_j) > 0$.

b. Для любого числа $H_1 \in (0, H)$ функции $f_1(z_1),......,f_n(z_n)$ в области $\left\|z\right\| < H_1$ (здесь и всюду далее $\left\|.\right\|$ - евклидова норма вектора) удовлетворяют условию Липшица, т.е. можно указать положительную постоянную $L = L(H_1)$, такую что, если $\left|z_j^{'}\right| < H_1$, $\left|z_j^{''}\right| < H_1$, то справедливы неравенства

$$\left|f_j(z_j^{'}) - f_j(z_j^{''})\right| \le L\left|z_j^{'} - z_j^{''}\right|, \quad j = 1,.....,n$$

При выполнении ограничений a и b имеет место согласованность между дифференциальными и разностными уравнениями.

Рассмотрим возмущенную систему

$$y_s(k+1) = y_s(k) + h\sum_{j=1}^{n} p_{sj} f_j(y_j(k)) + hq_s(k, y(k)), \quad s = 1,.....,n \tag{3}$$

Здесь функции $q_s(k,z)$ заданы при $k=0,1.....$, $\|z\|<\rho(0<\rho\le H)$, непрерывны по z и удовлетворяют неравенствам

$$\left|q_s(k,z)\right|\le b_s\left(\sum_{j=1}^{n}\left|f_j(z_j)\right|\right)^{\sigma},\ s=1,.....,n \tag{4}$$

где $b_s>0$, $\sigma>0$. Считаем, что выполнены предположения a и b, и допустим, что $f_j(z_j)$ определены и непрерывны при $\left|z_j\right|<H(0<H\le\infty)$, обладают свойством $z_j f_j(z_j)>0$. В статье [Там же] доказано, что при выполнении этих условий имеет место согласованность между системой дифференциальных уравнений (1) и системой разностных уравнений (3).

Системы уравнений (2), (3) находят широкое применение в эконометрике, системах автоматического регулирования, моделировании нейронных сетей и экологии.

Если заданы нелинейные дискретные динамические системы вида

$$y_t=F(y_{t-1},) \tag{5}$$

которые можно представить в виде (2), (3), то к ним можно применить, без всяких ограничений, теорию устойчивости А. М. Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений. В нелинейных дискретных динамических системах вида (5), которые применяются в экологии, функция $F(y_{t-1},)$ определена, непрерывна и ограничена на отрезке $[0,H]$, а также $F(y_{t-1},)\ge 0$ и $y_{t-1}\ge 0$.

c. Если $y_{t-1}>0$, то и $F(y_{t-1},)>0$.

3. Основные положения теории устойчивости А. М. Ляпунова

Далее кратко изложим основные положения теории устойчивости, которые применяются в данной статье. Подробное изложение этой теории смотрите в работах [2; 5; 7].

Сначала находим неподвижные точки функции $F(y_{t-1})$. Затем разложим функцию $F(y_{t-1})$ в ряд Тейлора в этих точках. Сумму членов второго порядка и выше обозначим как $s(y_{t-1})$. Затем находим собственные числа линеаризированной системы.

i) Если все собственные числа этой системы меньше единицы, то рассматриваемая дискретная динамическая система устойчива.

ii) Наличие хотя бы одного собственного числа ведет к неустойчивости рассматриваемой дискретной динамической системы.

iii) Случай, когда имеются собственные числа, равные единице, требует дальнейшего анализа. Он является простым, если сумма членов второго и выше порядков разложения в ряд Тейлора имеет вид:

$$s(y_{t-j})=g_1 y_{t-j}^{m}+g_2 y_{t-j}^{m+1}+...$$

где $m\ge 2$, $g_1,g_2...$ - некоторые постоянные. В данном частном случае задача устойчивости решается сразу. В случае четного m, дискретная динамическая система неустойчива. Если m - число нечетное, то в случае $g<0$ дискретная динамическая система устойчива, а в случае $g>0$ наоборот.

