Бобова Мария Александровна, Мачулис Владислав Владимирович

ОСОБЫЕ ТРАЕКТОРИИ ОДНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В статье приводится качественное исследование одной динамической системы третьего порядка с двумя параметрами. Доказано существование предельного цикла, проанализированы имеющиеся бифуркации, построена карта динамических режимов, исследованы отдельные ячейки в каждой из областей, соответствующих седловым точкам.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2013/6/7.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2013. № 6 (73). С. 30-34. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/6/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

УДК 517.925.41
Физико-математические науки

В статье приводится качественное исследование одной динамической системы третьего порядка с двумя параметрами. Доказано существование предельного цикла, проанализированы имеющиеся бифуркации, построена карта динамических режимов, исследованы отдельные ячейки в каждой из областей, соответствующих седловым точкам.

Ключевые слова и фразы: бифуркационная диаграмма; центральное многообразие; инвариантное многообразие; ляпуновская величина; предельный цикл.

Бобова Мария Александровна
Мачулис Владислав Владимирович
Тюменский государственный университет
bobova-m@mail.ru; mareliks@gmail.com

ОСОБЫЕ ТРАЕКТОРИИ ОДНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ©

В данной статье приводится исследование трехмерной динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x} = z + 1 + (1-z)(x-1-y) \\ \dot{y} = (1-z)(x-1+y) \\ \varepsilon \dot{z} = (1-z^2)(z+1-m(x+1)) - \varepsilon z \end{cases}, \quad (1)$$

содержащей два действительных параметра m и ε, причем последний параметр положительный, $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ – искомые функции.

Целью работы являлось нахождение особых траекторий (предельных циклов и гомоклинических траекторий), бифуркаций системы и определение их типа с использованием известных к настоящему моменту теоретических результатов в этой области.

Для решения поставленной задачи применялись различные методы, в том числе и новейшие разработки в области непрерывных динамических систем [7; 8]. Также применялись математические программные пакеты, в которых писались процедуры, необходимые для выполнения трудоемких вычислительных процессов.

Неподвижные точки системы имеют вид

$$\{x = \frac{3R-1}{2(R-1)},\quad y = \frac{1+R}{2(1-R)},\quad z = R\}, \quad (2)$$

где R – корень кубического уравнения

$$2n^3 + (2-5m)n^2 + (2\varepsilon - 2m - 2)n + 3m - 2 = 0. \quad (3)$$

Количество неподвижных точек системы (1) зависит от числа действительных корней уравнения (3), которое определяется в зависимости от знака дискриминанта.

Пусть

$a = 2,\ b = 2-5m,\ c = 2\varepsilon - 2m - 2,\ d = 3m - 2.$

Примем за p и q

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2},\ q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для дискриминанта, получим

$$D = -4p^3 - 27q^2$$

или, переписав дискриминант в более удобной форме,

$$S = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27},$$

где $S = -D/108$.

1) Если $S < 0$, то уравнение (3) имеет три различных действительных корня и, следовательно, система имеет три неподвижных точки.

2) При $S > 0$ уравнение (3) имеет один действительный корень и два комплексно-сопряженных, т.е. система имеет одну неподвижную точку.

3) При $S = 0$ уравнение (3) имеет три действительных корня, два из которых совпадают, что означает, что система (1) имеет две неподвижные точки.

Условие $S = 0$ определяет неявно заданную кривую на плоскости параметров (m, ε), которая разделяет область значений параметров на подобласти, в каждой из которых система имеет определенное количество

© Бобова М. А., Мачулис В. В., 2013

неподвижных точек (Рис. 1). Жирной линии соответствуют те значения параметров, при которых координаты одной из неподвижных точек обращаются в бесконечность.

Покажем, что данная кривая является незамкнутой. Замкнутость кривой равносильна наличию у функции *S* экстремума. Воспользовавшись необходимым условием экстремума для функции многих переменных, мы находим координаты точки, подозрительной на экстремум:

$$\{m = 0.6599, \quad \varepsilon = 1.8006\} \tag{4}$$

Достаточное условие строгого экстремума не дает возможности сделать выводы о типе стационарной точки, потому что в результате применения критерия Сильвестра для определения вида квадратичной формы определитель матрицы Гессе (второго порядка) равен нулю, что говорит о необходимости дополнительных исследований. Но, т.к. существует только одна стационарная точка, в окрестности которой функция принимает разные знаки, (4) не является локальным экстремумом.

