Торшина Ольга Анатольевна

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОПРАВОК ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В работе рассматривается задача суммирования специального класса расходящихся рядов. Предлагается численный метод нахождения поправок теории возмущений, дающий достаточно точные значения при различных параметрах возмущения. Метод применим, в частности, для суммирования рядов с факториальным ростом членов.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2013. № 12 (79). C. 168-171. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/12/

УДК 519.6
Физико-математические науки

В работе рассматривается задача суммирования специального класса расходящихся рядов. Предлагается численный метод нахождения поправок теории возмущений, дающий достаточно точные значения при различных параметрах возмущения. Метод применим, в частности, для суммирования рядов с факториальным ростом членов.

Ключевые слова и фразы: поправки теории возмущений; суммирование расходящихся рядов; разложение Стилтьеса; сферическая функция; оператор квадрата момента импульса $\widehat{L}^2$.

Торшина Ольга Анатольевна, к. ф.-м. н., доцент
Магнитогорский государственный университет
olganica@mail.ru

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОПРАВОК ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ©

Пусть $\widehat{L}^2$ – оператор квадрата момента импульса с потенциалом на проективной плоскости. Собственные функции оператора, являющиеся решением уравнения

$$-h^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\nu}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\nu}{\partial\nu^2}\right\}=\widehat{L}^2\nu,$$

имеют вид $v_{n,i}=Y_{n,i}(\theta,\phi)$($\theta,\phi$ – сферические координаты). Функции $Y_{n,i}$ относятся к классу специальных функций

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{n,i}^*(\theta,\phi)Y_{n,i}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi=1.$$

Спектр собственных значений оператора дискретен [2] $\widehat{L}^2=h^2(l^2+l)$ $\left(n=\overline{0,\infty}\right)$. Кратность собственного значения $\nu_n=2n+1$. Зададим вертикальные прямые $l_n=\{\lambda\,|\,\lambda=\lambda_n+n+1+ip,\ -\infty<p<+\infty\}$ на комплексной плоскости.

Функция, определённая на поверхности сферы любого радиуса, является функцией географических координат θ и ϕ на этой сфере; обозначим её $f(\theta,\phi)$. Положим, что она разлагается в ряд по сферическим функциям

$$f(\theta,\phi)=\alpha_0^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha_0^{(n)}L_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}\left[\alpha_m^{(n)}\cos m\phi+b_m^{(n)}\sin m\phi\right]L_n^{(m)}(\cos\theta)\right\},$$

где

$$\alpha_m^{(n)}=\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\delta_m\pi(n+m)!}\iint_S f(\theta,\phi)L_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\phi d\sigma,$$

$$b_m^{(n)}=\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\delta_m\pi(n+m)!}\iint_S f(\theta,\phi)L_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\phi d\sigma$$

(n>0, $\delta_m=2$ при m=0 и $\delta_m=1$ при m>0; $\delta\sigma=\sin\theta d\theta d\phi$).

Имеет место равенство [1, с. 6]

$$\sum_{i=0}^{2n}\mu_{n,i}=n(n+1)(2n+1)+\sum_{i=0}^{2n}(Lv_{ni},v_{ni})+\alpha_n(p)+\beta_n(p)+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где $\alpha_n(p)$, $\beta_n(p)$ – вторая и третья поправки теории возмущений.

Вычислим поправки теории возмущений.

Первая поправка

$$\sum_{i=0}^{2n}(Lv_{ni},v_{ni})=\frac{2m+1}{4\pi}\iint_{\Phi}p(\theta,\phi)\sin\theta d\phi d\theta=const\cdot$$

Пользуясь асимптотическим разложением Стилтьеса [2]

$$P_k(\cos\alpha)=\frac{\cos\{(k+1/4)\alpha-\pi/8\}}{(\sin\alpha)^{1/2}}\left[\frac{(2)^{1/2}}{\pi^{1/2}k^{1/2}}+\frac{O(1)}{k^{3/2}}\right]+$$

$$+\frac{\sin\{(k+3/4)\alpha-\pi/8\}}{(\sin\alpha)^{3/2}}\frac{O(1)}{k^{3/2}}+\frac{O(1)}{(\sin\alpha)^{5/2}k^{5/2}}$$