4. Доказательство возможности применения теории устойчивости Ляпунова к рассматриваемым дискретным динамическим системам

Рассматриваемые в предлагаемой статье математические модели популяций представлены дискретными динамическими системами вида (5), где $y_t>0$, $y_{t-1}>0$ и $F(y_{t-1})$=0 только при y_{t-1}=0. Преобразуем (5) к виду $y_t=y_{t-1}+F(y_{t-1})-y_{t-1}$. Если допустить, что $h\sum_{j=1}^{n}p_{sj}f_j(y_j(k))=F(y_{t-1})$, $hq_s(k,y(k))=-y_{t-1}$ и $s=j=h=n=1$, $p_{11}=1$, то (5) будет приведено к виду (3). Условие (4) для рассматриваемых экологических моделей будет следующим

$$y_{t-1}=\le b_1\left|F(y_{t-1})\right|^{\sigma} \tag{6}$$

Для выполнения условия (6) всегда можно подобрать $b_1=\dfrac{y_{t-1}}{\left|F(y_{t-1})\right|^{\sigma}}$, где $y_{t-1}>0$. Произведение $F(y_{t-1})y_{t-1}>0$, если $y_{t-1}\ne 0$. Это следует из условия c. Для функций $F(y_{t-1})$, которые используются в дискретных динамических системах, применяемых в математических моделях популяций, всегда будет выполнено условие b, так как они непрерывны и ограничены на отрезке $[0,H]$. Таким образом, к рассматриваемым дискретным динамическим системам применима теория устойчивости А. М. Ляпунова.

5. Примеры определения устойчивости дискретных динамических систем, используемых для моделирования популяций

Рассмотрим несколько нелинейных дискретных динамических систем, которые представляют различные математические модели популяций, и определим их устойчивость в точке y_{t-1}=0.

1) Нелинейная дискретная динамическая система:

$$y_t = \frac{ry_{t-1}}{1+by_{t-2}^2} \tag{7}$$

$r > 0$, $b > 0$

Функция $F(y_{t-1}) = \frac{ry_{t-1}}{1+by_{t-2}^2}$ обращается в нуль, если $y_{t-1} = 0$. Разложим данную функцию в ряд Тейлора в окрестности точки нуль.

Учитывая, что

$$\frac{1}{1+by_{t-2}^2} = 1 - by_{t-2}^2 + b^2 y_{t-2}^4 - b^3 y_{t-2}^6 + \ldots\ldots + (-1)^n b^n y_{t-2}^{2n} + \ldots$$

получим:

$$\frac{ry_{t-1}}{1+by_{t-2}^2} = ry_{t-1}\left(1 - by_{t-2}^2 + b^2 y_{t-2}^4 - b^3 y_{t-2}^6 + \ldots\ldots + (-1)^n b^n y_{t-2}^{2n} + \ldots\ldots\right)$$

или

$$y_t = \frac{ry_{t-1}}{1+by_{t-2}^2} = ry_{t-1} - bry_{t-1}y_{t-2}^2 + rb^2 y_{t-1}y_{t-2}^4 - rb^3 y_{t-1}y_{t-2}^6 + \ldots\ldots + (-1)^n rb^n y_{t-1}y_{t-2}^{2n} + \ldots\ldots$$

$$s(y_{t-1}) = -bry_{t-1}y_{t-2}^2 + rb^2 y_{t-1}y_{t-2}^4 - rb^3 y_{t-1}y_{t-2}^6 + \ldots\ldots + (-1)^n rb^n y_{t-1}y_{t-2}^{2n} + \ldots$$

Отсюда следует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} y_t = ry_{t-1} + 0 * y_{t-2} + s(y_{t-1}) \\ y_{t-1} = y_{t-1} + 0 * y_{t-2} \end{cases}$$

