Романов Вадим Николаевич

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ТЕОРЕМА ФЕРМА

В статье исследована взаимосвязь свойств множества натуральных чисел и теоремы П. Ферма. Предложено доказательство теоремы, основанное на вышеуказанных свойствах и анализе ограничений к предполагаемым решениям. Изучены роль допустимых преобразований переменных, входящих в уравнение, а также вклады отдельных составляющих в зависимости от значений характеристических величин. Расчеты подтверждают правильность хода доказательства.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2014/3/43.html

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2014. № 3 (82). C. 151-162. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2014/3/

Благодаря научным исследованиям И. В. Смирнова были разработаны производственные технологии криоконсервации, длительного хранения и использования замороженной спермы производителей в условиях крупномасштабной селекции. Методы разведения и гибридизации в животноводстве получили новые возможности при увеличении эффективности традиционных методов. В селекционный процесс вовлекались генетические ресурсы фактически всех стран мира. Сохранение генофонда в животноводстве получило надежный и достаточно простой способ криоконсервации генетической информации, в результате стали реальностью не только рекультивация утраченных ранее форм жизни, но и создание новых генетически модифицированных объектов.

Таким образом, И. В. Смирнов впервые разработал быстрый метод замораживания и размораживания спермы производителей сельскохозяйственных животных, предложил подходы к эквилибрации половых клеток, замораживанию и размораживанию спермы, а также другие технические приемы, развил теорию перехода воды в стекловидную форму, обеспечившую сохранность внутриклеточных структур. Открытие не известной раньше способности сперматозоидов сохранять биологическую полноценность и генетическую информацию после замораживания стало основой становления науки о морфологии и морфогенезе сперматозоидов производителей сельскохозяйственных животных, способствовало развитию новых направлений в теории и практике селекции животных.

Список литературы

1. **Бородай І. С.** Теоретико-методологічні основи становлення та розвитку вітчизняної зоотехнічної науки: монографія. Вінниця, 2012. 416 с.
2. **Вінничук Д. В.** Класик зоотехнії // Науковий подвиг І. В. Смирнова: до 90-річчя від дня народження видатного вченого-біолога. К., 2001. С. 39-44.
3. **Зубець М. М., Бородай І. С.** Київська дослідна станція тваринництва «Терезине»: історія, здобутки, вчені. Вінниця, 2011. 208 с.
4. **Смирнов И. В.** Влияние глицерина и гипертонических растворов на переживаемость спермиев быков-производителей // Увеличение производства продуктов животноводства. К., 1963. С. 42-52.
5. **Смирнов И. В.** К теории глубокого охлаждения спермы // Животноводство. 1974. № 11. С. 65-70.
6. **Смирнов И. В.** Сохранение семени сельскохозяйственных животных посредством глубокого охлаждения // Советская зоотехния. 1949. № 4. С. 93-96.
7. **Смирнов І. В.** Деякі питання теорії глибокого охолодження сперми // Племінна справа і біологія розмноження сільськогосподарських тварин: республ. міжвід. темат. зб. К., 1973. Вип. 3. С. 36-40.

PROFESSOR I. V. SMIRNOV'S ACTIVITY IN FARM ANIMALS' SPERM DEEP COOLING THEORY FORMATION AND DEVELOPMENT CONTEXT

Rishko Nikolai Nikolaevich
The Main Command Centre of the Armed Forces of Ukraine, Kiev
rishkon@ukr.net

On the basis of literary and archival sources analysis we highlight the main milestones of the formation and development of farm animals' sperm deep cooling theory. Professor I. V. Smirnov's theoretical contribution in the discovery of spermatozoons ability to preserve biological full value and genetic information after freezing and ability for eugenesis is generalized. The perspective directions of his scientific achievements use in modern selection and the national gene pool conservation are determined.

Key words and phrases: animal husbandry; flock reproduction; spermatozoons morphology; biotechnology; farm animals' breeding.

УДК 511
Физико-математические науки

В статье исследована взаимосвязь свойств множества натуральных чисел и теоремы П. Ферма. Предложено доказательство теоремы, основанное на вышеуказанных свойствах и анализе ограничений к предполагаемым решениям. Изучены роль допустимых преобразований переменных, входящих в уравнение, а также вклады отдельных составляющих в зависимости от значений характеристических величин. Расчеты подтверждают правильность хода доказательства.

Ключевые слова и фразы: теория чисел; натуральные числа; последняя теорема Ферма; ограничения на предполагаемые решения; допустимые преобразования.

Романов Вадим Николаевич, д.т.н., профессор
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»
vromanvpi@mail.ru

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ТЕОРЕМА ФЕРМА©

Великая (последняя) теорема Ферма была сформулирована более 300-т лет назад. Ввиду ее значимости для многих областей математики предпринимались большие, но безуспешные усилия по ее доказательству.

