Антонов Владимир Александрович

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ФАКТОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ В ГОРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Изложена методология формирования, оптимизации и применения в научных экспериментальных горно-технологических исследованиях функционально-факторных уравнений нелинейной регрессии повышенной достоверности. Изначально функции уравнений задаются в общем виде как математические выражения факторов влияния исследуемых объектов или процессов на искомую регрессию. Конкретные значения функциональных параметров рассчитываются как оптимальные в области дробных рациональных чисел. Показаны приемы их оптимизации специально разработанным методом приближений параболической вершины. Приведены примеры практического применения методологии.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2013/5/3.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2013. № 5 (72). С. 16-24. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/5/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

УДК 519.2:622
Физико-математические науки

Изложена методология формирования, оптимизации и применения в научных экспериментальных горно-технологических исследованиях функционально-факторных уравнений нелинейной регрессии повышенной достоверности. Изначально функции уравнений задаются в общем виде как математические выражения факторов влияния исследуемых объектов или процессов на искомую регрессию. Конкретные значения функциональных параметров рассчитываются как оптимальные в области дробных рациональных чисел. Показаны приемы их оптимизации специально разработанным методом приближений параболической вершины. Приведены примеры практического применения методологии.

Ключевые слова и фразы: факторы, модели и уравнения нелинейной регрессии; функциональные параметры; оптимизация; руда.

Антонов Владимир Александрович, д.т.н.
Институт горного дела Уральского отделения Российской академии наук
Antonov@igduran.ru

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ФАКТОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ В ГОРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ©

Введение. Регрессию проводят по данным измерений физических и других величин, полученных в ходе экспериментальных исследований геологических и техногенных объектов горных предприятий, а также проходящих в них технологических и социально-экономических процессов. Искомые закономерности, по которым они образуются, развиваются и изменяются, часто бывают настолько сложными, что описываются достоверно только уравнениями нелинейной регрессии, требующими оценивания внутренних параметров функций, входящих в уравнения. Однако расчет параметров в настоящее время весьма затруднен или вовсе невозможен из-за ограничений применения и неустойчивой сходимости известных алгоритмов их оптимизации.

Для решения обозначенной проблемы в Институте горного дела УрО РАН В. А. Антоновым разработан новый и относительно простой численный оптимизационный метод приближений параболической вершины (МППВ) [1]. Совместное применение МППВ и метода наименьших квадратов (МНК) обеспечивает устойчивый расчет показателей степени, входящих в сложные степенные полиномы, а также параметров других функций. Теперь стало возможным функции уравнений задавать в общем виде и рассматривать их как математическое выражение факторов влияния на регрессию природных или каких-либо иных процессов. В связи с численными расчетами оптимальных значений параметров функций, составляющих уравнения, они названы функционально-факторными с самоопределяющимися параметрами (ФСП). В плане развития методологии их создания и применения в горном деле представляются актуальными ниже изложенные аспекты формирования и распространения уравнений ФСП, включая постановку цели регрессии, выбор ее интервалов с учетом действующих факторных функций, оптимизацию полученных уравнений на основе МППВ и МНК.

Цели, факторы и интервалы регрессии. Под фактором понимается причина, исходящая от какого-либо геологического, техногенного объекта, процесса или явления, влияющая на регрессию и определяющая ее характер или отдельные черты. Действие фактора зависит от переменных величин, т.е. аргументов, и выражается математической функцией, общий вид которой формируется по теоретическим представлениям факторного влияния, объясняющим регрессию. Количество факторов, так же как количество аргументов, может быть разным.

Итоговые значения параметров, устанавливающие окончательный и конкретный вид факторных функций, их отдельные черты по степени возрастания или убывания, вогнутости или выпуклости, объективно рассчитываются МППВ как оптимальные в области рациональных чисел (дробных, положительных и отрицательных). Поэтому уравнения ФСП распространяются в широких интервалах интерполяции и экстраполяции со значительно большей достоверностью по сравнению с известными уравнениями, в которых функции и функциональные параметры, например показатели степени, назначаются искусственно. Это обстоятельство значительно расширяет возможности регрессии и позволяет с помощью данных уравнений достичь следующих целей:

- Установить в конкретном виде и объяснить математически закономерность, по которой с некоторым случайным отклонением распределены значения зависимой величины, полученные в экспериментах.
- Создать математическую регрессионную модель исследуемых объектов или процессов.
- Определить характерные параметры регрессии, например, значения показателей степени, координаты экстремумов, элементы залегания рудных тел в обратных геофизических задачах.
- Предсказать (дать прогноз) значения зависимой величины в областях интерполяции и экстраполяции.
- Управлять объектом или технологическим процессом по уравнению регрессии.

© Антонов В. А., 2013

Для получения результата, заданного целью, интервалы регрессии распространяются по аргументам на соответствующую область. Это возможно лишь при условии, что данная область и окрестности узловых точек, по которым строится регрессия, однородны по факторным и другим влияющим на регрессию свойствам. Таким образом, цели, факторы и интервалы регрессии взаимосвязаны. В этой связи принимаем, что в областях интерполяции и экстраполяции, так же как в экспериментально полученных узловых точках, действуют факторы, функционально учтенные в уравнениях, и не предполагается появление вновь возникших факторов. Кроме того, при удалении от узловых точек в этих областях сохраняются другие свойства пространства, косвенно влияющие на регрессию.

Внешние границы регрессии устанавливаются там, где по теоретическим соображениям прекращается действие хотя бы одного из учтенных факторов. Это может произойти на краю зоны локального распространения факторов, при появлении обусловленного чем-либо граничного значения зависимой величины или факторной функции, например, смене их алгебраического знака, превышении заданного уровня.

