Попова Татьяна Михайловна

# РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ

Представленная статья посвящена исследованию разрешимости в смысле интегрального тождества начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения в пространстве интегрируемых вместе с производными функций при условии ограниченности вполне непрерывного оператора, зависящего от решения. Доказывается равномерная ограниченность последовательности приближенных решений в соответствующем пространстве, осуществляется предельный переход к обобщенному решению.



Источник
**Альманах современной науки и образования**
Тамбов: Грамота, 2013. № 8 (75). C. 141-143. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/8/

Оказываясь в условиях дефицита общения, дети находят новые пути взаимодействия. Так, на смену непосредственному общению приходит виртуальный способ – этому способствуют широкое распространение и доступность интернет-пространства. Общаясь в сети, дети находят себе подходящих собеседников, заводят новых друзей, обмениваются разнообразной информацией, чаще всего прячась за «никами» – интернет-именами. Дети и в этом мире стремятся найти свой круг общения, в котором они могут создавать «легенды» собственной жизни, свободно высказываться, проявлять личные и социальные притязания, разыгрывать сюжеты событий и пр.

Потребность в коммуникативных связях является одним из важнейших условий адекватной социализации ребенка, и, несмотря на значительное изменение социальных условий современной жизни (информационная и психологическая насыщенность светового дня, значительное уменьшение свободного времени, сокращение круга так называемого «живого» общения и т.п.), дети стремятся наполнить свою жизнь богатством связей с окружающим миром. Так выполняется генеральный план природы: вхождение ребенка в образ человека посредством общения с окружающим его миром.

Мы являемся свидетелями зарождения новых форм и способов коммуникации в среде детей, влекущих за собой потребность в смене традиционно устоявшихся для нас взглядов на мир детства. Учитывая выше изложенные нами факты, следует признать своевременность обращения ученых, практиков к проблемам детства не только с позиции его охраны и защиты, но и с позиции его осмысления как человеческого потенциала.

*Список литературы*

1. **Венгер А. Л.** Ребёнок в обществе: исторический кризис детства // Вопросы психологии. 2008. № 4. С. 3-12.
2. **Какорея. Из истории детства в России и других странах**: сб. статей и материалов / сост. Г. В. Макаревич. М. – Тверь: Научная книга, 2008. 382 с.
3. **Лаппо-Данилевский А. С.** Методология истории. СПб., 1910-1913. Вып. 1-2. Ч. 1. Теория исторического знания. 472 с.
4. **Ньюфелд Г., Матэ Г.** Не упускайте своих детей / пер. Е. Петровой, А. Абрамовой. М.: Ресурс, 2012. 384 с.
5. **Шпет Г. Г.** Явление и смысл. Томск: Водолей, 1996. 192 с.
6. **Bly R.** The Sibling Society. N. Y.: Knopf Doubleday Publishing Group, 1997. 336 p.

---

УДК 517.957
**Физико-математические науки**

*Представленная статья посвящена исследованию разрешимости в смысле интегрального тождества начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения в пространстве интегрируемых вместе с производными функций при условии ограниченности вполне непрерывного оператора, зависящего от решения. Доказывается равномерная ограниченность последовательности приближенных решений в соответствующем пространстве, осуществляется предельный переход к обобщенному решению.*

*Ключевые слова и фразы:* нелинейная оптика; нелинейное параболическое уравнение; начально-краевая задача; обобщенное решение; метод Галеркина.

**Попова Татьяна Михайловна**, к. ф.-м. н.
*Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск*
*popovatm@rambler.ru*

## РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ©

Рассмотрим модельную задачу взаимодействия световых волн, описываемую начально-краевой задачей для нелинейного параболического уравнения [1]:

$$\partial_t u + u - D\Delta u = KI(u)\,, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u^0(x), \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Здесь $Q = \Omega \times [0,T]$ цилиндр, $S_T$ – его боковая поверхность, $D, K$ – постоянные величины, характеризующие световую волну и светопроницаемость, тип среды, $I(y)$ – ограниченная функция.

Введем необходимые функциональные пространства [2]. Определим пространство $W_2^{l,s}(Q)$ – банахово пространство, состоящее из элементов $L_2(O)$, имеющих обобщенные производные $D_t^s D_x^l$ с соответствующей нормой.