Наконец, в [3, p. 443] было дано доказательство теоремы, признанное математиками и основанное на ее связи с теорией модулярных эллиптических кривых. Доказательство это – весьма сложное, поэтому делаются попытки найти более простое. В частности, автором статьи в [1, с. 4-21; 2, с. 3-12] были рассмотрены подходы к доказательству данной теоремы. Теорема П. Ферма, как известно, утверждает, что уравнение

$$x^p + y^p = z^p \tag{1}$$

не имеет целых положительных решений при $p > 2$. В настоящей статье предлагается способ доказательства, на наш взгляд, приводящий к цели. Для доказательства теоремы рассмотрим ограничения на возможные решения уравнения (1). Сформулируем *первое ограничение*. Положим для определенности, что $x < y$, т.е. x обозначает всегда наименьшее число в левой части. Так как числа x, y, z – все различные, то имеем для них следующее неравенство:

$$x^p + y^p < (x + y)^p \,. \tag{2}$$

Если a – целое положительное число, то тем более

$$x^p + y^p < (x + y + a)^p \,. \tag{3}$$

Из неравенств (2), (3) и вида уравнения (1) вытекает *первое ограничение* для чисел x, y, z как возможных решений (1):

$$\max(x, y) < z < (x + y) \,. \tag{4}$$

Второе ограничение связано с очевидным требованием, чтобы число $x^p + y^p$ оканчивалось на ту же цифру, что и число z^p. Сформулируем *третье ограничение*. Если выполняется соотношение

$$x^2 + y^2 \le z^2 \,, \tag{5}$$

то x, y, z не являются решениями основного уравнения (1). В этом случае имеют место строгие неравенства

$$x^3 + y^3 < z^3 \,,$$

$$x^4 + y^4 < z^4 \,,$$

$$x^p + y^p < z^p \,. \tag{6}$$

Действительно, умножая (5) на z и используя левую часть неравенства (4), имеем $z^3 \ge zx^2 + zy^2 > x^3 + y^3$. Умножая полученное неравенство на z и используя (4), получаем $z^4 > z(x^3 + y^3) > x^4 + y^4$ и т.д. *Четвертым ограничением* является равенство показателей степени всех компонентов уравнения (1). Сформулированные ограничения являются необходимыми условиями того, чтобы числа x, y, z могли быть решениями основного уравнения (1). Они являются довольно сильными и позволяют провести отбор предполагаемых решений для уравнения (1). Второе и четвертое ограничения мы назовем основными, так как их выполнение является безусловным требованием. Первое и третье ограничения являются вспомогательными и могут быть обеспечены посредством преобразований (см. ниже). Теперь рассмотрим допустимые преобразования, которые могут выполняться над числами, входящими в (1), и сохраняют или обеспечивают выполнение ограничений. За начало отсчета мы примем «элементарные» основания – наименьшие числа, удовлетворяющие основным ограничениям. К таким преобразованиям относятся:

1. Умножение всех оснований степени в (1) на целое положительное число $l = 2, 3, \ldots$. Так как мы начинаем с «элементарных» оснований, то деление исключается.
2. Увеличение одного, двух или всех трех оснований на число $a = 10k$, кратное 10, где $k = 1, 2, \ldots$. Так как началом отсчета являются «элементарные» основания, то первое увеличение составляет 10.
3. Если две тройки чисел x, y, z и x', y', z' удовлетворяют второму ограничению, то и тройка чисел $x'' = x^p + x'^p$, $y'' = y^p + y'^p$, $z'' = z^p + z'^p$ удовлетворяет этому ограничению.

Первое преобразование полезно для получения из известного решения всех решений этого же класса. Например, оно может использоваться для получения решений уравнения (1) при $p = 2$ (см. ниже). В нашем доказательстве оно не используется, так как мы применяем последовательный перебор с сокращениями. Кроме того, его применение не меняет «статуса» тройки чисел, т.е. если она не является решением (1), то и после этого преобразования она не будет таким решением. Второе преобразование используется для обеспечения первого ограничения (4), если для «элементарных» оснований оно не выполняется, но имеет место второе ограничение. Это преобразование является основным при доказательстве. Третье преобразование может применяться, только если известно какое-то решение, например, при решении уравнения (1) для $p = 2$. В нашем доказательстве оно не используется. Таким образом, основным «генератором» разрешенных комбинаций троек чисел является второе преобразование. Методом индукции по числу 10 легко доказать, что второе преобразование позволяет перебрать все числа, допустимые по ограничениям. Проведем подробное рассмотрение второго ограничения, для чего проанализируем степени «элементарных» (наименьших) чисел от 0 до 9, начиная со степени 3. Мы заменили 10 на 0 и 11 на 1, чтобы не нарушать стройности изложения (см. ниже). Результаты представлены в Табл. 1.

