Гарькина Ирина Александровна, Данилов Александр Максимович,
Пылайкин Сергей Александрович

ИЗ ОПЫТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Приводится опыт математического моделирования при решении практических задач, связанных с анализом и синтезом систем различной природы. Рассматриваются примеры, иллюстрирующие использование некоторых методов моделирования в медицинской практике, теории управления, строительном материаловедении, при разработке тренажных и обучающих комплексов по подготовке операторов.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2014. № 2 (81). C. 35-37. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2014/2/

УДК 001.8:001.5
Технические науки

Приводится опыт математического моделирования при решении практических задач, связанных с анализом и синтезом систем различной природы. Рассматриваются примеры, иллюстрирующие использование некоторых методов моделирования в медицинской практике, теории управления, строительном материаловедении, при разработке тренажных и обучающих комплексов по подготовке операторов.

Ключевые слова и фразы: система; математическое моделирование; оптимизация; методы; реализация.

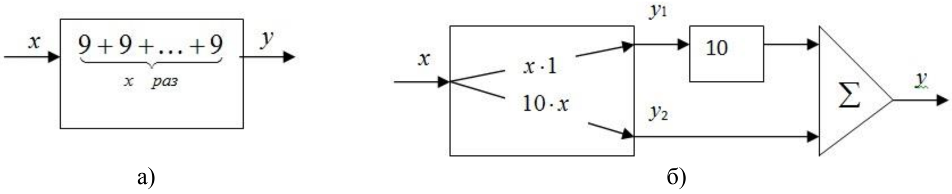
Гарькина Ирина Александровна, д.т.н.
Данилов Александр Максимович, д.т.н.
Пылайкин Сергей Александрович
Пензенский государственный университет архитектуры и строительства
fmatem@pguas.ru

ИЗ ОПЫТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ©

Исследования реальной действительности отличаются цикличностью. Факты, завершающие один цикл, являются началом следующего цикла. Если справедливость предсказаний не подтверждается, то ведется поиск более совершенной теории [4; 5]. Основная цель науки – исследование явлений реальной действительности; наука начинается с наблюдения изучаемых явлений и когнитивного моделирования [2]. Далее путем умозрительного описания и объяснения рассматриваемых процессов и явлений разрабатывается теория для увязывания наблюдаемых результатов. Впоследствии теории могут развиваться без обращения к наблюдениям и позволят предсказать, что произойдет под влиянием различных условий. Затем теоретические выводы должны проверяться путем новых наблюдений исследуемых процессов и явлений. При согласованности теоретических выводов с данными, полученными в результате наблюдений, уверенность в правильности теории возрастает. В противном случае ее следует признать несостоятельной или продолжить совершенствовать. Иногда указанная схема исследований не выдерживается: теории появляются до обнаружения соответствующих явлений, или теории, обоснованные наблюдениями, остаются непроверенными.

Наибольшими возможностями обладает математическое моделирование: оно позволяет исследовать процессы с различным физическим содержанием, но описываемые одинаковыми математическими соотношениями. Оно успешно применяется и в самой математике (так, решения, полученные численными методами, являются моделями истинных решений (реальных объектов)). Сложность и многообразие процессов функционирования реальных систем не позволяют получить абсолютно адекватные математические модели (математическая модель, описывающая формализованный процесс функционирования системы, в состоянии охватить только основные, характерные закономерности). Как правило, практически невозможно указать формальные правила для выбора характеристик состояний и параметров исследуемых реальных систем; исследователь вынужден руководствоваться лишь собственной интуицией, опирающейся на постановку прикладной задачи и понимание природы функционирования системы. Действительно, рассмотрим устройство, которое по числу $x = \overline{1,9}$ на входе выдает на выходе число $y = 9x = y_1 \cdot 10 + y_2$ (таблица умножения на 9). Пусть требуется построить математическую модель этого устройства (определить структуру и параметры «черного ящика», преобразующего x в y). Очевидно, что задача не имеет однозначного решения. Например, возможны два решения, структурные схемы которых приводятся на Рис. 1 (а, б).