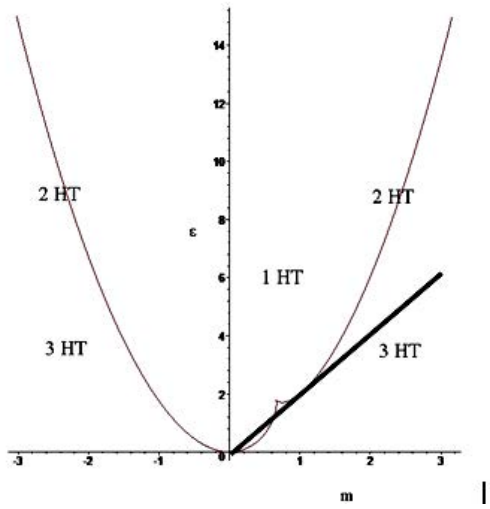


Рис. 1

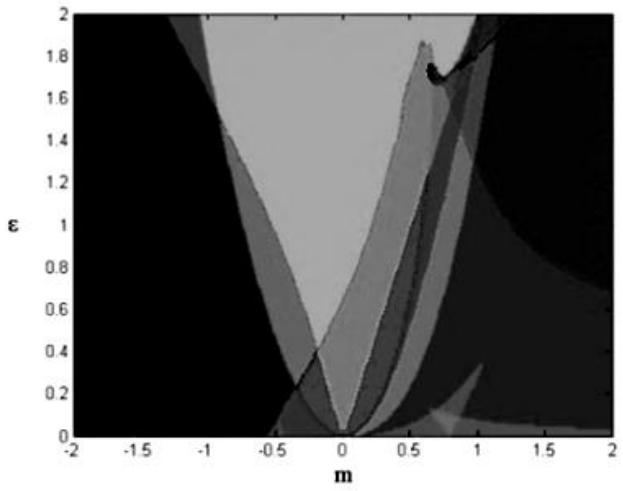


Рис. 2

Следующим этапом является построение бифуркационной диаграммы, на которой отмечено изменение типа каждой из неподвижных точек системы при изменении значений параметров. Для этой цели была написана программа на языке *Matlab*, результаты работы которой приведены на Рис. 2. Искомые области на рисунках закрашены. Области одной интенсивности соответствуют определенному типу неподвижных точек. На границах этих областей тип точек меняется, следовательно, происходит бифуркация. Граничные линии задают зависимость параметров, каждая точка на такой линии представляет собой пару бифуркационных значений (координат).

Таким образом, вся плоскость параметров (m, ε) оказывается разбитой на ячейки, т.е. области, в которых система обладает одинаковыми качественными свойствами. Чтобы определить характеристики системы на этом множестве параметров, достаточно исследовать ее в какой-либо конкретной точке ячейки.

Особый интерес представляют те ячейки, в которых хотя бы одна из неподвижных точек имеет седловой тип, т.к. именно при таких значениях параметра существуют инвариантные многообразия, которые необходимо вычислить, и также возможно присутствие в системе гомоклинической траектории.

Следующим этапом исследования системы является приведение ее к каноническому виду в окрестности седловых состояний равновесия и нахождение инвариантных многообразий. Были исследованы отдельные ячейки в каждой из областей, соответствующих седловой точке. Объем статьи не позволяет представить все результаты по все ячейкам (их бралось около пятидесяти), поэтому здесь мы ограничимся только одной.

Первая неподвижная точка. Тип «седло»

Значения параметров:

$m = 0.6322,$

$\varepsilon = 0.9406.$

Координаты неподвижной точки:

$(x_0 = 6.6206, \quad y_0 = -5.6206, \quad z_0 = 1.1953)$.