Таблица 1. *Допустимые окончания степеней элементарных оснований*

Число	Последняя цифра числа	Число	Последняя цифра числа	Число	Последняя цифра числа	Число	Последняя цифра числа
2^3	8	3^3	7	4^3	4	5^3	5
2^4	6	3^4	1	4^4	6	5^4	5 (повтор)
2^5	2	3^5	3	4^5	4 (повтор)		
2^6	4	3^6	9				
2^7	8 (повтор)	3^7	7 (повтор)				
Число	Последняя цифра числа	Число	Последняя цифра числа	Число	Последняя цифра числа	Число	Последняя цифра числа
6^3	6	7^3	3	8^3	2	9^3	9
6^4	6 (повтор)	7^4	1	8^4	6	9^4	1
		7^5	7	8^5	8	9^5	9 (повтор)
		7^6	9	8^6	4		
		7^7	3 (повтор)	8^7	2 (повтор)		
Число	Последняя цифра числа	Число	Последняя цифра числа				
0^3	0	1^3	1				
0^4	0 (повтор)	1^4	1(повтор)				

Из данных Табл. 1 следует, что период повторения последней цифры для оснований 2, 3, 7, 8 составляет 4, для оснований 4 и 9 период составляет 2, для оснований 5, 6, 0 и 1 период составляет 1. Теперь рассмотрим комбинации степеней с разным основанием. Анализ выполняется в следующем порядке. Сначала рассматриваются комбинации чисел с периодом 4, т.е. степени числа 2 последовательно комбинируются со степенями чисел 3, 4, …, 0, 1, затем число 3 комбинируется с оставшимися, число 7 – с оставшимися, число 8 – с оставшимися. После этого комбинируются основания с периодом 2, т.е. число 4 – с числами 5, 6, 9, 0, 1, затем число 9 – с 5, 6, 0, 1. В последнюю очередь комбинируются числа с периодом 1, т.е. число 5 с числами 6, 0, 1, число 6 – с 0, 1, число 0 – с 1. Общее число таких комбинаций при использовании полного перебора с учетом периода повторения последней цифры составляет $9\cdot 4+8\cdot 4+...+2\cdot 1+1=144$. В действительности это число меньше, так как мы рассматриваем «элементарные» основания степени, и часть комбинаций может быть сразу исключена из-за невыполнения второго ограничения. Результаты анализа даны в Табл. 2. Основания 0 и 1 заменены на 10 и 11 соответственно, т.е. на наименьшие основания, имеющие смысл. Здесь мы приведем выборочные результаты анализа комбинаций для основания 2. Имеем $2^{3+4k}+3^{3+4k}=5^{3+4k}$ (здесь и далее $k=1,2,...$) – невозможно в силу условия (4), $2^{4+4k}+3^{4+4k}$ – комбинация невозможна из-за второго ограничения (далее такие комбинации не рассматриваются), $2^{5+4k}+3^{5+4k}=5^{5+4k}$ – невозможно в силу условия (4), $2^{3+4k}+4^{3+4k}=8^{3+4k}$ – невозможно в силу (4), $2^{4+4k}+4^{4+4k}=10^{4+4k}$ – невозможно в силу (4), $2^{5+4k}+4^{5+4k}=6^{5+4k}$ – невозможно в силу (4), $2^{6+4k}+4^{6+4k}=10^{6+4k}$ – невозможно в силу (4) и т.д. (см. Табл. 2). Результаты анализа показывают, что претендентами на решение уравнения (1), удовлетворяющими основным ограничениям, являются следующие комбинации:

$3^{6+4k}+4^{6+4k}=5^{6+4k}$, $3^{4+4k}+5^{4+4k}=6^{4+4k}$, $3^{3+4k}+6^{3+4k}=7^{3+4k}$, $3^{3+4k}+8^{3+4k}=9^{3+4k}$, $3^{6+4k}+9^{6+4k}=10^{6+4k}$, $7^{4+4k}+5^{4+4k}=8^{4+4k}$, $7^{6+4k}+5^{6+4k}=8^{6+4k}$, $7^{3+4k}+6^{3+4k}=9^{3+4k}$, $7^{6+4k}+9^{6+4k}=10^{6+4k}$, $7^{4+4k}+10^{4+4k}=11^{4+4k}$, $8^{3+4k}+9^{3+4k}=11^{3+4k}$, $8^{6+4k}+10^{6+4k}=12^{6+4k}$ и несколько других (в некоторых комбинациях, строго говоря, часть чисел выходят за рамки элементарных оснований). Применяя к этим комбинациям условия (5), (6), видим, что большинство из них не могут быть решением уравнения (1) при $p>2$. После отбора по условиям (5), (6) остаются комбинации $7^{4+4k}+5^{4+4k}=8^{4+4k}$, $7^{6+4k}+5^{6+4k}=8^{6+4k}$, $7^{3+4k}+6^{3+4k}=9^{3+4k}$, $7^{6+4k}+9^{6+4k}=10^{6+4k}$, $7^{4+4k}+10^{4+4k}=11^{4+4k}$, $8^{3+4k}+9^{3+4k}=11^{3+4k}$, $8^{6+4k}+10^{6+4k}=12^{6+4k}$, $8^{3+4k}+14^{3+4k}=16^{3+4k}$, которые должны быть рассмотрены особо, так как для них условия (5), (6) не выполняются. Этот результат показывает, насколько эффективными являются сформулированные, казалось бы, простые ограничения. Отметим, что подобный анализ с учетом возможных преобразований позволяет получить решения квадратного уравнения при $p=2$. Для «элементарных» оснований такие решения получаются как побочный результат нашего исследования (см. ниже). Рассмотрим оставшиеся комбинации. Далее будут даны общие соотношения, но для элементарных оснований гораздо проще выполнить расчеты непосредственно. Нас интересует только факт отсутствия (или наличия) равенства между правой и левой частями уравнения (1).