Налицо общая задача идентификации (определяются структура и параметры математической модели по входу x и выходу y). В большинстве случаев предполагается, что структура математической модели известна и требуется по входным и выходным воздействиям определить лишь параметры модели (частная задача идентификации).



а) б)

Рис. 1

Если реальная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами (входное воздействие $x(t)$ преобразуется в выходное $y(t)$ (Рис. 2)), то решается обратная задача теории дифференциальных уравнений, а именно: по известному решению $y(t)$ при заданном $x(t)$ определяются коэффициенты дифференциального уравнения:

$$y^{(n)} + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \ldots + b_{m-1} x + b_m .$$

Структура определяется принятыми значениями m и n.

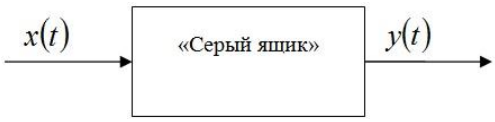


Рис. 2

При решении многих технико-экономических экстремальных задач (определение состава композиционного материала, обеспечивающего оптимальные характеристики; определение оптимальных условий культивирования микроорганизмов; управление трудовыми ресурсами и запасами, оптимальное размещение объектов, составление календарных планов, выбор наилучших проектных решений и т.д.) для описания функций отклика (параметры оптимизации) аналитическими зависимостями эффективно используются методы математического планирования эксперимента. Важную роль математические модели играют и при решении задач прокладки систем тепло-, газо- и водоснабжения, трассировки дорог (в основном, используются математическое программирование, теория графов и др.). При решении задач диагностики отказов (в том числе диагностики заболеваний человека), экспертизы зданий и сооружений широко используются как детерминированные, так и стохастические модели. В качестве иллюстрации рассмотрим использование математического моделирования для широко используемого в последнее время метода коррекции близорукости или дальнозоркости (определяются расположением фокуса хрусталика относительно сетчатки глаза). Для смещения фокуса на роговице (ниже хрусталика) делаются специальные надрезы, уменьшающие ее упругие характеристики. Вследствие этого роговица изменяет форму под воздействием на нее различных сил (атмосферное давление, внутриглазное давление, давление век и т.д.). Происходит смещение хрусталика относительно сетчатки, которое существенно зависит от длины и количества надрезов. Эти параметры определяются степенью близорукости пациента и должны быть выяснены до оперативной коррекции зрения. Для прогнозирования смещения хрусталика в зависимости от параметров надрезов и используется математическое моделирование.

Создать модель упруго-деформированного состояния роговицы (с учетом упругости склеры), учитывающую все индивидуальные особенности глаза пациента (отсутствие осевой симметрии, наличие астигматизма и т.д.) и позволяющую в полной мере определить возможные линейные и угловые смещения хрусталика относительно сетчатки, вряд ли возможно. Здесь ограничимся лишь рассмотрением случая осевой симметрии роговицы, тогда меридиональные сечения роговицы будут идентичны (упругая модель на Рис. 3).

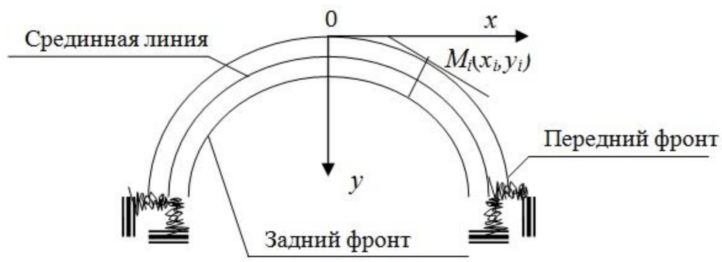


Рис. 3

Для определения деформаций воспользуемся уравнением срединной линии. Для этого с помощью рефрактометра в точках $M_i(x_i, y_i)$, лежащих на роговой оболочке, находятся радиусы кривизны.