Канонический вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -0.1148\ u - 0.0279\ v_2\, v_1\, u + 0.1007\ {v_2}^2 - 0.0198\ v_2\, v_1 - 0.2584\ v_2\, u - 0.0043\ {v_1}^2$$
$$- 0.0361\ v_1\, u - 0.0128\ u^2 - 0.1757\ {v_2}^2\, v_1 - 0.0693\ {v_2}^2\, u - 0.0361\ v_2\, {v_1}^2$$
$$- 0.0054\ v_2\, u^2 - 0.0025\ {v_1}^2\, u - 0.0009\ v_1\, u^2 - 0.1925\ {v_2}^3 - 0.0021\ {v_1}^3 - 0.0001\ u^3$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_1 = 0.0833\ v_2 v_1 u + 0.3393\ v_1 + 0.9618\ v_2^2 + 1.1262\ v_2 v_1 + 0.1502\ v_2 u + 0.1309\ v_1^2$$
$$+ 0.0622\ v_1 u + 0.0050\ u^2 + 0.5248\ v_2^2 v_1 + 0.2069\ v_2^2 u + 0.1078\ v_2 v_1^2$$
$$+ 0.0160\ v_2 u^2 + 0.0074\ v_1^2 u + 0.0028\ v_1 u^2 + 0.5750\ v_2^3 + 0.0064\ v_1^3 + 0.0004\ u^3$$
$$\frac{\partial}{\partial t} v_2 = -0.0745\ v_2 v_1 u + 4.5941\ v_2 - 1.4803\ v_2^2 - 1.8163\ v_2 v_1 - 0.6799\ v_2 u - 0.2124\ v_1^2$$
$$- 0.1585\ v_1 u - 0.0296\ u^2 - 0.4699\ v_2^2 v_1 - 0.1852\ v_2^2 u - 0.0966\ v_2 v_1^2$$
$$- 0.0144\ v_2 u^2 - 0.0066\ v_1^2 u - 0.0025\ v_1 u^2 - 0.5148\ v_2^3 - 0.0057\ v_1^3 - 0.0003\ u^3$$

Уравнения инвариантных многообразий:

$\psi_1 = -0.0088u^2 - 0.0007u^3 - 0.0001u^4,$

$\psi_2 = 0.0061u^2 + 0.0006u^3 + 0.0001u^4,$

$\phi = -0.0054v_1^2 - 0.0039v_1v_2 + 0.0108v_2^2 - 0.0012v_1^3 - 0.0045v_1^2v_2 - 0.0131v_1v_2^2 - 0.0115v_2^3.$

Было проведено также исследование поведения системы на границах ячеек бифуркационной диаграммы. Интерес представляли те значения параметров, для которых действительная часть характеристического числа для какой-либо неподвижной точки равна нулю. Для этого сначала выделялись границы на плоскости (m, ε), при «переходе» через которые меняется знак действительной части характеристического числа. На втором этапе выделялись те значения параметров, для которых действительная часть характеристического числа мала (достаточно в качестве ограничения взять число 0.0001). В силу непрерывности характеристических значений в ячейках, искомые значения параметров нужно искать вблизи результатов, полученных на предыдущем шаге. Последовательно приближаясь к границе ячейки, было вычислено бифуркационное значение параметра, которому соответствуют нулевые действительные части характеристических корней.

Для наглядности оставляем большое количество знаков после запятой:

$m = 1.59,$

$\varepsilon = 0.801101196123687.$

При этих значениях параметров третьей неподвижной точке соответствуют характеристические показатели