Начальное формирование уравнений. Уравнения регрессии представляются полиномами, в которых содержатся постоянная составляющая (свободный член) и одна или несколько факторных функций. Их общий вид, исходя из полноты теоретического объяснения регрессии, может быть простым и сложным. Наиболее простые функции с одним аргументом, например, степенные или показательные, выражают факторное влияние на участках регрессии, проявляющееся в монотонных изменениях значений зависимой величины, заданных в узловых точках. Если факторы действуют аддитивно (независимо), то функции суммируются. При мультипликативном (зависимом) действии функции умножаются. Часто факторы влияют комбинированно, т.е. аддитивно и мультипликативно. При наличии двух и большего количества аргументов монотонность регрессии может быть направлена вдоль их координатных осей и под углом к ним. Поэтому различаются факторные функции осевые и диагональные, которые зависят, соответственно, от одного или нескольких аргументов. В качестве примера факторного формирования регрессии представим трехмерное уравнение

$$y = A_1 x_1^{\mu_1} + A_2 e^{\beta x_2} + A_3 x_1^{\mu_{1m}} x_2^{\mu_{2m}} + B,$$

в котором монотонности изменения y, направленные вдоль координатных осей аргументов x_1 и x_2, объясняются аддитивным влиянием факторов, выраженных, соответственно, степенной и показательной функциями. Дополнительная монотонность y, направленная под углом к указанным осям, обусловлена влиянием мультипликативно взаимодействующих факторов, выраженным произведением степенных функций. В приведенном уравнении коэффициенты A и B оптимизируются МНК, а параметры μ_1, β, μ_{1m}, μ_{2m} – МППВ.

Оптимизация уравнений. Критерием оптимизации уравнений регрессии является достижение максимума целевой функции – коэффициента их детерминации

$$R^2(\xi_j) = 1 - \frac{D(\xi_j)}{D},$$

где ξ_j – параметры факторных функций; D – дисперсия значений зависимой величины, заданных в узловых точках; $D(\xi_j)$ – дисперсия отклонений регрессии от узловых точек. Если распределение $R^2(\xi_j)$ имеет два или несколько максимумов, то оптимизационные расчеты МППВ проводятся в последовательно чередующихся его ортогональных сечениях, содержащих целевые функции R^2_o. Каждое сечение образуется путем задания в функции R^2 фиксированных значений некоторым параметрам ξ так, что в оставшихся координатах ξ_1, ξ_2, ..., ξ_j, ... ξ_m оно содержит единственный глобальный максимум $R^2_{ом}$. Достаточным условием выбора сечения является единственный минимум суммы квадратов остатков, образующихся в системе его аргументов ξ_j, при сравнении регрессии с заданными в узловых точках значениями зависимой величины. Приближенно единственность глобального максимума оценивается также существованием лишь одной монотонности и однозначности факторной функции при изменении переменных ξ_j выбранного сечения.

Основной алгоритм оптимизации уравнений с применением МППВ описан в работе [Там же]. Суть метода состоит в итерационном последовательном приближении расчетного максимума вогнутой параболической функции, построенной по опорным точкам множества $R^2(\xi_j)$, к максимуму $R^2_{ом}$. Коэффициент R^2_o рассчитывается МНК, когда заданы узловые точки и конкретные значения функциональных параметров. Поэтому, в итоге итерационных приближений определяется совокупность ξ_j, при которой коэффициент детерминации $R^2(\xi_j)$ – наибольший из всех возможных, оцениваемых МНК. В данном разделе изложены некоторые важные особенности реализации метода, выполнение которых обеспечивает его устойчивую сходимость.

В каждом сечении R^2_o проводится выделение, т.е. локализация обозначенного выше глобального максимума. По результатам локализации устанавливаются стартовые координаты ξ_j и R^2_{ov} опорных точек, которые используются в МППВ. Здесь индекс j пробегает значения от 1 до m – количества оптимизируемых в сечении параметров, а индекс ν обозначает номер опорной точки и изменяется от 1 до $2m+1$. В сечениях, содержащих аддитивно или мультипликативно взаимодействующие функции, применяется функциональная и, соответственно, осевая или центральная локализация. Начальное положение опорных точек в функциональной локализации определяется аналитически по формулам с учетом характерных особенностей распределения значений зависимой величины в узловых точках. В осевой локализации проводится сканирование R^2_o

вдоль профилей, расположенных параллельно осям ξ_j. По обнаруженным осевым максимумам R^2_{oj} определяется координата первой опорной точки с номером ν, равным единице. В центральной локализации сканирование R^2_o проводится сначала в полярной системе по углу вокруг начала координат аргументов ξ_j. Затем выделяется луч с наиболее вероятным направлением на область, содержащую максимум $R^2_{ом}$, и вдоль его проводится дополнительное сканирование R^2_o. По обнаруженному на луче максимуму R^2_o устанавливается координата опорной точки также с единичным номером. В качестве примера на Рис. 1 показаны схемы осевой и центральной локализации, проводимой в сечениях, содержащих по два аргумента ξ_1 и ξ_2. В осевой локализации (Рис. 1*а*) опорная точка с номером 1 установлена на пересечении отсчетов профильных максимумов коэффициента детерминации R^2_o. В центральной локализации (Рис. 1*б*) по результатам сканирования коэффициента R^2_o под разным полярным углом φ определено направление на область локализации, обозначенное пунктирным лучом. Первая опорная точка установлена в месте лучевого максимума коэффициента детерминации.