Представим данную систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s(y_{t-1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} r-\lambda & 0 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (r-\lambda)\times(-\lambda) - 0\times 1 = 0$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = r$. Его корни являются собственными числами матрицы A. Отсюда, устойчивость рассматриваемого процесса нелинейной дискретной динамической системы зависит от коэффициента r. Если $r < 1$, то рассматриваемая нелинейная дискретная динамическая система устойчива, а если $r > 1$, рассматриваемая система не устойчива. Случай $r = 1$ рассматривается отдельно. Первым членом разложения в ряд Тейлора функции $s(y_{t-1})$ является $-bry_{t-1}y_{t-2}^2$, где y_{t-1} возводится в четную степень, на основании iii) следует, что при $r = 1$ рассматриваемая система (7) неустойчива. Окончательно получим: нелинейная дискретная динамическая система (7) устойчива, если $r < 1$, и - не устойчива, если $r \geq 1$.

2) Нелинейная модель Скеллама, ей соответствует нелинейная дискретная динамическая система:

$$y_t = a(1 - e^{-by_{t-1}}) \tag{8}$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Функция $F(y_{t-1}) = a(1 - e^{-by_{t-1}})$ обращается в нуль при $y_{t-1} = 0$. Разложим данную функцию в ряд Тейлора в окрестности точки нуль.

Учитывая, что

$$e^{-by_{t-1}} = 1 - by_{t-1} + b^2\frac{y_{t-1}^2}{2!} - b^3\frac{y_{t-1}^3}{3!} + b^4\frac{y_{t-1}^4}{4!} + \ldots + (-1)^n b^n \frac{y_{t-1}^n}{n!} + \ldots$$

получим:

$$a(1 - e^{-by_{t-1}}) = a\left(1 - 1 + by_{t-1} - b^2\frac{y_{t-1}^2}{2!} + b^3\frac{y_{t-1}^3}{3!} - b^4\frac{y_{t-1}^4}{4!} + \ldots - (-1)^n b^n \frac{y_{t-1}^n}{n!}\right) =$$

$$= aby_{t-1} - ab^2\frac{y_{t-1}^2}{2!} + ab^3\frac{y_{t-1}^3}{3!} - ab^4\frac{y_{t-1}^4}{4!} + \ldots - (-1)^n ab^n \frac{y_{t-1}^n}{n!}$$

Отсюда следует:

$$y_t = aby_{t-1} - ab^2\frac{y_{t-1}^2}{2!} + ab^3\frac{y_{t-1}^3}{3!} - ab^4\frac{y_{t-1}^4}{4!} + ... - (-1)^n ab^n\frac{y_{t-1}^n}{n!}$$

Тогда функция $s(y_{t-1}) = -ab^2\frac{y_{t-1}^2}{2!} + ab^3\frac{y_{t-1}^3}{3!} - ab^4\frac{y_{t-1}^4}{4!} + ... - (-1)^n ab^n\frac{y_{t-1}^n}{n!}$

Отсюда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_t = aby_{t-1} + 0 * y_{t-2} + s(y_{t-1}) \\ y_{t-1} = y_{t-1} + 0 * y_{t-2} \end{cases}$$

Представим данную систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s(y_{t-1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} ab-\lambda & 0 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (ab-\lambda)\times(-\lambda) - 0\times 1 = 0$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = ab$. Его корни являются собственными числами матрицы A. Отсюда, устойчивость рассматриваемой нелинейной дискретной динамической системы зависит от произведения ab. Если $ab<1$, то рассматриваемая система устойчива. При $ab>1$ рассматриваемая система не устойчива. Случай $ab=1$ рассматривается отдельно. Первый член разложения в ряд Тейлора функции $s(y_{t-1})$ это $-ab^2\frac{y_{t-1}^2}{2!}$. Здесь y_{t-1} возводится в четную степень. Тогда на основании iii) следует, что при $ab=1$ рассматриваемая система (8) устойчива. Окончательно получим: система (8) устойчива, если $ab<1$, и не устойчива, если $ab \geq 1$.