Для оснований $7,5,8$ мы имеем $7^2+5^2>8^2$, $7^3+5^3>8^3$, но $7^4+5^4<8^4$, поэтому все остальные степени этих оснований будут давать этот же результат (нуль перейден). Для оснований $7,6,9$ получаем $7^2+6^2>9^2$, но $7^3+6^3<9^3$ (нуль перейден). Для $7,9,10$: $7^2+9^2>10^2$, $7^3+9^3>10^3$, но $7^4+9^4<10^4$ (нуль перейден). Для $7,10,11$: $7^2+10^2>11^2$, $7^3+10^3>11^3$, но $7^4+10^4<11^4$ (нуль перейден). Для $8,9,11$: $8^2+9^2>11^2$, но $8^3+9^3<11^3$. Для $8,10,12$: $8^2+10^2>12^2$, но $8^3+10^3<12^3$ (нуль перейден). Для $8,14,16$: $8^2+14^2>16^2$, но $8^3+14^3<16^3$. Таким образом, элементарные основания не могут быть решениями уравнения (1). По правилу Декарта увеличение переменной на число a уменьшает все корни на это же число. Как мы только что показали, для элементарных оснований при $p>2$ решения среди натуральных чисел отсутствуют, поэтому и при увеличении оснований на число a таких решений не будет. Действительно, уравнение (1) допускает представление $(z-u)^p+(z-v)^p-z^p=0$, где x,y,z – элементарные основания, причем $x=z-u$, $y=z-v$. Будем рассматривать *z* как переменную, а *x* и *y* как параметры. Полученное уравнение, рассматриваемое относительно *z*, конечно, имеет корень, но он не является натуральным числом, как показал наш анализ. Следует иметь в виду, что при изменении *z* на *a* величины *u* и *v* не изменяются (см. ниже). Поясним сказанное конкретным примером. Положим $u=2$, $v=1$, разрешенная степень $p=6$, тогда имеем уравнение $(z-2)^6+(z-1)^6-z^6=0$, в котором *z* является элементарным основанием и изменяется в пределах $[1,10]$. Очевидным решением является $z_0=1$, тогда $x_0=-1$, $y_0=0$, т.е. набор в целом не принадлежит множеству натуральных чисел. При увеличении величины *z*, например, на $a=10$, она (а также *x* и *y*) перейдет во второй десяток, а корень уменьшится на 10, т.е. тем более не будет натуральным числом. При уменьшении величины *z* на $a=10$ она (а также *x* и *y*) выйдет за границы множества натуральных чисел, т.е. не будет удовлетворять условиям теоремы. Таким образом, синхронное изменение оснований на величину $a=10k$ не изменяет класса решений. Теорема Ферма доказана. Однако мы продолжим исследование свойств предполагаемых решений, так как, на наш взгляд, оно представляет интерес. Рассмотрим подробнее роль преобразований. Результаты проведенного анализа для элементарных оснований показывают, что для многих из них не выполняется условие (4). Для его обеспечения используем второе преобразование, т.е. увеличение всех или некоторых оснований на число $a=10k$, так чтобы условие (4) выполнялось. Число, кратное 10, прибавляется, чтобы сохранялось выполнение основного условия. Основания, для которых условие (4) может быть обеспечено увеличением всех оснований одновременно на $a=10k$ при одном и том же *k*, мы назовем регулярными, а те, для которых условие (4) обеспечивается увеличением на $a=10k$ одного или двух из них, назовем нерегулярными. На втором шаге, т.е. во втором десятке, все основания становятся регулярными. Переход от элементарных оснований к основаниям во втором десятке, т.е. от 10 до 20, достигается их увеличением на 10, так чтобы выполнялось условие (4), и, одновременно, сохранялось основное условие, т.е. не изменялись окончания степеней. Например, в комбинации $2^{3+4k}+3^{3+4k}=5^{3+4k}$ условие (4) не выполняется, так как $2+3=5$. Увеличив основания на 10, мы получим комбинацию, удовлетворяющую всем ограничениям, а именно $12^{3+4k}+13^{3+4k}=15^{3+4k}$ (см. Примечание 1 к Табл. 2). Но нельзя одно из оснований увеличить на 20, так как снова будет нарушаться условие (4). При первом переходе к числам во втором десятке синхронность может иногда нарушаться, так как не все элементарные основания являются регулярными. В дальнейшем, как только обеспечено условие (4), все основания становятся регулярными, и их увеличение происходит синхронно на число $a=10k$, но, конечно, последовательно, т.е. сначала на 10, затем на 20 и т.д. Анализ оснований во втором десятке может быть выполнен непосредственно по приведенному примеру анализа для элементарных оснований и не добавляет, в принципе, ничего нового для решения основной задачи. Во втором десятке используются те же соотношения, что и для элементарных оснований, а именно, если $x^2+y^2\le z^2$, то такие основания исключаются из рассмотрения, если же $x^2+y^2>z^2$, то проверяется для первой допустимой степени (или для степени 3 – для сокращения расчетов) знак разности $x^l+y^l-z^l$. Если этот знак положителен, то l увеличивается на единицу, если отрицательный, то проверка заканчивается, и эти основания можно исключить из рассмотрения. Затем проводится анализ в третьем десятке (от 20 до 30) и т.д. Процесс быстро «сходится» в том смысле, что уменьшается количество анализируемых оснований, и через несколько шагов остаются лишь основания, для которых выполняется неравенство $x^2+y^2>z^2$ (см. ниже). Методом индукции доказывается, что таким способом получаются все допустимые основания. Все же такой анализ может показаться трудоемким, поэтому приведем общее соотношение, позволяющее упростить анализ. Мы имеем при любом фиксированном p