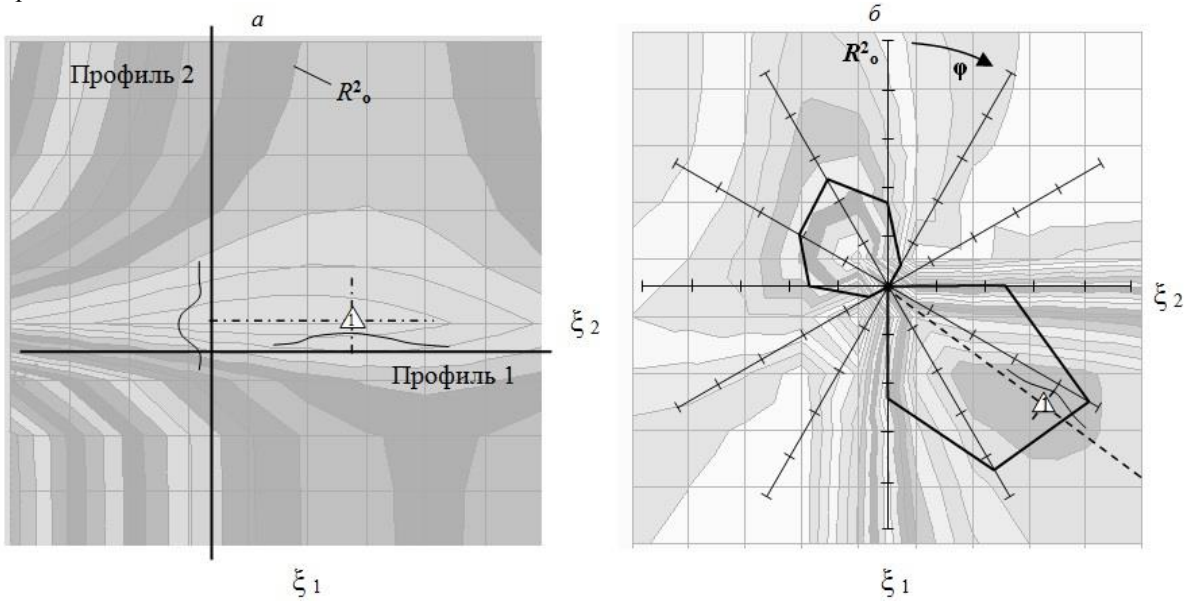


Рис. 1. *Схемы осевой (а) и центральной (б) локализации глобального максимума функции* $\boldsymbol{R^2_o}$

Таблица 1. *Координаты опорных точек МППВ, установленные по первой части правила ортогонального вогнутого перекрестка*

$\xi_{j\nu}$ / ν	$\xi_{1\nu}$	$\xi_{2\nu}$	$\xi_{3\nu}$	…	$\xi_{m\nu}$
1	ξ_{11}	ξ_{21}	ξ_{31}	…	ξ_{m1}
2	$\xi_{11}-\lvert\Delta\xi_1\rvert$	ξ_{21}	ξ_{31}	…	ξ_{m1}
3	$\xi_{11}+\lvert\Delta\xi_1\rvert$	ξ_{21}	ξ_{31}	…	ξ_{m1}
4	ξ_{11}	$\xi_{21}-\lvert\Delta\xi_2\rvert$	ξ_{31}	…	ξ_{m1}
5	ξ_{11}	$\xi_{21}+\lvert\Delta\xi_2\rvert$	ξ_{31}	…	ξ_{m1}
6	ξ_{11}	ξ_{21}	$\xi_{31}-\lvert\Delta\xi_3\rvert$	…	ξ_{m1}
7	ξ_{11}	ξ_{21}	$\xi_{31}+\lvert\Delta\xi_3\rvert$	…	ξ_{m1}
…	…	…	…	…	…
2*m*	ξ_{11}	ξ_{21}	ξ_{31}	…	$\xi_{m1}-\lvert\Delta\xi_m\rvert$
2*m*+1	ξ_{11}	ξ_{21}	ξ_{31}	…	$\xi_{m1}+\lvert\Delta\xi_m\rvert$

Стартовое положение остальных опорных точек с номерами $\nu>1$ задается по следующему правилу ортогонального вогнутого перекрестка, которое состоит из двух частей. Центром перекрестка считаем положение первой опорной точки. Аргументы опорных точек с номерами $1<\nu<2j$ и $2j+1<\nu\le 2m+1$ тоже принимают значения центра. Опорные точки с номерами $2j$ и $2j+1$ устанавливаются по оси j-аргумента со смещением относительно центра в двух противоположных направлениях на интервал $\lvert\Delta\xi_j\rvert$. Координаты точек с

номерами ν =2*j* выражаются разностью $\xi_{j\nu} = \xi_{j1} - |\Delta\xi_j|$, а с номерами $\nu = 2j+1$, соответственно, – суммой $\xi_{j\nu} = \xi_{j1} + |\Delta\xi_j|$. Координаты опорных точек, установленные по первой части изложенного правила, приведены в Таблице 1. Интервал $|\Delta\xi_j|$ в стартовом состоянии опорных точек назначается намного меньшим, чем размер области локализации.

Распределение $R^2_{\text{о}}$ в локализованной области максимума аппроксимируется в МППВ следующей параболической функцией $P(\xi)$:

$$P(\xi) = C + \sum_{j=1}^{m}(C_{j1}\xi_j + C_{j2}\xi_j^2).$$

Название вогнутого ортогонального перекрестка опорных точек отражает то обстоятельство, что сечения параболической функции, проведенные вдоль каждого *j*-аргумента через центр перекрестка по трем опорным точкам с координатами $\xi_{j1} - |\Delta\xi_j|$, ξ_{j1}, $\xi_{j1} + |\Delta\xi_j|$, представляют собой вогнутые параболы. Они расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях и в условиях неравенств $C_{j2}<0$ имеют общий максимум P_B. При соответствующей вогнутости функции $R^2_{\text{о}}$ в области локализации и гладкой ее топологии установка опорных точек по данному правилу обеспечивает продвижение итераций в МППВ.

Возможно, что топология функции $R^2_{\text{о}}$ в области перекрестка имеет осложнения, например, локальный склон, перегиб. Поэтому одно или несколько упомянутых неравенств могут не выполняться. Тогда по следующей второй части правила перекрестка проводится его расширение вдоль аргументов таких неравенств. Опорные точки с номерами 2*j* и 2*j*+1 смещаются по *j*-аргументу относительно центра перекрестка в направлении, которое определяется по результатам сравнения значений $R^2_{\text{о}}$ в точках $\xi_{j1} - |\Delta\xi_j|$ и $\xi_{j1} + |\Delta\xi_j|$. Расширение проводится по направлению, проходящему от центра через точку, имеющую наибольшее значение $R^2_{\text{о}}$. Точки с номерами 2*j* и 2*j*+1 перемещаются с установленным интервалом поочередно шагами с опережением, т.е. «перепрыгиванием» одной точки через другую. Процедура расширения прекращается после восстановления соответствующих неравенств $C_{j2}<0$ или при достижении координат перемещающихся опорных точек предельно допустимых значений.