и теоремой сложения для четных сферических гармоник [6]

$$\alpha_{k,n}=\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2k}\left(Pv_{ki},v_{nj}\right)\left(Pv_{nj},v_{ki}\right)=$$

$$=\iint_{\Phi}\iint_{\Phi}\frac{(2k+1)(2n+1)}{8\pi^2}p(\theta,\varphi)p(\theta',\varphi')P_k(\cos\alpha)P_n(\cos\alpha)L_i\sin\theta L_j\sin\theta' d\theta d\varphi d\theta' d\varphi',$$

вычислим вторую поправку теории возмущений

$$\alpha_n(p)=\sum_{i=0}^{2k}\sum_{j=0}^{2n}\left(L\nu_{ki},\nu'_{nj}\right)\left(L\nu_{nj},\nu'_{ki}\right)=$$

$$=\frac{(2k+1)(2n+1)}{8\pi^2}\iint_{\Phi}\iint_{\Phi}p(\theta,\varphi)\nu_{ki}(\theta,\varphi)\nu_{nj}(\theta,\varphi)\sin(\theta)d\theta d\varphi\times$$

$$\times p(\theta',\varphi')\nu'_{nj}(\theta',\varphi')\nu'_{ki}(\theta',\varphi')\sin\theta' d\varphi d\theta' d\varphi'=$$

$$=-\frac{(2m+1)}{8\pi^2}\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{(2k+1)}{\left|\lambda_k-\lambda_n\right|}Sp\left\{\left[\int_0^{\varepsilon}+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\right]\times\right.$$

$$\times f(\alpha)\sin\alpha L_{2k}(\cos\alpha)L_{2n}(\cos\alpha)d\alpha+$$

$$+\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}f(\alpha)\sin\alpha\left(\frac{\cos((2k+1/2)\alpha-\pi/4)}{(\sin\alpha)^{1/2}}\left[\frac{(2/\pi)^{1/2}}{(2k)^{1/2}}+\frac{O(1)}{(2k)^{3/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin((2k+3/2)\alpha-\pi/4)}{(\sin\alpha)^{3/2}}\frac{O(1)}{(2k)^{3/2}}+\frac{O(1)}{(\sin\alpha)^{5/2}(2k)^{33/2}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\cos((2n+1/2)\alpha-\pi/4)}{(\sin\alpha)^{1/2}}\left[\frac{(2/\pi)^{1/2}}{(2n)^{1/2}}+\frac{O(1)}{(2n)^{3/2}}\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sin((2n+3/2)\alpha-\pi/4)}{(\sin\alpha)^{3/2}}\frac{O(1)}{(2n)^{3/2}}+\frac{O(1)}{(\sin\alpha)^{5/2}(2n)^{33/2}}\right)d\alpha\right\}.$$

Справедлива асимптотическая оценка [5]:

$$-\frac{2n+1}{8\pi^2}\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{2k+1}{\left|\lambda_k-\lambda_n\right|}\times$$

$$\times\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{f(\alpha)}{\sin^3\alpha}\sin\left(\left((2n+\frac{3}{2}\right)\alpha-\frac{\pi}{8}\right)\frac{O(1)}{k^{2,5}n^{1,5}}d\alpha=$$

$$=\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{1}{n^{0,5}k^{1,5}\left|k^2-n^2\right|}O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=O\left(\frac{1}{\varepsilon n^{2,5}}\right).$$

Преобразуем $\alpha_n(p)$:

$$\alpha_n(p)=O\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)+O\left(\frac{\varepsilon\ln n}{n^2}\right)+O\left(\varepsilon^2\ln n\right)+O\left(\frac{\varepsilon\ln n}{n}\right)+O\left(\frac{\varepsilon}{n^{3/2}}\right)+$$

$$+O\left(\frac{\varepsilon\ln n}{n^2}\right)-\frac{1}{4\pi^2 n}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}f(\alpha)ctg\alpha(\pi-\alpha)d\alpha+O\left(\frac{\varepsilon\ln n}{n^2}\right)+O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right)+$$

$$+O\left(\frac{\ln\varepsilon\ln n}{n^{3/2}}\right)+O\left(\frac{\varepsilon\ln n}{n^2}\right)+O\left(\frac{\varepsilon}{n^2}\right)+O\left(\frac{\ln n}{n^3\varepsilon}\right)+O\left(\frac{\ln\varepsilon}{n^{3/2}}\right)+O\left(\frac{1}{\varepsilon n^{3/2}}\right)+O\left(\frac{1}{n^3\varepsilon^3}\right).$$