Кусочно-линейная аппроксимация радиуса кривизны $R(x)$ на участке (x_{i-1}, x_i) дает

$$R(x) = a_i x + b_i ,$$

где

$$a_i = \frac{R_i - R_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad b_i = \frac{x_i R_{i-1} - x_{i-1} R_i}{x_i - x_{i-1}} .$$

Функция $y(x)$, описывающая передний фронт, определится как решение дифференциального уравнения

$$y''(x) = \frac{\sqrt{\left(1 + \left(y'(x)\right)^2\right)^3}}{a_i x + b_i} .$$

На участке $[0, x_1]$ справедливо

$y(x_1) = y(0) = 0,$

$y'(x_1) = y'(0) = 0.$

На участке $[x_1, x_2]$ $y(x)$ определится решением задачи Коши при начальных условиях

$y(x_1) = 0,$

$y'(x_1) = 0;$

на участке $[x_2, x_3]$ – при начальных условиях

$y|_{x=x_2} = y(x_2),$

$y|_{x=x_2} = y'(x_2)$

и т.д. до последнего интервала $[x_{n-1}, x_n]$. Координаты точек, лежащих на заднем фронте роговой оболочки, приближенно можно определить по значениям толщины роговицы в точках $(x_i, y(x_i))$ переднего фронта (используется корнеометр). Далее без затруднений методом наименьших квадратов определяется уравнение заднего фронта оболочки; по уравнениям фронтов – срединная линия меридионального сечения роговицы.

При оптимизации свойств материалов наиболее перспективными на сегодня остаются методы математического планирования эксперимента. К сожалению, получаемые при этом регрессионные модели редко и не в полной мере используются при прогнозировании их структуры и свойств. Неплохие результаты были получены при решении ряда оптимизационных задач с кусочно-линейной аппроксимацией целевой сепарабельной функции и ограничений задачи. Это позволяет заменить задачу нелинейного программирования приближенной линейной (последняя легко решается симплекс-методом). При решении многих задач строительного материаловедения наиболее эффективными оказались градиентные методы Франка-Вулфа и штрафных функций [1; 3; 5].

Имеется положительный опыт определения на основе математического моделирования параметров управляющих воздействий человека-оператора по данным нормальной эксплуатации и их связи с техническими характеристиками объекта. Это позволило установить необходимую степень точности имитационных характеристик тренажера из условия формирования требуемого стиля управления (на основе сравнения параметров систем: «оператор – имитатор», «оператор – реальный объект») [6].

Как видим, нет особых путей для приложений математики, позволяющих избежать кропотливого освоения, развития и применения современных математических методов, необходимых для того или иного исследования.

Список литературы

1. **Будылина Е. А., Гарькина И. А., Данилов А. М.** Приближенные методы декомпозиции при настройке имитаторов динамических систем // Региональная архитектура и строительство. 2013. № 3 (17). С. 150-156.
2. **Гарькина И. А., Данилов А. М., Королев Е. В.** Когнитивное моделирование при синтезе композиционных материалов как сложных систем // Известия вузов. Строительство. 2009. № 3/4. С. 30-37.
3. **Гарькина И. А., Данилов А. М., Петренко В. О.** Оценка качества систем с иерархической структурой // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2013. № 6 (73). С. 46-48.
4. **Данилов А. М., Гарькина И. А.** Математическое моделирование сложных систем: состояние, перспективы, пример реализации // Вестник гражданских инженеров. 2012. № 2 (31). С. 333-337.
5. **Данилов А. М., Гарькина И. А., Домке Э. Р.** Математическое и компьютерное моделирование сложных систем. Пенза: ПГУАС, 2011. 296 с.
6. **Данилов А. М., Домке Э. Р., Гарькина И. А.** Математическое моделирование управляющих воздействий оператора в эргатической системе // Вестник МАДИ. 2011. № 2. С. 18-23.

FROM MATHEMATICAL MODELLING EXPERIENCE WHILE APPLIED PROBLEMS SOLVING

Gar'kina Irina Aleksandrovna, Doctor in Technical Sciences
Danilov Aleksandr Maksimovich, Doctor in Technical Sciences
Pylaikin Sergei Aleksandrovich
Penza State University of Architecture and Building
fmatem@pguas.ru

The experience of mathematical modelling is presented while solving applied problems connected with the analysis and synthesis of systems having different essences. The examples are considered that illustrate some modelling methods use in medical practice, management theory, building material science, while working out drilling and instructing complexes for operators' training.

Key words and phrases: system; mathematical modelling; optimization; methods; realization.