После установки опорных точек по изложенному правилу проводятся итерации всего перекрестка или отдельных его точек в следующем порядке.

Используя координаты опорных точек перекрестка, рассчитывают по формуле

$$\xi_{jв} = -C_{j1} / 2C_{j2}$$

совокупность вершинных аргументов $\xi_{jв}$ параболической функции. Затем, принимая их значения и рассчитанное с их учетом значение функции $R^2_{\text{ов}}(\xi_{jв})$, получают новую опорную точку. После этого возможны три случая следующих соотношений и соответствующих действий.

В первом случае получено значение $R^2_{\text{ов}}$, меньше наименьшего R^2_{ov} в опорных точках. Среди их номеров ν>1 найдется точка с наибольшим отсчетом R^2_{ov} и большим, чем отсчет $R^2_{\text{o1,}}$ в центре. Тогда проводится итерация перекрестка. Этой точке присваивается номер 1, и вокруг нее строится новый перекресток, т.е. происходит перенос перекрестка на некоторый интервал в направлении роста R^2_{ov}. Если отсчет меньше, чем в центре, то интервалы $|\Delta\xi_j|$ перекрестка увеличивают. Если после такого увеличения соотношение отсчетов в опорных точках не изменилось, то итерации в данном сечении пропускаются, поскольку центральная точка является приближенным максимумом $R^2_{\text{о}}$.

Во втором случае получено значение $R^2_{\text{ов}}$, больше наибольшего R^2_{ov} в опорных точках. Тогда также проводятся итерации перекрестка. Перекресток перестанавливается (переносится) на место новой опорной точки с координатами $\xi_{jв}$, $R^2_{\text{ов}}$. Теперь этой точке присваивается номер один. Остальные опорные точки устанавливаются вокруг нее по уже упомянутому правилу перекрестка. При этом коэффициент детерминации в опорных точках возрастает.

В третьем случае получено значение $R^2_{\text{ов}}$, больше наименьшего и меньше наибольшего значения R^2_{ov} в опорных точках. Тогда проводят итерации опорных точек. Заменяют одну из них с наименьшим значением R^2_{ov} на новую опорную точку.

В каждом следующем *k*-приближении, используя координаты опорных точек, рассчитывают координаты вновь образованной точки

$$\xi_{jвk} = -C_{j1k} / 2C_{j2k} \text{ и } R^2_{\text{ов}k}(\xi_{jвk}).$$

В приближении *k* +1 действуют по следующим условиям.

Если значение $R^2_{\text{ов}}$ превышает R^2_{ov} хотя бы одной опорной точки, и выполнены все или часть соотношений $C_{j2}<0$, то заменяют одну из опорных точек с наименьшим значением $R^2_{\text{о}}$ на вновь образованную опорную точку.

Если $R^2_{\text{ов}}$ по значению равно или меньше наименьшего из R^2_{ov}, или нарушены все неравенства $C_{j2k}<0$, то итерации временно останавливают и проводят коррекцию координат опорных точек. Они устанавливаются по тому же правилу ортогонального вогнутого перекрестка (с возможным его расширением), но с учетом достигнутого на момент коррекции итерационного приближения. Теперь центром перекрестка считается единственная сохраняемая опорная точка, имеющая наибольший отсчет R^2_{ov}. Ей присваивается номер ν=1. Остальные опорные

точки смещаются относительно центра на интервал $\left|\Delta\,\xi_{jk}\right|$, который в данном случае представляется усредненным текущим отклонением опорных точек k-приближения, от их взвешенного центра

$$\left|\Delta\xi_{jk}\right| = \frac{1}{t}\sum_{v=1}^{v=t}\left|\xi_{jvk} - \xi_{juk}\right|,$$

где ξ_{juk} – j-координата взвешенного центра опорных точек, определяемая выражением

$$\xi_{juk} = \frac{\xi_{j1k}R_{1k}^2 + \xi_{j2k}R_{2k}^2 + \ldots. + \xi_{jtk}R_{tk}^2}{R_{1k}^2 + R_{2k}^2 + \ldots. + R_{tk}^2}.$$

Коррекция опорных точек считается завершенной, когда восстанавливаются все неравенства $C_{j2k}<0$. Далее, итерации возобновляются по указанному выше порядку перемещения всего ортогонального перекрестка или отдельных опорных точек в направлении дальнейшего роста коэффициента детерминации.

Выполнение указанного порядка итераций и правил приводит к сходимости МППВ. Максимум P_B параболической функции, рассчитанный в условиях $C_{j2k}< 0$, будет всегда не меньше наибольшего значения R^2_{ov} в опорных точках. Поскольку целевая функция R^2_{o} в области локализации ее максимума выпукла вверх, и в каждой итерации «крайняя» опорная точка с наименьшим значением R^2_{ov} заменяется новой точкой, рассчитанной по вершине параболической функции, то, по мере увеличения числа итераций, значения R^2_{ov} во всех опорных точках дискретно возрастают. Влияние местных нарушений в выпуклости целевой функции устраняется управляемым переносом и коррекцией положения опорных точек. При этом центр перекрестка, где они устанавливаются, располагается все ближе к точке, соответствующей максимуму R^2_{om}. В ходе итераций область опорных точек и размер $|\Delta\xi_{jk}|$ корректирующего перекрестка уменьшаются. Опорные точки концентрируются, и качество аппроксимации области максимума функции R^2_{o} вершиной параболической функции улучшается. Совокупность аргументов $\xi_{1вк}$, $\xi_{2вк}$, …, $\xi_{mвк}$, рассчитанных по вершине параболической функции, все меньше отличается от совокупности искомых аргументов, соответствующих максимуму функции R^2_{o}, т.е. опорные точки устремляются к предельному значению функции ортогонального сечения – максимуму $R^2_{ом}$. При смене сечений рассчитанные в них значения $R^2_{ом}$ также все меньше отличаются, приближаясь при этом к искомому максимуму $R^2_{м}$.