$$\begin{aligned}&(x+a)^p+(y+a)^p-(z+a)^p=(x^p+y^p-z^p)+C_p^1(x^{p-1}+y^{p-1}-z^{p-1})a+\\&+C_p^2(x^{p-2}+y^{p-2}-z^{p-2})a^2+\ldots+C_p^{p-2}(x^2+y^2-z^2)a^{p-2}+\\&+C_p^{p-1}(x+y-z)a^{p-1}+a^p\end{aligned}. \tag{7}$$

В выражении (7) за исходные приняты элементарные основания, либо наименьшие, для которых выполняется левая часть условия (4), так чтобы все основания были регулярными уже при их увеличении на 10 (см. примечания к Табл. 2). Отметим, что, если при увеличении основания в правой части на a увеличить на a только одно основание в левой части уравнения (1), то (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}&(x+a)^p + y^p - (z+a)^p = (x^p - z^p) + C_p^1(x^{p-1} - z^{p-1})a + \\ &+C_p^2(x^{p-2} - z^{p-2})a^2 + ... + C_p^{p-2}(x^2 - z^2)a^{p-2} + \\ &+C_p^{p-1}(x-z)a^{p-1}\end{aligned} \quad . \tag{7a}$$

Все члены в правой части (7а) меньше нуля, поэтому равенство невозможно, и такие основания не могут быть решениями уравнения (1). Однако при последующем увеличении уже обоих чисел x и y на a из них могут быть получены дополнительные комбинации (см. ниже). Введем характеристические величины в рамках нашего подхода. Обозначим $x+y-z=b$, $u=z-x$, $v=z-y$, $\Delta=x-y=u-v$, $x^2+y^2-z^2=c$, $x^3+y^3-z^3=d$, $x^4+y^4-z^4=h$, $f=x^5+y^5-z^5$. Все числа являются натуральными, и для определенности примем, как и выше, что $x<y$. Приведем соотношения, которые удобны для последующих расчетов:

$$d \equiv x^3+y^3-z^3 = b^3 - 3uv(z+b), \tag{8}$$

$$h \equiv x^4+y^4-z^4 = b^4 - 4uv[b^2 + z(z+b)] + 2u^2v^2, \tag{9}$$

$$c \equiv x^2+y^2-z^2 = b^2 - 2uv, \tag{10}$$

$$b \equiv x+y-z = z-(u+v), \tag{11}$$

$$f \equiv x^5+y^5-z^5 = b^5 - 5uv[b^3 + 3bz^2 + z(z-b)^2 - uv(z+b)], \tag{12}$$

$$g \equiv x^6+y^6-z^6 = (b+v)^6 + (b+u)^6 - (b+u+v)^6 \text{ и т.д.} \tag{13}$$

Соотношение (10) получается, если в выражении $x^2+y^2-z^2=c$ выразить x и y через z и выполнить простые преобразования. Соотношения (8), (9), (12), (13) получаются аналогично. Легко вывести общее соотношение. Обозначим $x^{p-1}+y^{p-1}=h_{p-1}+z^{p-1}$ и, используя (11), умножим это равенство слева на $x+y$, а справа – на $z+b$. Проводя группировку, получаем рекуррентное соотношение

$$h_p \equiv x^p + y^p - z^p = z^{p-1}b + h_{p-1}(z+b) - (z-u)(z-v)(h_{p-2} + z^{p-2}), \tag{14}$$