$\lambda_1 = 0.4800,$

$\lambda_{2,3} = \pm 2.4021\mathrm{i}.$

Состояние равновесия является негрубым и для его изучения необходимо проанализировать систему на центральном многообразии. Канонический вид системы вблизи третьей неподвижной точки:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = 0.4800\ u + 48.8234\ v_1 v_2 u - 32.0835\ v_1^2 - 56.5478\ v_1 v_2 + 10.3757\ v_1 u$$
$$+ 12.3830\ v_2^2 - 1.1546\ v_2 u - 0.1280\ u^2 + 620.8122\ v_1^3 - 60.0500\ v_2^3 - 0.0025\ u^3$$
$$- 1792.3487\ v_1^2 v_2 - 30.9317\ v_1^2 u + 633.8219\ v_1 v_2^2 + 0.4874\ v_1 u^2 - 8.4167\ v_2^2 u$$
$$- 0.3314\ v_2 u^2$$
$$\frac{\partial}{\partial t} v_1 = -2.4021\ v_2 - 12.6949\ v_1 v_2 u + 20.9961\ v_1^2 - 39.7745\ v_1 v_2 - 0.4513\ v_1 u$$
$$+ 7.0198\ v_2^2 + 0.4937\ v_2 u + 0.0023\ u^2 - 161.4214\ v_1^3 + 15.6140\ v_2^3 + 0.0006\ u^3$$
$$+ 466.0403\ v_1^2 v_2 + 8.0428\ v_1^2 u - 164.8042\ v_1 v_2^2 - 0.1267\ v_1 u^2 + 2.1885\ v_2^2 u$$
$$+ 0.0862\ v_2 u^2$$
$$\frac{\partial}{\partial t} v_2 = 2.4021\ v_1 - 0.8275\ v_1 v_2 u + 2.9125\ v_1^2 + 9.7739\ v_1 v_2 + 0.5669\ v_1 u - 2.0382\ v_2^2$$
$$- 0.2520\ v_2 u - 0.0078\ u^2 - 10.5219\ v_1^3 + 1.0178\ v_2^3 + 0.0000\ u^3 + 30.3778\ v_1^2 v_2$$
$$+ 0.5243\ v_1^2 u - 10.7424\ v_1 v_2^2 - 0.0083\ v_1 u^2 + 0.1427\ v_2^2 u + 0.0056\ v_2 u^2$$

Локальное инвариантное центральное многообразие выглядит следующим образом:

$\psi = 26.8042v_1^2 - 7.9996v_1v_2 + 14.2346v_2^2 - 46.2271v_1^3 - 93.8891v_1^2v_2 +$

$+2.2849v_1v_2^2 - 89.9590v_2^3$

Ограничив систему на центральное многообразие, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} v_1 = -12.1059\, v_1^{\,3} v_2^{\,3} + 12.2351\, v_1^{\,2} v_2^{\,4} - 3.1271\, v_1 v_2^{\,5} - 39.7745\, v_1 v_2$$
$$+ 482.8852\, v_1^{\,2} v_2 - 175.1784\, v_1 v_2^{\,2} + 100.1389\, v_2^{\,3} v_1^{\,2} - 11.0880\, v_2 v_1^{\,5}$$
$$+ 23.0392\, v_2^{\,2} v_1^{\,4} - 141.7806\, v_2^{\,2} v_1^{\,3} - 45.3062\, v_2^{\,4} v_1 - 405.6151\, v_2 v_1^{\,3}$$
$$+ 276.6290\, v_2^{\,2} v_1^{\,2} + 116.2662\, v_2 v_1^{\,4} - 198.7442\, v_2^{\,3} v_1 - 2.4021\, v_2 + 20.9961\, v_1^{\,2}$$
$$+ 7.0198\, v_2^{\,2} - 173.5189\, v_1^{\,3} + 22.6422\, v_2^{\,3} + 12.3841\, v_1^{\,6} + 17.4612\, v_2^{\,5}$$
$$- 91.0577\, v_1^{\,5} + 31.6246\, v_2^{\,4} + 1.8548\, v_2^{\,6} + 217.2554\, v_1^{\,4}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} v_2 = -0.7891\, v_1^{\,3} v_2^{\,3} + 0.7975\, v_1^{\,2} v_2^{\,4} - 0.2038\, v_1 v_2^{\,5} + 9.7739\, v_1 v_2 + 19.0875\, v_1^{\,2} v_2$$
$$- 0.6563\, v_1 v_2^{\,2} + 6.5273\, v_2^{\,3} v_1^{\,2} - 0.7227\, v_2 v_1^{\,5} + 1.5018\, v_2^{\,2} v_1^{\,4} - 9.2417\, v_2^{\,2} v_1^{\,3}$$
$$- 2.9532\, v_2^{\,4} v_1 - 23.0433\, v_2 v_1^{\,3} + 11.4821\, v_2^{\,2} v_1^{\,2} + 7.5786\, v_2 v_1^{\,4} - 11.1513\, v_2^{\,3} v_1$$
$$+ 2.4021\, v_1 + 2.9125\, v_1^{\,2} - 2.0382\, v_2^{\,2} + 4.6742\, v_1^{\,3} - 2.5696\, v_2^{\,3} + 0.8072\, v_1^{\,6}$$
$$+ 1.1382\, v_2^{\,5} - 5.9354\, v_1^{\,5} + 0.4569\, v_2^{\,4} + 0.1209\, v_2^{\,6} + 8.4721\, v_1^{\,4}$$