В итоге:

$$\alpha_n(p)=\frac{O(1)}{n}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}f(\alpha)ctg\alpha(\pi-\alpha)d\alpha+O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right).$$

Третья поправка теории возмущений:

$$\beta_n(p)=\frac{1}{12\pi i}Sp\left[\int_{l_n}-\int_{l_{n-1}}\right]\left[\frac{L}{T-\lambda E}\right]^3 d\lambda=\frac{1}{12\pi i}\times$$

$$\times\left[\int_{l_n}-\int_{l_{n-1}}\right]\sum\frac{(2n+1)(2k+1)(2l+1)}{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_k-\lambda)(\lambda_l-\lambda)}d\lambda\times$$

$$\times\left(\frac{1}{8\pi}\right)^3\iint_F\iint_F\iint_F p(\theta,\varphi)p(\theta',\varphi')p(\theta'',\varphi'')\times$$

$$\times L_n(\cos\alpha)L_n(\cos\beta)L_n(\cos\gamma)\sin\theta\sin\theta'\sin\theta'' d\varphi d\varphi' d\varphi'' d\theta d\theta' d\theta''.$$

Учитывая, что $p(\theta,\varphi)$ – нечетная функция, получаем: шестикратный интеграл равен нулю, и, следовательно, $\beta_n(p)=0$.

Оценим четвертую поправку теории возмущений

$$\left|-\frac{1}{4\pi i}Sp\left[\int_{l_n}-\int_{l_{n-1}}\right]\left(\frac{L}{T-\lambda E}\right)^4 d\lambda\right|\le$$

$$\le O(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|\frac{1}{T-\lambda E}\right\|_2^2\left\|\frac{1}{T-\lambda E}\right\|^2 d\lambda\le O(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{(|\xi|+n)^3}=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Рассмотрим численный метод вычисления поправок теории возмущений.

Пусть $\varphi(x)$ – непрерывная и убывающая на бесконечности функция

$$\mu_n=\int_0^\infty t^n dX(t)=\int_0^\infty t^n\varphi(t)dt,$$

$$X(t)=\int_0^x \varphi(t)dt.$$

Рассмотрим метод моментов:

$$L(\lambda)=\int_0^x\varphi(t)\kappa(\lambda t)dt,\ k(\lambda)=\sum_{i=0}^n\left(\frac{e_i}{\mu_i}\lambda^i\right).$$

Коэффициенты ряда являются моментами Стилтьеса:

$$e_n=\int_0^\infty t^n\varphi(t)dt,\ L(\lambda)=\int_0^\infty\frac{\varphi(t)}{1+\lambda t}dt.$$

Вычислим функцию плотности [1, с. 6]:

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^\infty a_k p_k(t).$$

Если базисные функции можно представить в виде [Там же]

$$p_k(t)=\sum_{i=0}^\infty r_{ki}t^i, \tag{1}$$

то решение

$$a_k=\int_0^\infty\varphi(t)p_k(t)dt=r_i\int_0^\infty\sum_{i=0}^\infty\varphi(t)t^i dt=\sum_{i=0}^\infty r_{ki}e_i. \tag{2}$$

В итоге

$$L(\lambda)=\sum_{k=0}^\infty\sum_{i=0}^\infty e_i r_{ki}\int_0^\infty\frac{p_k(t)}{1+\lambda t}dt=\sum_{i=0}^\infty e_i P_i(\lambda). \tag{3}$$

Весовые функции

$$P_i(\lambda)=\sum_{k=0}^\infty r_{ki}\int_0^\infty\frac{p_k(t)}{1+\lambda t}dt. \tag{4}$$

Ряды (1-4) являются расходящимися. Для определения суммы расходящегося ряда используют разложение функции $\varphi(t)$ по полному набору функций.

Метод применим для суммирования рядов с фрактальным ростом членов.