где $h_1=b$, $h_2=c$ и т.д. Посмотрим, как изменяются введенные выше характеристические величины при увеличении всех элементарных оснований на a. Соотношения (8)-(13) удобны тем, что позволяют выразить интересующие нас величины через величину b, изменение которой пропорционально a, и величины u и v, не зависящие от a. Из (8)-(13) следует, что величина b увеличится на a, величина c увеличится на $a(2b+a)$, d увеличится на $a(3c+3ba+a^2)$, h увеличится на $a(4d+6ca+4ba^2+a^3)$ и т.д., величины u, v и Δ не изменятся. Рассмотрим следующие случаи: $b<0$, $b=0$ и $b>0$. Можно сказать, что «судьба» натуральных решений уравнения (1) определяется уже при $p=1$ и $p=2$. Основания, сгруппированные соответственно выделенным случаям, приведены в Табл. 3, а результаты анализа для разных b даны в Табл. 4-6. Результаты анализа для оснований с $b<0$ (этот случай имеет место только до первого увеличения элементарных оснований на 10) представлены в Табл. 4. Отметим, что все характеристические величины в этом случае – отрицательные, и нас интересует их переход через нуль. При увеличении элементарных оснований на число $a=10k$ характеристические величины изменяются следующим образом. Положим $a=10$. Поскольку величина b меньше 10 и варьируется от -6 до -2, то она станет положительной для всех оснований и останется положительной при дальнейшем увеличении a. Величина c изменится на 20 при $b=-4$, на 60 при $b=-2$ и на -20 при $b=-6$. При $a=20$ c возрастает на 240 при $b=-4$, на 320 при $b=-2$ и на 160 при $b=-6$. При $a=30$ величина c возрастает на 660 при $b=-4$, на 780 при $b=-2$ и на 540 при $b=-6$, т.е. становится положительной для всех оснований. Величина d изменяется следующим образом. При $a=10$ изменение величины d составляет от -1400 ($b=-2$, $uv=32$) до -5420 ($b=-2, uv=99$). При $a=20$ изменение величины d составляет от 2000 ($b=-2$, $uv=32$) до -6040 ($b=-2$, $uv=99$). При $a=30$ изменение величины d составляет от 16200 ($b=-2$, $uv=32$) до 4140 ($b=-2$, $uv=99$). В итоге мы получаем, что величина d становится положительной при $a=30$ ($b=-2$), при $a=40$ ($b=-4$) и при $a=50$ ($b=-6$). Аналогично проводится анализ для величин h, f и g. Величина g соответствует наибольшей разрешенной степени 6 (с учетом периода повторения последней цифры). В частности, величина h становится положительной при $a=30$ ($b=-2, uv=32$) и при $a=50$ ($b=-2$, $uv=99$). Рассмотрим случай $b=0$. Результаты анализа приведены в Табл. 5. Здесь все расчеты значительно упрощаются. Итоговый результат сводится к следующему. Величина c становится положительной при $a=20$ во всей области ее значений, изменяя знак с минуса на плюс при изменении a от 10 до 20. Величина d становится положительной при $a=30$ во всей области значений, изменяя знак с минуса на плюс при изменении a от 10 до 30 (в зависимости от величин u и v). Величина h становится положительной при $a=50$, изменяя знак с минуса на плюс при изменении a от 20 до 50 (в зависимости от величин u и v). Аналогично проводится анализ для величин f и g. Рассмотрим случай $b>0$. Результаты приведены в Табл. 6. Итоговый результат сводится к следующему. Величина b принимает значения 2, 4, 6, 8, 10 и при увеличении оснований на $a=10$ ее диапазон составит от 12 до 20. Величина c становится положительной при $a=10$. Отметим, что для случая $b > 0$ некоторые исходные значения *c* равны нулю или положительны. Для величин *d* и *h* приведем оценки для самого «плохого» случая $b = 2$. Для остальных *b* эти величины становятся положительными уже при $a = 10$ и $a = 20$. При $a = 10$ изменение величины *d* составляет от 1600 ($b = 2$, $uv = 2$) до -224 ($b = 2$, $uv = 66$). Ее изменение больше нуля при $172 > 6uv$ и меньше нуля при $172 < 6uv$, равенство нулю невозможно, так как 172 не делится на 3. При $a = 20$ изменение величины *d* составляет от 10400 ($b = 2$, $uv = 2$) до 2720 ($b = 2$, $uv = 66$). При $a = 30$ изменение величины *d* составит 20880 ($b = 2$, $uv = 66$), т.е. все значения *d* становятся положительными. Для величины *h* результаты получаются следующие. При $b = 2$ и $a = 10$ изменение *h* составляет от 16640 ($uv = 2, u + v = 3$) до -14560 ($uv = 66$, $u + v = 17$). При $a = 20$ изменение составит от 221280 ($uv = 2, u + v = 3$) до -415200 ($uv = 66$, $u + v = 17$). При $a = 30$ изменение составит от 1022820 ($uv = 2, u + v = 3$) до -163200 ($uv = 66$, $u + v = 17$). Наконец, при $a = 40$ изменение составит 295200 ($uv = 66$, $u + v = 17$), и все значения *h* становятся положительными. Отметим, что изменение не может равняться нулю для рассматриваемых комбинаций величин. Выборочные расчеты проводились по общим соотношениям (7), (8)-(13), и для проверки использовались таблицы степеней. Их цель – определение масштаба и тенденции изменения характеристических величин. Переход характеристических величин через нуль скрыт от нашего взгляда и не происходит при натуральных значениях величин при $p > 2$ для разрешенных показателей степени. Из Табл. 6 в качестве побочного результата получаются решения квадратного уравнения (1) при $p = 2$. В области элементарных оснований мы имеем четыре семейства таких решений: $\{(3,4,5),(6,8,10),(9,12,15)\}$, $\{(8,15,17)\}$, $\{(5,12,13)\}$, $\{(7,24,25)\}$. Подведем итоги нашего рассмотрения. Обозначим $F(p,x,y,z) = x^p + y^p - z^p$. При любом фиксированном $p > 2$, увеличивая исходные элементарные основания на $a = 10k$, можно наблюдать изменение знака величины $F(p,x,y,z) = x^p + y^p - z^p$ с минуса на плюс за счет того, что, как следует из (7), величина a^p будет преобладать над остальными членами. С другой стороны, при любом фиксированном основании (или, что одно и то же, при любом $a = 10k$), увеличивая показатель степени $p > 2$, можно наблюдать перемену знака величины $F(p,x,y,z)$ с плюса на минус за счет того, что, как следует из (7), z^p будет преобладать над остальными членами ($z > \max(x, y)$). При $p > 2$ равенство $F(p,x,y,z)$ нулю на множестве натуральных чисел невозможно ни при каком фиксированном $a = 10k$ и ни при каком фиксированном p. Теперь посмотрим, можно ли доказать справедливость теоремы Ферма индукцией по *p*. Для $p = 3$ из нашего исследования следует, что теорема выполняется. Чтобы в этом убедиться, достаточно при фиксированном $p = 3$ наблюдать перемену знака с минуса на плюс при увеличении элементарных оснований (их число конечно) на $a = 10k$. Для каждого основания значение *a* зависит от *b*, *u*, *v* и лежит в пределах от 10 до 30, как показал наш анализ. Если для некоторого *p* величина $F(p,x,y,z)$ меньше нуля, то индукционный переход может быть доказан. Действительно, мы имеем