3) Нелинейная модель Морана, ей соответствует нелинейная дискретная динамическая система:

$$y_t = ay_{t-1}e^{-by_{t-1}} \tag{9}$$

где $a>0$, $b>0$.

Функция $F(y_{t-1}) = ay_{t-1}e^{-by_{t-1}}$ обращается в нуль, если $y_{t-1} = 0$. Разложим данную функцию в ряд Тейлора в окрестности точки нуль.

Учитывая, что

$$e^{-by_{t-1}} = 1 - by_{t-1} + b^2\frac{y_{t-1}^2}{2!} - b^3\frac{y_{t-1}^3}{3!} + b^4\frac{y_{t-1}^4}{4!} + ... + (-1)^n b^n\frac{y_{t-1}^n}{n!} + \dots$$

получим:

$$a(1-e^{-by_{t-1}}) = ay_{t-1}\left(1 - by_{t-1} + b^2\frac{y_{t-1}^2}{2!} - b^3\frac{y_{t-1}^3}{3!} + b^4\frac{y_{t-1}^4}{4!} + ... + (-1)^n b^n\frac{y_{t-1}^n}{n!}\right) =$$

$$= ay_{t-1} - aby_{t-1}^2 + ab^2\frac{y_{t-1}^3}{2!} - ab^3\frac{y_{t-1}^4}{3!} + ab^4\frac{y_{t-1}^5}{4!} + ... + (-1)^n ab^n\frac{y_{t-1}^{n+1}}{n!}$$

$$y_t = ay_{t-1} - aby_{t-1}^2 + ab^2\frac{y_{t-1}^3}{2!} - ab^3\frac{y_{t-1}^4}{3!} + ab^4\frac{y_{t-1}^5}{4!} + ... + (-1)^n ab^n\frac{y_{t-1}^{n+1}}{n!}$$

Тогда функция $s(y_{t-1}) = -aby_{t-1}^2 + ab^2\frac{y_{t-1}^3}{2!} - ab^3\frac{y_{t-1}^4}{3!} + ab^4\frac{y_{t-1}^5}{4!} + ... + (-1)^n ab^n\frac{y_{t-1}^{n+1}}{n!}$

Отсюда следует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} y_t = ay_{t-1} + 0 * y_{t-2} + s(y_{t-1}) \\ y_{t-1} = y_{t-1} + 0 * y_{t-2} \end{cases}$$

Представим данную систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s(y_{t-1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа матрицы $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\times(-\lambda)-0\times 1=0$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1=0$, $\lambda_2=a$. Его корни являются собственными числами матрицы A. Отсюда устойчивость рассматриваемой нелинейной дискретной динамической системы зависит от коэффициента a. Если $a<1$, то рассматриваемая система устойчива. При $a>1$ рассматриваемая система не устойчива. Случай $a=1$ рассматривается отдельно. Первым членом разложения в ряд Тейлора функции $s(y_{t-1})$ является $-aby_{t-1}^2$, где y_{t-1} возводится в четную степень, на основании iii) следует, что при $a=1$ рассматриваемая система (9) неустойчива. Окончательно получим: система (9) устойчива, если $a<1$, и не устойчива, если $a\geq 1$.

4) Нелинейная дискретная динамическая система:

$$y_t=\frac{ry_{t-1}}{(1+ay_{t-1})^2} \tag{10}$$

где $r>0$.

Функция $F(y_{t-1})=\dfrac{ry_{t-1}}{(1+ay_{t-1})^2}$ обращается в нуль, если $y_{t-1}=0$. Разложим данную функцию в ряд Тейлора в окрестности точки нуль.