Как и исходная, рассматриваемая система также имеет комплексно-сопряженные характеристические показатели с нулевой действительной частью в начале координат. В этом случае, начало координат может оказаться фокусом, седло-фокусом или центром. Для конкретного определения его типа использовался метод Ляпунова. После полярной замены координат по формулам удалось вычислить первую ляпуновскую величину

$$L_1 = -\frac{198.5653}{\pi}.$$

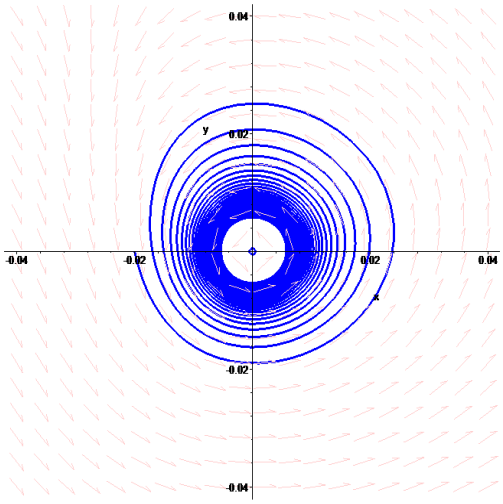


Рис. 3

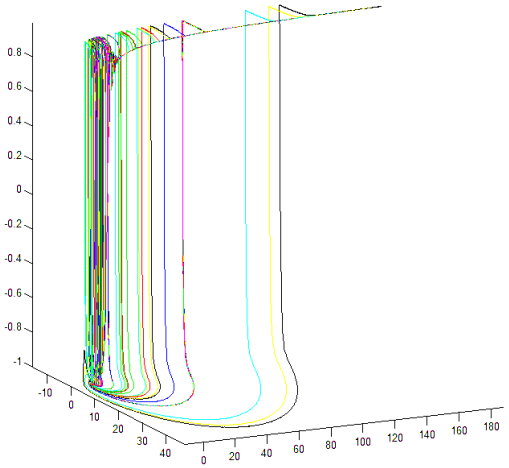


Рис. 4

Эта величина отрицательна, следовательно, мы имеем дело с устойчивым фокусом. На многообразии его фазовый портрет представлен на Рис. 3. При приближении к неподвижной точке, расстояние между каждым витком спирали фокуса стремится к нулю. Такое поведение характерно для системы с бифуркационным значением параметра, при переходе через который для седло-фокуса образуется предельный цикл.

Так как первая ляпуновская величина отрицательна, то, как известно [7], при смене типа неподвижной точки (от фокуса к седло-фокусу) возникает устойчивая периодическая орбита. Таким образом, существование предельного цикла для данной системы доказано.

Мы также предполагаем, что в системе существует гомоклиническая траектория. Нахождение такой траектории – довольно сложная задача. Тем не менее, имеется несколько сценариев, которые обычно предшествуют появлению гомоклинической петли, но их список не полон. Рассмотрим один из них, описанный в [Там же].

Первым шагом на пути к гомоклинической бифуркации является надкритическая бифуркация Андронова-Хопфа: устойчивое состояние равновесия теряет устойчивость и становится седло-фокусом. Границей его двумерного устойчивого многообразия является появившаяся устойчивая периодическая орбита. Для данной системы было доказано выполнение этого факта. На следующем шаге необходимо, чтобы ведущий мультипликатор устойчивой периодической орбиты стал кратным, после чего должна возникнуть пара комплексно-сопряженных корней, остающихся внутри единичной окружности. При этом неустойчивое

многообразие седло-фокуса начинает по спирали наматываться на устойчивую периодическую орбиту, формируя притягивающую «чашку» или «воронку». При дальнейшем изменении параметра системы размеры витков увеличиваются, и, в конечном итоге, неустойчивое многообразие седло-фокуса сталкивается с его устойчивым многообразием. В нашем случае наблюдается именно такая картина (Рис. 4).