---

$\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$ – подпространство $W_2^{1,0}(Q)$, плотным множеством в котором является совокупность всех бесконечно дифференцируемых финитных в $Q$ функций.

Назовем обобщенным решением задачи (1), (2) из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$ элемент, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int_Q \left(-uv_t + uv + D(\nabla u, \nabla v)\right) dQ = \int_Q KI(u) v dQ,$$

для любой $v \in W_2^{1,1}(Q)$, равной нулю при $t = T$.

Теорема 1. *Если* $I(u)$ *ограниченный, вполне непрерывный оператор из* $W_2^{2,1}(Q)$ *в* $L_2$*;* $u_0(x) \in W_2^1(\Omega)$*, то существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2).*

Для доказательства теоремы применим метод Галеркина. Рассмотрим фундаментальную систему $\{\phi_k(x)\}$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, ортонормированную в $L_2(\Omega)$. Построим последовательность приближенных решений в виде $u_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k(t)\, \phi_k(x)$. Используя соотношение

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_N}{\partial t}\phi_k + u_N \phi_k + D(\nabla u_N, \nabla \phi_k)\right) d\Omega = \int_\Omega KI(u_N)\phi_k d\Omega, \tag{3}$$

получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно $\vec{C}(t) = \{c_k(t)\}_{k=1,\dots,N}$:

$$B_N\left(\frac{d\vec{C}}{dt} + \vec{C}\right) + A_N(\vec{C}) = KI_N, \quad \vec{C}(0) = \vec{C}_0, \tag{4}$$

где $B_n$ – матрица, элементами которой являются $(\phi_k, \phi_j)$, – диагональная в силу ортогональности $\{\phi_k(x)\}$, $A_N$ – матрица, состоящая из элементов $D(\nabla\phi_k, \nabla\phi_j)$, а $KI_N$ – проектор оператора $KI(u)$ на линейную оболочку $\{\phi_k(x)\}$, $\vec{C}_0 = \{C_k^0\}_{k=1,\dots,N}$ – вектор, соответствующий разложению начального условия (2), то есть $P_N u^0(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k^0 \phi_k(x)$.

Докажем, что эта система однозначно разрешима. В силу полноты системы функций $\{\phi_k(x)\}$ матрица $B_n$ невырождена, тогда из построения матриц $B_n^{-1}$, $A_n$, $KI_N$ оператор $\mathrm{X}(\vec{C}) = \int_0^T (I(\vec{C}) + B_N^{-1}\left(A_N(\vec{C}) - KI_N\right))dt$ вполне непрерывен в $\overset{\circ}{H}{}^1(0,T)$. Задача (4) эквивалентна системе интегральных уравнений $\vec{C} + \mathrm{X}(\vec{C}) = 0$. Докажем, что существует неподвижная точка вполне непрерывного оператора $\mathrm{X}(\vec{C})$ по принципу Лере-Шаудера. Покажем, что всевозможные решения уравнения $\vec{C} + \lambda\mathrm{X}(\vec{C}) = 0$ для всех $\lambda: 0 \le \lambda \le 1$ равномерно ограничены по норме пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(0,T)$, коэффициенты при $c_k(t)$ есть ограниченные функции, свободные члены системы, суммируемые на (0, $T$), следовательно, однозначно определяются непрерывные на [0,$T$] функции $c_k(t)$. Пусть $\vec{C}_\lambda$ – произвольное решение уравнения $\vec{C} + \lambda\mathrm{X}(\vec{C}) = 0$, тогда оно удовлетворяет задаче $B_N\left(\frac{d\vec{C}}{dt} + \lambda\vec{C}\right) + \lambda A_N(\vec{C}) = \lambda KI_N, \quad \vec{C}(0) = \vec{C}_0,$ которая эквивалентна системе уравнений

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_N}{\partial t}\phi_k + \lambda u_N \phi_k + \lambda D(\nabla u_N, \nabla \phi_k)\right) d\Omega = \lambda \int_\Omega KI(u_N)\phi_k d\Omega, \; k = 1,\dots,N.$$

Получим оценки для $u_N(x,t)$ и $\nabla u_N(x,t)$, не зависящие от $N$, и покажем, что все приближенные решения равномерно ограничены вместе с производными по $x$.