Достаточность приближений внутри сечения оценивается сравнением сколь угодно малой допустимой, то есть заданной, простой средней относительной погрешности δ определения вершинных параметров ξ_j с ее частным значением δ_{jk}, рассчитанным в текущем приближении для каждого аргумента по формуле

$$\delta_{jk} = \frac{\sum_{f=1}^{t}\left|\xi_{j(k+1)} - \xi_{jkf}\right|}{t\left|\xi_{j(k+1)}\right|},$$

где ξ_{jkf} – значение j–аргумента опорной f-точки в k-приближении; $\xi_{j(k+1)}$ – значение j–аргумента новой опорной точки, рассчитанной для приближения k+1. Приближения с номером k считаются достаточными, если для каждого аргумента выполняется неравенство $\delta_{jk} \le \delta$.

Достаточность чередования сечений определяется по сходимости рассчитанных в них параметров ξ_j. Сходимость оценивается по нескольким последним результатам расчетов, повторяющихся в очереди, когда в полученных малых приращениях $\Delta\xi_j$, соответствующих погрешности δ, появляются разные алгебраические знаки.

Методика оптимизации уравнений кратко обозначается аббревиатурой, включающей сведения об оптимизации в сечениях R^2_{o}, входящих в один цикл их чередования. В методике (М) указываются: способ локализации максимума функции R^2_{o} (ОФ – функциональный, ОЛ – осевой, ЦЛ – центральный); количество опорных точек, по которым строится параболическая функция (3Т, 5Т и т.д.); число кратности применения сечения (проставляется через тире). Например, аббревиатура МЦЛ5Т-1, МОЛ3Т-2 обозначает методику оптимизации, проводимую по трем сечениям. В сечении с пятью опорными точками для определения стартовой позиции в итерациях применена центральная локализация максимума R^2_{o}. Оптимизируются два параметра уравнения. В двух сечениях с тремя опорными точками положение старта итераций определено осевой локализацией. В каждом из них оптимизируется по одному параметру. Всего по результатам оптимизации рассчитываются четыре параметра.

Практическое построение регрессии. Покажем решения некоторых регрессионных задач научных горно-технологических исследований разной мерности и направленности, которые получены по приведенной выше методологии.

Построение серии двумерных уравнений ФСП реализовано в компьютерной программе для ЭВМ «Уравнения нелинейной регрессии, тренды двумерные функционально-факторные с самоопределяющимися параметрами и повышенной достоверностью (Тренды ФСП-1)» [2], разработанной в Институте горного дела УрО РАН и опубликованной в Интернете на его сайте. Программа автоматически рассчитывает и строит 24 типа уравнений. В ней содержатся полиномы степенных и показательных функций, а также их комбинации. Имеется функция нормального распределения в отдельности и в сочетании с показательной функцией. Представлен ряд полиномов ассиметричного левостороннего и правостороннего распределения с разным смещением и одним или двумя максимумами. Имеются полиномы квазиступенчатых функций, отображающие переходные процессы с разным наклоном прилегающих ступеней. Представлены также полиномы синуса

и его комбинаций с показательной функцией, отображающие постоянные или амплитудно-зависимые гармонические колебания, происходящие вокруг стабильного или переменного фона.

Эффективность использования программы «Тренды ФСП-1» покажем на примере построения профильной модели рудоносного контакта осадочных и магматических горных пород геолого-сейсмического разреза, изображенного на Рис 2. Узловые точки (X_i, H_i), по которым проведена регрессия, представляют собой центры экспериментально зафиксированных площадок сейсмического отражения, происходящего на контакте обозначенных горных пород. Учитывая сложность линии контакта, образовавшейся под действием на отдельных ее участках разных природных факторов, моделирование проведено сплайном уравнений. Зона контакта по факторным признакам пликативных и дизъюнктивных дислокаций разделена на четыре частично перекрывающихся интервала.

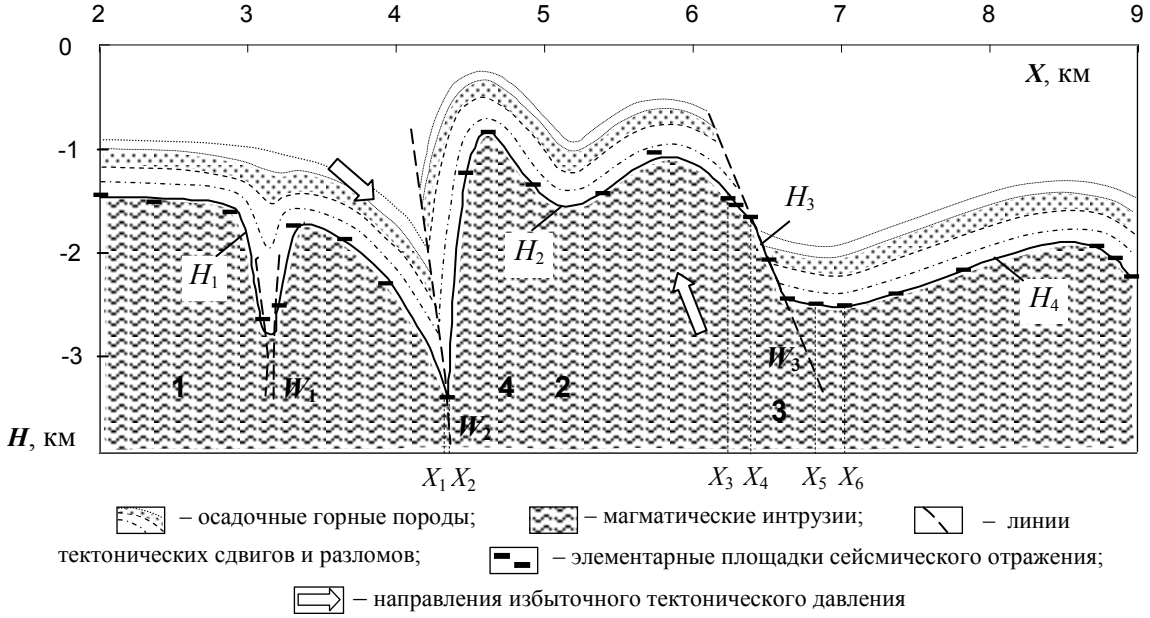


Рис. 2. *Геолого-сейсмический разрез контактной зоны осадочных и магматических горных пород*

Первый интервал [2, X_2], расположенный от начала профиля до разлома W_2, охватывает область прогиба зоны контакта, осложненной локализованным внутренним разломом W_1. Профиль прогиба выражается экспоненциальной функцией, а узкая складка разбросанных брекчий, внедренная в интрузию в зоне разлома W_1, соответственно, функцией нормального распределения. Для описания регрессии H_1 выбрано уравнение

$$H_1 = A_1 e^{\beta_1 x} + \frac{A_2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} + B_1,$$

в котором параметры $\sigma, \bar{x}$, β оптимизируются по методике МФЛ5Т-1, МФЛ3Т-1.