К сожалению, закончить рассмотрение этого сценария пока не представляется возможным, т.к. сам расчет мультипликаторов предельного цикла и их дальнейший анализ требуют больших вычислительных затрат. Проследить аналитически за изменением мультипликаторов периодической траектории сложно, поскольку выражения, определяющие их поведение, представляют из себя громоздкую структуру.

В данной работе проведено исследование динамической системы третьего порядка, содержащей два управляющих параметра, на наличие бифуркаций.

Определены типы неподвижных точек системы при различных значениях параметров, и построена бифуркационная диаграмма (процедура в *Matlab*). Исследованы все ячейки на этой диаграмме. Для седловых состояний равновесия были найдены инвариантные локальные многообразия при помощи написанной процедуры в *Maple*, с использованием теоретического материала.

Численным методом было исследовано поведение системы на бифуркационных кривых, в результате чего выяснилось, что при определенных значениях параметров одна из неподвижных точек имеет характеристический показатель с нулевой действительной частью. Для выяснения поведения системы вблизи этой точки, потребовалось исследование системы на инвариантном многообразии, вследствие чего возникла необходимость анализа двумерной динамической системы. Для этой цели мы применили метод Ляпунова и при помощи ляпуновских величин установили не только тип неподвижной точки, но и наличие предельного цикла.

Таким образом, исследование поведения системы, в основном, завершено. Осталась недоказанной только гипотеза о существовании гомоклинической траектории.

Список литературы

1. **Андреев А. Ф.** Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений: учеб. пособие. СПб.: Издательство С.-Петерб. университета, 2001. 160 с.
2. **Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.** Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
3. **Дьяконов В. П.** *Maple 9.5/10* в математике, физике, образовании. М.: СОЛОН=Пресс, 2006. 720 с.
4. **Дьяконов В. П.** *MATLAB 7.*/R2006/2007*: самоучитель. М.: ДМК-Пресс, 2008. 768 с.
5. **Жуков В. П.** Аналоги критериев Бендиксона и Дюлака для динамических систем произвольного порядка // Автоматика и телемеханика. 1999. № 10. С. 46-64.
6. **Рохлин В. А., Фукс Д. Б.** Начальный курс топологии. М.: Наука, 1997. 496 с.
7. **Шильников Л. П., Шильников А. А., Тураев Д. В., Чуа Л.** Методы качественной теории в нелинейной динамике. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. Ч. 1. 416 с.
8. **Шильников Л. П., Шильников А. А., Тураев Д. В., Чуа Л.** Методы качественной теории в нелинейной динамике. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2009. Ч. 2. 548 с.

УДК 7.047
Искусствоведение

В данной статье рассмотрен образ «Мирового древа» в мировоззрении удмуртов. Показана взаимосвязь структуры дерева, отдельных его частей с мировой осью. Проанализированы основные составляющие данного образа и их семантическое значение в контексте обрядовости и последующего материального воплощения в виде ритуальных даров, жертвоприношений, орнаментации, цветового значения. Особое внимание авторы уделили исследованию семантики элементов предметной среды удмуртов, связанной с образом «Мирового древа», которая может быть адаптирована к современности и использована в предметно-бытовом окружении человека.

Ключевые слова и фразы: мировое древо удмуртов; картина мира; верховные божества; небесные светила; обрядовость; семантика образов.

Бортникова Наталья Вячеславовна
Желудов Владимир Григорьевич
Удмуртский государственный университет
bortnicova.natasha@yandex.ru; salomonizh@rambler.ru

«МИРОВОЕ ДРЕВО» В СИМВОЛИКЕ ПРЕДМЕТНОЙ СРЕДЫ УДМУРТОВ©

Менталитет удмуртского этноса формировался веками и был во многом обусловлен специфическим образным восприятием окружающего мира. Удмурт ощущал себя частью космического пространства и свою

© Бортникова Н. В., Желудов В. Г., 2013