$$F(p+1,x,y,z) = x \cdot x^p + y \cdot y^p - z \cdot z^p = x(x^p + y^p - z^p) + u(y^p - z^p) - vy^p. \qquad (15)$$

Так как все члены в правой части отрицательные, то отсюда следует искомое утверждение, т.е. $F(p+1,x,y,z) < 0$. Пусть теперь $F(p,x,y,z) > 0$, тогда относительно $F(p+1,x,y,z)$ доказать ничего не удается, так как доказательство методом индукции (как и любое в теории чисел) основано на свойстве непрерывности, а здесь мы имеем разрыв непрерывности. Показатель $p+1$ может оказаться как раз таким, при котором знак изменяется с плюса на минус. С позиций проведенного нами исследования это означает, что мы находимся в области оснований, где произошло изменение знака $F(p,x,y,z)$ с минуса на плюс за счет увеличения основания при фиксированном *p*, но еще не произошло изменения знака с плюса на минус за счет увеличения показателя степени. Поэтому для доказательства методом индукции нужно предположить, что мы находимся в той области значений *p*, где такой переход произошел, и тогда доказательство возможно. Во всяком случае, использование правила Декарта позволяет обойти отмеченные трудности. Без его применения прямая проверка справедливости теоремы Ферма с помощью предложенного анализа была бы возможна только на ограниченном множестве натуральных чисел. Таким образом, можно утверждать, что: 1) если уравнение (1) высших степеней не имеет натуральных решений среди элементарных оснований, то оно не имеет их вообще; 2) существование «натуральных» решений уравнения (1) определяется при $p = 1$ и $p = 2$. Для всех элементарных оснований и всех разрешенных для них по условиям теоремы степеней и даже раньше (при $p = 3$ или $p = 4$) мы изначально находимся в отрицательной области, где левая часть уравнения (1) меньше правой, так что увеличение показателя степени ничего не дает, а его уменьшение выводит нас за рамки условий теоремы Ферма. Увеличение элементарных оснований также ничего не дает, так как смещает корни уравнения (1) за границы множества натуральных чисел. Исключение составляет тройка (11, 20, 21), индифферентная к показателю степени по основному условию, для которой первая формально разрешенная степень $p = 3$, а переход в отрицательную область происходит при $p = 4$. Рассмотрим геометрическую интерпретацию. При $p = 1$ уравнение (1) всегда имеет решение, т.е. сумма двух целочисленных отрезков всегда является целочисленным отрезком. При $p = 2$ уравнение (1) лишь в некоторых случаях имеет решение, т.е. сумма площадей двух квадратов с целочисленными сторонами лишь иногда равна площади квадрата с целочисленными сторонами. При $p = 3$

уравнение (1) не имеет решения, т.е. сумма объемов двух кубов с целочисленными сторонами никогда не является объемом куба с целочисленными сторонами. Это тем более верно для гиперкубов.