Второй интервал [X_1, X_4] охватывает систему асимметричных складок контактной зоны, расположенной между разломом W_2 и сдвигом W_3. Такая конфигурация контактной линии с крутым левым склоном описывается полиномом H_2 функций смещенного правостороннего ассиметричного распределения с двумя экстремумами

$$H_2 = A_3\left[(X - X_{o1})\cdot a_1^{X_{o1} - X}\right]^{\mu_1} + A_4\left[(X - X_{o2})\cdot a_2^{X_{o2} - X}\right]^{\mu_2} + B_2.$$

Параметры μ_1, μ_2, a_1, a_2, X_{o1}, X_{o2} данного уравнения оптимизируются по методике МФЛ7Т-2.

Третий интервал [X_3, X_6] включает в себя зону тектонического сдвига W_3. Допуская, что участки регрессии, примыкающие слева и справа к линии сдвига, выражаются в пределах данного интервала прямыми линиями, зададим интервальную регрессию H_3 квазиступенчатой функцией с произвольным наклоном ступеней

$$H_3 = \frac{A_5}{1 + e^{\beta_2 (X - Xo)}} + \sum_{i=6}^{i=7} \frac{A_i (X - Xo)}{1 + e^{(-1)^i \cdot \frac{200(X - Xo)}{(X6 - X3)}}} + B_3.$$

Оптимизация ее параметров β, X_o проводится по методике МФЛ3Т-2.

На четвертом интервале [X_5, 9], содержащем область гладкой и умеренной складчатости горных пород с тремя участками разной монотонности, аддитивно взаимодействуют три фактора, каждый из которых отображается степенной функцией. Поэтому выражение регрессии H_4 задается соответствующим полиномом

$$H_4 = A_8 x^{\mu_3} + A_9 x^{\mu_4} + A_{10} x^{\mu_5} + B_4,$$

в котором показатели степени рассчитываются по методике МОЛ3Т-3.

В выбранных интервальных уравнениях регрессии отмеченные параметры оптимизированы наряду с коэффициентами A и B программой «Тренды ФСП-1». После оптимизации интервальные уравнения на участках

перекрытия сопряжены. Итоговые формулы уравнений и их сопряжений сведены в Таблицу 2. Сопряжение интервальных уравнений проведено на трех совмещенных k-участках $\Delta X_к$, где смежные интервалы частично перекрываются. При этом полагаем, что по мере увеличения значений X, находящихся внутри участка, действие факторов, распространенных на него слева, должно убывать, а распространенных справа – возрастать. Данное положение реализуется линейной весовой функцией. С ее учетом сопряженная регрессия $H_к$ рассчитывается по формуле

$$H_{\text{к}} = H_{\text{кЛ}} \frac{X_{\text{кП}} - X}{\Delta X_{\text{к}}} + H_{\text{кП}} \frac{X - X_{\text{кЛ}}}{\Delta X_{\text{к}}},$$

где $X_{\text{кЛ}}$, $X_{\text{кп}}$ – левая и правая границы участка; $H_{\text{кЛ}}$, $H_{\text{кп}}$ – регрессии, расположенные слева и справа от участка $\Delta X_{\text{к}}$. По мере роста координаты X, принадлежащей участку, вес уравнения $H_{\text{кл}}$ уменьшается от 1 до 0, а уравнения $H_{\text{кп}}$ – увеличивается от 0 до 1. Посредине этого участка веса уравнений одинаковые и составляют 0,5. Уравнения H_1 и H_2 соединены на узком интервале $[X_1, X_2]$ в окрестностях узловой точки, лежащей на разломе W_2, поскольку в этой точке действие факторных функций и направление линий смежных регрессий резко отличаются. Соединение уравнений асимметричного H_2 и квазиступенчатого H_3 проведено на участке $[X_3, X_4]$, содержащем три узловые точки, а уравнений H_3 и полиномного степенного H_4 – на интервале $[X_5, X_6]$, расположенном между двумя узловыми точками. На этих участках разность перекрывающихся интервальных регрессий невелика, что обеспечивает плавность сопряжения. Образовавшийся после сопряжения сплайн ФСП проведен на Рис. 2 сплошной линией H_1, H_2, H_3, H_4, показывающей положение на геолого-сейсмическом разрезе верхней границы магматической интрузии.

Таблица 2. *Регрессионная сплайновая модель линии контакта магматической и осадочной горной породы*

Интервалы профиля	**Формулы интервальной регрессии**	R^2
1. $[2, X_2]$	$H_1 = -0,00016 \cdot e^{2,1713X} - \frac{0,2703}{0,087\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-3,1277)^2}{2 \cdot 0,087^2}} - 1,4475$	0,9935
2. $[X_1, X_4]$	$H_2 = 21,0392\left[(X-4,2867) \cdot 38,364^{4,2867-X}\right]^{0,5671} + 28,4254\left[(X-4,2001) \cdot 1,6998^{4,2001-X}\right]^{4,9245} - 6,6396$	0,9903
3. $[X_3, X_6]$	$H_3 = \frac{0,6139}{1+e^{30,9474(X-6,4942)}} - \frac{1,2489\ (X-6,4942)}{1+e^{253,1646(X-6,4942)}} - \frac{0,1185\ (X-6,4942)}{1+e^{-253,1646(X-6,4942)}} - 2,4586$	0,9954
4. $[X_5, 9]$	$H_4 = 1,79504215577985131 \cdot 10^{82} \cdot X^{-100} - 7,3314 \cdot 10^{-25} \cdot X^{25,5143} + 7,9816 \cdot 10^{-7} \cdot X^{6,7135} - 2,8992$	0,9948