Умножим (3) на $c_k(t)$, просуммируем по $k$ от 1 до $N$ и проинтегрируем по $t$.

$$\int_{Q_t} \left(\frac{\partial u_N}{\partial t} u_N + u_N^2 + D|\nabla u_N|^2\right) dQ = \int_{Q_t} KI(u_N) u_N dQ.$$

Отсюда, учитывая равномерную ограниченность $KI(u)$, следует

$$\frac{1}{2}\|u_N\|_{L_2(\Omega)}^2 + \lambda\int_0^t \left(\|u_N\|_{L_2(\Omega)}^2 + D\|\nabla u_N\|_{L_2(\Omega)}^2\right) dt \le \int_0^t \bar{K}\|u_n\|^2 dt + \frac{1}{2}\|u_N(x,0)\|_{L_2(\Omega)}^2. \tag{5}$$

Из последнего соотношения получим

$$\frac{1}{2}\|u_N\|^2_{L_2(\Omega)} \le \bar{K}\int_0^t \|u_N\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_N(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)},$$

откуда, согласно неравенству Гроноулла, получаем оценку

$$\sup_t \|u_N\|^2_{L_2(\Omega)} \le M,$$

где постоянная $M$ не зависит от $N$. Далее из соотношения (5), неравенства Фридрихса и полученной оценки следует

$$\sup_t \|\nabla u_N\|^2_{L_2(\Omega)} \le M.$$

Из полученных оценок следует, что $\vec{C}$ и $\frac{d\vec{C}}{dt}$ равномерно ограничены и, следовательно, задача (1), (2) разрешима, и имеет место оценка: $\|u_N\|^2_{W_2^{1,0}(Q)} \le M$. Следовательно, из последовательности приближенных решений $u_N(x,t)$ можно выделить подпоследовательность $u_{N_m}(x,t)$, слабо сходящуюся в $L_2(\Omega)$ вместе с производными $\frac{\partial u_{N_m}}{\partial x}$ к элементу $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$. Этот элемент и есть обобщенное решение задачи. Действительно, умножим (3) на произвольную абсолютно непрерывную функцию $d_k(t)$, такую что $d_k'(t) \in L_2(0,T)$ и $d_k(T) = 0$, суммируем полученные равенства по всем $k$ и интегрируем по $t$. Это дает тождество

$$\int_0^T \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial u_N}{\partial t}\Phi + u_N\Phi + D(\nabla u_N, \Phi) \right) dQ = \int_0^T \int_{\Omega} KI(u_N)\Phi dQ,$$

в котором $\Phi = \sum_{k=1}^{N} d_k(t)\phi_k(x)$.

Совокупность всех функций $\Phi$ такого вида плотна в подпространстве $W$, которое состоит из элементов пространства $W^1_{2,0}(Q)$, равных нулю при $t = T$. При фиксированном $\Phi$ можно перейти к пределу по выбранной подпоследовательности, в результате получаем

$$\int_0^T \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial u_N}{\partial t}\Phi + u_N\Phi + D\nabla u_N\Phi \right) d\Omega\, dt \to \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t}\Phi + u\Phi + D\nabla u\Phi \right) d\Omega\, dt.$$

В силу того, что оператор $I$ вполне непрерывный, то последовательность $KI(u_N)$ относительно компактна и $y_N = KI(u_N) \xrightarrow{сл} KI(u)$, следовательно, в силу ограниченности $\Phi$ $\int_0^t \int_{\Omega} \left( KI(u_N) - KI(u) \right)\Phi d\Omega dt \to 0$.

Для доказательства единственности рассмотрим $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – обобщенные решения задачи (1), (2). Тогда для разности $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ имеет место интегральное тождество

$$\int_Q \left( -wv_t + wv + D(\nabla w, \nabla v) \right) dQ - \int_Q (KI(u_1) - KI(u_2))v dQ = 0 \qquad (6)$$

для любой $v \in W_2^{1,1}(Q)$, равной нулю при $t = T$.

Отсюда, из равномерной непрерывности оператора $I$ следует

$$\left| \int_Q (KI(u_1) - KI(u_2))v dQ \right| \le M \int_Q |w||v| dQ. \qquad (7)$$

Учитывая неравенство (7), из (6), используя ограниченность решений и неравенства Юнга и Гроноулла, получаем, что $\|w\| \le 0$. Следовательно, решение единственно.

*Список литературы*


1. **Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А.** Математическое моделирование в нелинейной оптике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 156 с.
2. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Солонников В. А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.