Список литературы

1. **Дубровский В. В., Кадченко С. И., Кравченко В. Ф., Садовничий В. А.** Вычисление первых собственных чисел дискретного оператора // Электромагнитные волны и электронные системы. 1998. Т. 3. № 2.
2. **Дубровский В. В., Кадченко С. И., Кравченко В. Ф., Садовничий В. А.** Новый метод вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической теории устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами // Доклады Академии наук. 2001. Т. 381. № 3. С. 320-324.
3. **Кадченко С. И.** Вычисление сумм рядов Рэлея-Шрёдингера возмущенных самосопряженных операторов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 9. С. 1494-1505.
4. **Торшина О. А.** О следе дифференциального оператора с потенциалом на проективной плоскости // Вестник Челябинского государственного университета. 2003. Т. 3. № 3. С. 178-191.
5. **Торшина О. А.** Следы дискретных операторов с частными производными // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2012. № 4. С. 220-222.
6. **Торшина О. А.** Формула регуляризованного следа дифференциального оператора со сложным вхождением спектрального параметра // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2003. Т. 8. № 3. С. 467-468.

NUMERICAL METHOD OF COMPUTING PERTURBATION THEORY CORRECTION DATA

Torshina Ol'ga Anatol'evna, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor
Magnitogorsk State University
olganica@mail.ru

In the article the problem of the summation of divergent series special class is considered. The numerical method of finding perturbation theory correction data is suggested providing quite exact values at different perturbation parameters. The method may be used, in particular, for the summation of series with the factorial growth of terms.

Key words and phrases: perturbation theory correction data; summation of divergent series; Stieltjes expansion; spherical function; operator of momentum moment square $\widehat{L}^2$.

УДК 321.9
Политология

В данной статье рассмотрены основы российского федерализма, формирование и функционирование системы органов исполнительной власти в субъектах РФ. В настоящее время вопрос о границе между компетенцией центра и субъектов является весьма актуальным, поскольку Россия имеет особое федеративное устройство, которое сочетает в себе как элементы федеративной организации, так и элементы унитарного государства, отражает границы страны и советское наследие. Поэтому имеет смысл провести анализ соответствующих статусов субъектов, определить существующие недостатки и противоречия.

Ключевые слова и фразы: федеративное государство; исполнительная власть; субъекты РФ; исполнительные органы субъектов РФ; структурные элементы системы органов исполнительной власти субъектов РФ.

Урасова Алла Дмитриевна
Волгоградский государственный университет
Alla.urasova@mail.ru

ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ И ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ОРГАНОВ ИСПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВЛАСТИ В СУБЪЕКТАХ РФ©

Современная Россия представляет собой федеративное государство, ключевой характеристикой которого является баланс отношений между федеральными и региональными органами власти. Данный баланс определяет степень автономии субъектов и уровень децентрализации государства.

Исполнительная власть в субъектах РФ занимает важное место в системе органов государственной власти, она наделена широкими полномочиями и регламентирована более подробно, чем исполнительная власть в Конституции РФ. Данная ветвь власти неразрывно связана с полномочиями главы государства, не ограничивается отведенной ей ролью только исполнителя законов и по своему политическому весу превосходит законодательную власть. За последние годы в России произошло реформирование как политической системы в целом, так и исполнительной власти в частности. Вследствие чего изменились принципы функционирования исполнительной вертикали.

В советский период органы исполнительной власти действовали на основе принципов подконтрольности и подотчетности Советам народных депутатов, демократического централизма, социалистической законности и др. «Демократический централизм в деятельности органов государственного управления понимался в виде четкого разграничения компетенции центрального и местного аппаратов, строгой подчиненности и подотчетности нижестоящих органов вышестоящим, безусловной обязанности нижестоящих органов в пределах их компетенции» [2, с. 23], а также необходимости проявлять творчество и инициативу при решении вопросов своего ведения.

С начала 1990-х гг. начался процесс формирования в России новой системы государственной власти на основе принципа разделения властей. В 1993 году была принята Конституция РФ, которая установила систему органов государственной власти, основанную на принципах законности, демократизма, федерализма, республиканизма и разделения властей. «В настоящее время российское государство представляет собой уникальное сочетание федеративной организации и элементов конфедерации, а также унитарного государства, т.е. такую организационную структуру, которая отражает масштабы страны, ее многоликость, советское наследие» [4, с. 43]. В РФ включено 83 субъекта: 46 областей, 21 республика, 9 краёв, 2 города федерального значения, 1 автономная область, 4 автономных округа. Вместе с тем все виды субъектов РФ могут быть интегрированы в следующие общие группы: национально-государственная (республики РФ),

---