Учитывая, что

$$\frac{1}{1+ay_{t-1}}=1-ay_{t-1}+a^2y_{t-1}^2-a^3y_{t-1}^3+........+(-1)^n a^n y_{t-1}^n+\ldots$$

получим:

$$ry_{t-1}\times\frac{1}{1+ay_{t-1}}\times\frac{1}{1+ay_{t-1}}=ry_{t-1}\left(1-ay_{t-1}+a^2y_{t-1}^2-a^3y_{t-1}^3+........+(-1)^n a^n y_{t-1}^n\right)\times$$
$$\times\left(1-ay_{t-1}+a^2y_{t-1}^2-a^3y_{t-1}^3+........+(-1)^n a^n y_{t-1}^n\right)$$

или

$$y_t=\frac{ry_{t-1}}{(1+ay_{t-1})^2}=ry_{t-1}\left(1-2ay_{t-1}+3a^2y_{t-1}^2-4a^3y_{t-1}^3+....+(-1)^{n-1}na^{n-1}y_{t-1}^{n-1}....\right)=$$
$$=ry_{t-1}-2ray_{t-1}^2+3ra^2y_{t-1}^3-4ra^3y_{t-1}^4+......+(-1)^{n-1}nra^{n-1}y_{t-1}^{n1}$$

Тогда функция $s(y_{t-1})=-2ray_{t-1}^2+3ra^2y_{t-1}^3-4ra^3y_{t-1}^4+......+(-1)^{n-1}nra^{n-1}y_{t-1}^{n1}$

Отсюда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_t=ry_{t-1}+0*y_{t-2}+s(y_{t-1}) \\ y_{t-1}=y_{t-1}+0*y_{t-2} \end{cases}$$

Представим данную систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s(y_{t-1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа матрицы $A=\begin{pmatrix} r & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} r-\lambda & 0 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (r-\lambda)\times(-\lambda)-0\times 1=0$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1=0$, $\lambda_2=r$. Его корни являются собственными числами матрицы A. Отсюда устойчивость рассматриваемой нелинейной дискретной динамической системы зависит от коэффициента r. Если $r<1$, то рассматриваемая система устойчива. При $r>1$ она не устойчива. Случай $r=1$ рассматривается отдельно. Первым членом разложения в ряд Тейлора функции $s(y_{t-1})$ является $-2ray_{t-1}^2$, где

y_{t-1} возводится в четную степень, на основании iii) следует, что при $r=1$ рассматриваемая система (10) неустойчива. Окончательно получим: система (10) устойчива, если $r<1$, и не устойчива, если $r\geq 1$.

5) Математическая модель контроля популяции с внесением стерильных насекомых, соответствующая ей нелинейная дискретная динамическая система:

$$y_t=\frac{Ry_{t-1}^2}{\frac{R-1}{M}y_{t-1}^2+y_{t-1}+S} \qquad (11)$$

$R>0$, $M>0$, S - популяция стерильных насекомых.

Функция $F(y_{t-1})=\dfrac{Ry_{t-1}^2}{\frac{R-1}{M}y_{t-1}^2+y_{t-1}+S}$ обращается в нуль, если $y_{t-1}=0$. Разложим данную функцию в ряд Тейлора в окрестности точки нуль.

Разделим числитель и знаменатель правой части (11) на $\dfrac{R-1}{M}$. В результате получим:

$$y_t=\frac{\frac{MR}{R-1}y_{t-1}^2}{y_{t-1}^2+\frac{M}{R-1}y_{t-1}+\frac{MS}{R-1}}$$

или

$$y_t=\frac{\frac{MR}{R-1}y_{t-1}^2}{y_{t-1}^2+\frac{2M}{2(R-1)}y_{t-1}+\left(\frac{M}{2(R-1)}\right)^2+\frac{MS}{R-1}-\left(\frac{M}{2(R-1)}\right)^2}\quad y_t=\frac{\frac{MR}{R-1}y_{t-1}^2}{\left(y_{t-1}+\frac{M}{2(R-1)}\right)^2+\frac{MS}{R-1}-\left(\frac{M}{2(R-1)}\right)^2}$$

Введем обозначения $\alpha=\dfrac{MR}{R-1}$, $\beta=\dfrac{M}{2(R-1)}$, $\gamma=\dfrac{MS}{R-1}-\left(\dfrac{M}{2(R-1)}\right)^2$.