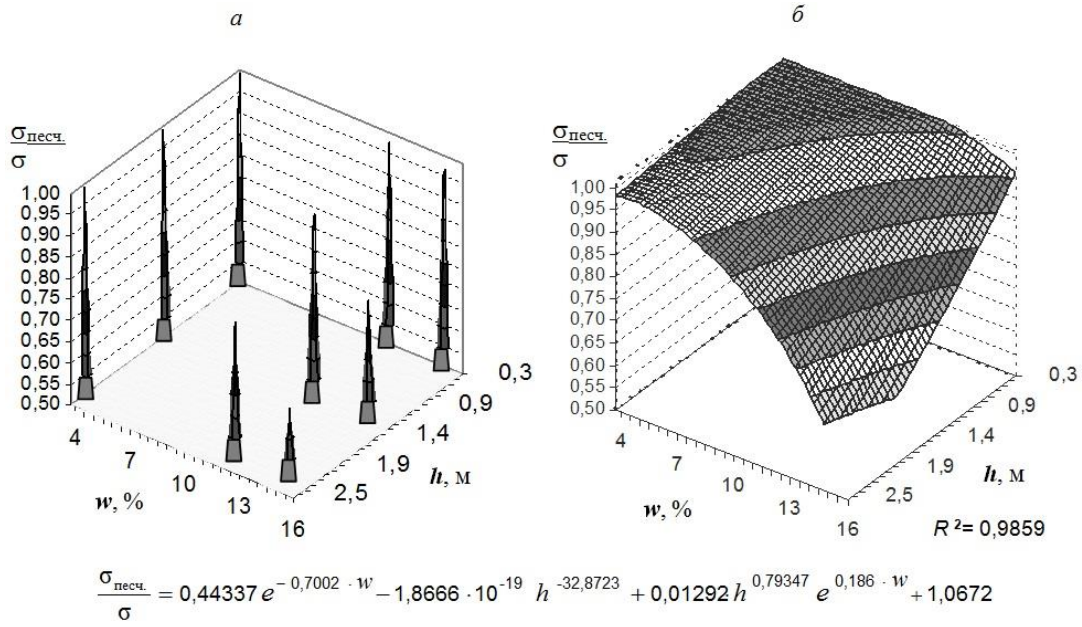
Сопряжения уравнений интервальной регрессии		
$[X_1, X_2]$	$[X_3, X_4]$	$[X_5, X_6]$
$H_{1,2} = H_1 \frac{X_2 - X}{X_2 - X_1} + H_2 \frac{X - X_1}{X_2 - X_1}$	$H_{2,3} = H_2 \frac{X_4 - X}{X_4 - X_3} + H_3 \frac{X - X_3}{X_4 - X_3}$	$H_{3,4} = H_3 \frac{X_6 - X}{X_6 - X_5} + H_4 \frac{X - X_5}{X_6 - X_5}$

Решение исследовательской задачи с применением трехмерной нелинейной регрессии ФСП покажем на следующем примере. Целью исследований является установление экспериментальной количественной закономерности, по которой изменяется устойчивость целика подземной горной выработки. На Рис. 3*а* показано распределение опытных оценок относительной допустимой динамической нагрузки $\sigma_{\text{песч.}}/\sigma$ целика, полученное при разной мощности h и влажности w содержащегося в нем прослоя песчаника. Изменение осевой монотонности динамической нагрузки, наблюдаемое при изменении сравнительно небольших значений h, отображается степенной функцией. Также осевое влияние влажности, в связи с эффектом насыщения, выражается показательной функцией. Опытные значения динамической нагрузки существенно изменяются по диагональному направлению относительно осей h и w. Поэтому в уравнении регрессии учтено еще влияние мультипликативно взаимодействующих факторов, выраженное произведением упомянутых функций. Первоначально заданное уравнение имеет общий вид

$$\frac{\sigma_{\text{песч.}}}{\sigma} = A_1 e^{\beta w} + A_2 h^{\mu} + A_3 h^{\mu_m} e^{\beta_m w} + B.$$

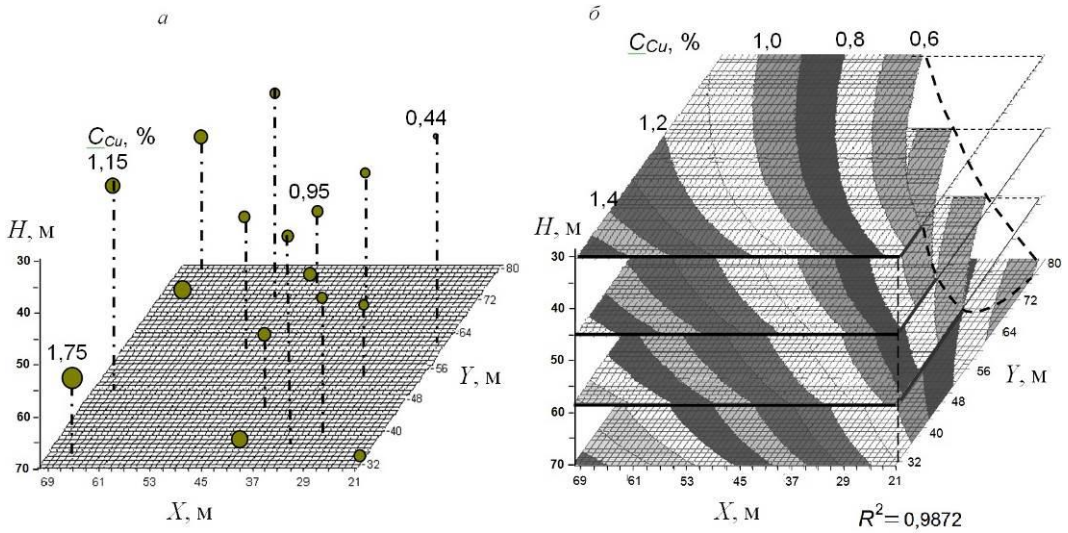
Оптимизация его параметров μ, β и μ_m, β_m проведена МППВ в последовательно сменяющихся двух ортогональных сечениях $R^2_{\text{о}}$ по методике МОЛ5Т-1, МЦЛ5Т-1. В результате получено уравнение, представленное на Рис. 3. График изменяющейся относительной динамической нагрузки целика показан в виде поверхности на

Рис. 3*б*. Распределение на данной поверхности изолиний с заданной динамической нагрузкой позволяет установить соответствующие границы допустимых значений мощности и влажности прослоев песчаника.



$$\frac{\sigma_{песч.}}{\sigma} = 0{,}44337\, e^{-0{,}7002 \cdot w} - 1{,}8666 \cdot 10^{-19}\ h^{-32{,}8723} + 0{,}01292\, h^{0{,}79347}\, e^{0{,}186 \cdot w} + 1{,}0672$$

Рис. 3. *Построение трехмерного уравнения ФСП в экспериментальных исследованиях устойчивости целика подземной горной выработки: а – распределение данных эксперимента, б – график поверхности регрессии*



$$C_{Cu} = 0{,}1715 \cdot X^{0{,}5506} + 12{,}8685 \cdot Y^{-0{,}7151} + 3{,}8648 \cdot 10^{-5} \cdot H^{2{,}1899} - 1{,}3287$$

Рис. 4. *Построение четырехмерного уравнения ФСП в экспериментальном описании распределения меди по объему рудного блока: а – распределение данных геологического опробования, б – графики регрессионного распределения меди*

Применение четырехмерной нелинейной регрессии ФСП покажем на примере создания математической функциональной модели, описывающей распределение содержания меди в локализованной подземной части рудного блока. На этапе эксплуатационной разведки участка медно-колчеданного месторождения по результатам геологического опробования получены представленные на Рис. 4*а* данные о содержании меди C_{Cu} в ряде точек рудного блока, привязанных к трехмерному пространству по горизонтальным X, Y и вертикальным H координатам. Содержания меди в точках изображены пропорциональными по объему шарами. В распределении шаров вдоль каждой координаты наблюдается по одной монотонности изменения содержания меди. Поэтому в регрессии учтено влияние трех аддитивно взаимодействующих осевых факторов, выраженных степенными функциями. Общий вид уравнения следующий:

$$C_{Cu} = A_1 X^{\mu_1} + A_2 Y^{\mu_2} + A_3 H^{\mu_3} + B\ .$$

Входящие в уравнение показатели степени μ_1, μ_2, μ_3 оптимизированы расчетами МППВ по методике МОЛ7Т-1. Полученное в итоге уравнение показано на Рис. 4. Графическое изображение регрессии

представлено на Рис. 4*б* в виде четырех горизонтальных планов, расположенных на разных по вертикали этажах. Положение изолиний, обозначающих содержание меди в руде, показывает на планах ее объемное распределение по выделенной части рудного блока. Кроме того, по заданному бортовому содержанию меди 0,6% оценено граничное положение в геопространстве кондиционной части рудной залежи. Границы кондиционной руды показаны пунктиром.

Заключение. Уравнения нелинейной регрессии, построенные с учетом действующих на нее факторов и оптимизированные по параметрам соответствующих факторных функций, обладают повышенной достоверностью отображения свойств и характеристик исследуемых объектов и процессов. Алгоритм оптимизации уравнений нелинейной регрессии в последовательно чередующихся сечениях целевой функции коэффициента детерминации по методу МППВ приводит к устойчивой сходимости расчета параметров факторных функций разной мерности. Практическое применение методологии формирования и построения уравнений функционально-факторной нелинейной регрессии, в том числе рассчитанных по программе «Тренды ФСП-1», обеспечивает высокую эффективность интерпретации количественных результатов экспериментальных горно-технологических исследований.

Список литературы

1. **Антонов В. А.** Об одном методе построения полиномных трендов с самоопределяющимися показателями и коэффициентами // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46. № 2. С. 78-88.
2. **Антонов В. А., Яковлев М. В.** Уравнения нелинейной регрессии, тренды двумерные функционально-факторные с самоопределяющимися параметрами и повышенной достоверностью (Тренды ФСП-1): программа для ЭВМ, РФ; регистр. номер 2011616230. Екатеринбург: ИГД УрО РАН, 2011.

УДК 539.374
Физико-математические науки

В статье исследуется предельное состояние анизотропного слоя из идеальнопластического материала, сжатого параллельными жесткими плитами. Полученные результаты позволяют учитывать влияние трансляционной анизотропии на прессовку пространственной металлической заготовки жесткими плитами. Важным и актуальным является учет влияния трансляционной анизотропии на напряженно-деформированное состояние тел.

Ключевые слова и фразы: сжатие; слой; идеальная пластичность; трансляционная анизотропия; деформация.

Балашникова Анжелика Вениаминовна
Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
Info3006@yandex.ru

СЖАТИЕ АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ОБОБЩЕНИИ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА-ХИЛЛА©

Рассмотрим сжатие идеальнопластического слоя параллельными жесткими шероховатыми плитами при условии пластичности Мизеса.

Запишем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0.
\end{aligned} \qquad (1)$$

Условие пластичности запишем в виде

$$A\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+B\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+C\left(\sigma_z-\sigma_x\right)^2+6\left[D\tau_{xy}{}^2+F\tau_{yz}{}^2+E\tau_{xz}{}^2\right]=6k_0^2, \qquad (2)$$

где $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{xz}$ – компоненты напряжения, $A,B,C,D,F,E,k_0-const$, определяющие предел текучести и параметры анизотропии.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам, все величины, имеющие размерность напряжений, отнесем к величине предела текучести k_0 и сохраним обозначения напряжений σ_{ij}.

© Балашникова А. В., 2013