Тогда получим

$$y_t=\frac{\alpha y_{t-1}^2}{\left(y_{t-1}+\beta\right)^2+\gamma}$$

Рассмотрим случай, когда $\gamma>0$, тогда:

$$y_t=\frac{\alpha y_{t-1}^2}{\left(y_{t-1}+\beta\right)^2+\gamma}=\frac{\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2}{\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}=1-\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^2+\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^4-\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^6+....+\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^{2n}$$

Таким образом

$$\frac{\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2}{\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^2+1}=\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2-\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^2+\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^4-..+\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^{2n}$$

$$y_t=\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2-\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^2+\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^4-..+\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^{2n}$$

$$s(y_{t-1})=\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2-\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^2+\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^4-..+\frac{\alpha}{\gamma}y_{t-1}^2\left(\frac{y_{t-1}+\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^{2n}$$

Отсюда следует следующая система уравнений:

$$\begin{cases}y_t=0y_{t-1}+0*y_{t-2}+s(y_{t-1})\\ y_{t-1}=y_{t-1}+0*y_{t-2}\end{cases}$$

Представим данную систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s(y_{t-1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (0-\lambda)\times(-\lambda) - 0\times 1 = 0$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Его корни являются собственными числами матрицы A. Отсюда следует устойчивость нелинейной дискретной динамической системы (11) при любых значениях параметров.

Список литературы

1. **Александров А. Ю., Жабко А. П.** О сохранении устойчивости при дискредитации систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51. № 3. С. 491-497.
2. **Барбашин Е. А.** Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
3. **Барбашин Е. А.** Построение функций Ляпунова. М.: Наука, 1970.
4. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966.
5. **Демидович Е. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1966.
6. **Легкоконец В. К.** Определение стационарности линейных стохастических процессов, применяемых для прогнозирования экономических показателей в эконометрике // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2012. № 2 (57). С. 137-140.
7. **Ляпунов А. М.** Общая задача об устойчивости движения. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.
8. **Недорзов Л. В.** Анализ численности сосновой пяденицы с помощью дискретных математических моделей // Математическая биология и биоинформатика. 2010. Т. 5. № 2. С. 114-123.
9. **Ризниченко Г. Ю.** Лекции по математическим моделям в биологии. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
10. **Смит Д. Ж. М.** Модели в экологии. М.: Мир, 1976.

УДК 55.3179
Науки о земле

Исследованы причины засоления почвогрунтов Ширванской степи Азербайджанской республики и его влияние на мелиоративное состояние орошаемых земель. Результаты анализа мелиоративного состояния орошаемых земель показывают, что, благодаря строительству горизонтального дренажа, достигнуто значительное уменьшение содержания солей в почве, обоснованы мероприятия по улучшению мелиоративных условий.

Ключевые слова и фразы: режим; канал; подземные воды; дренаж; гидрогеология.

Мамедова Эсмиральда Аллахверди кызы, к. геол.-мин. н., доцент
Алиев Сиях Али оглы, к.т.н.
Бакинский государственный университет, Азербайджан
hidrogeoloqmamedova@rambler.ru; aliyev_siyah@rambler.ru

ПРИЧИНЫ ЗАСОЛЕНИЯ ПОЧВОГРУНТОВ ШИРВАНСКОЙ СТЕПИ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ И ВЛИЯНИЕ ЕГО НА МЕЛИОРАТИВНОЕ СОСТОЯНИЕ ОРОШАЕМЫХ ЗЕМЕЛЬ©

В настоящее время, несмотря на то, что в республике орошается около 1,5 млн га земель, урожайность сельхозкультур во многих районах не достигла проектной величины, что часто связано с неблагоприятными гидрогеолого-мелиоративными условиями. Неудовлетворительное мелиоративное состояние орошаемых земель приводит не только к снижению продуктивности земель, но и имеет экологические последствия, т.к. за счет засоления почвогрунтов наблюдается обеднение земель, а за счет близкого залегания грунтовых вод