Таблица 2. *Комбинации «элементарных» оснований, допустимые по основным условиям*

$2^{3+4k}+3^{3+4k}=5^{3+4k}$	$3^{3+4k}+4^{3+4k}=11^{3+4k}$	$7^{3+4k}+4^{3+4k}=13^{3+4k}$	$8^{3+4k}+4^{3+4k}=16^{3+4k}$
$2^{5+4k}+3^{5+4k}=5^{5+4k}$	$3^{5+4k}+4^{5+4k}=7^{5+4k}$	$7^{5+4k}+4^{5+4k}=11^{5+4k}$	$8^{3+4k}+14^{3+4k}=16^{3+4k}$
$2^{4+4k}+4^{4+4k}=10^{4+4k}$	$3^{6+4k}+4^{6+4k}=5^{6+4k}$	$7^{6+4k}+4^{6+4k}=15^{6+4k}$	$8^{5+4k}+4^{5+4k}=12^{5+4k}$
$2^{5+4k}+4^{5+4k}=6^{5+4k}$	$3^{3+4k}+5^{3+4k}=8^{3+4k}$	$7^{3+4k}+5^{3+4k}=12^{3+4k}$	$8^{6+4k}+4^{6+4k}=10^{6+4k}$
$2^{6+4k}+4^{6+4k}=10^{6+4k}$	$3^{4+4k}+5^{4+4k}=8^{4+4k}$	$7^{4+4k}+5^{4+4k}=16^{4+4k}$	$8^{3+4k}+5^{3+4k}=13^{3+4k}$
$2^{3+4k}+5^{3+4k}=7^{3+4k}$	$3^{4+4k}+5^{4+4k}=6^{4+4k}$	$7^{4+4k}+5^{4+4k}=14^{4+4k}$	$8^{4+4k}+5^{4+4k}=11^{4+4k}$
$2^{4+4k}+5^{4+4k}=11^{4+4k}$	$3^{5+4k}+5^{5+4k}=8^{5+4k}$	$7^{4+4k}+5^{4+4k}=12^{4+4k}$	$8^{4+4k}+5^{4+4k}=17^{4+4k}$
$2^{5+4k}+5^{5+4k}=7^{5+4k}$	$3^{6+4k}+5^{6+4k}=8^{6+4k}$	$7^{4+4k}+5^{4+4k}=8^{4+4k}$	$8^{4+4k}+15^{4+4k}=17^{4+4k}$
$2^{6+4k}+5^{6+4k}=7^{6+4k}$	$3^{6+4k}+5^{6+4k}=12^{6+4k}$	$7^{5+4k}+5^{5+4k}=12^{5+4k}$	$8^{4+4k}+5^{4+4k}=13^{4+4k}$
$2^{6+4k}+5^{6+4k}=13^{6+4k}$	$3^{3+4k}+6^{3+4k}=7^{3+4k}$	$7^{6+4k}+5^{6+4k}=12^{6+4k}$	$8^{5+4k}+5^{5+4k}=13^{5+4k}$
$2^{3+4k}+6^{3+4k}=14^{3+4k}$	$3^{5+4k}+6^{5+4k}=9^{5+4k}$	$7^{6+4k}+5^{6+4k}=8^{6+4k}$	$8^{6+4k}+5^{6+4k}=13^{6+4k}$
$2^{5+4k}+6^{5+4k}=8^{5+4k}$	$3^{6+4k}+6^{6+4k}=15^{6+4k}$	$7^{3+4k}+6^{3+4k}=9^{3+4k}$	$8^{6+4k}+5^{6+4k}=17^{6+4k}$
$2^{6+4k}+6^{6+4k}=10^{6+4k}$	$3^{3+4k}+7^{3+4k}=10^{3+4k}$	$7^{5+4k}+6^{5+4k}=13^{5+4k}$	$8^{6+4k}+15^{6+4k}=17^{6+4k}$
$2^{3+4k}+7^{3+4k}=11^{3+4k}$	$3^{5+4k}+7^{5+4k}=10^{5+4k}$	$7^{6+4k}+6^{6+4k}=15^{6+4k}$	$8^{3+4k}+6^{3+4k}=12^{3+4k}$
$2^{5+4k}+7^{5+4k}=9^{5+4k}$	$3^{3+4k}+8^{3+4k}=9^{3+4k}$	$7^{3+4k}+8^{3+4k}=15^{3+4k}$	$8^{5+4k}+6^{5+4k}=14^{5+4k}$
$2^{3+4k}+8^{3+4k}=10^{3+4k}$	$3^{5+4k}+8^{5+4k}=11^{5+4k}$	$7^{5+4k}+8^{5+4k}=15^{5+4k}$	$8^{6+4k}+6^{6+4k}=10^{6+4k}$
$2^{5+4k}+8^{5+4k}=10^{5+4k}$	$3^{3+4k}+9^{3+4k}=16^{3+4k}$	$7^{3+4k}+9^{3+4k}=18^{3+4k}$	$8^{3+4k}+9^{3+4k}=11^{3+4k}$
$2^{3+4k}+9^{3+4k}=13^{3+4k}$	$13^{3+4k}+9^{3+4k}=16^{3+4k}$	$17^{3+4k}+9^{3+4k}=18^{3+4k}$	$8^{5+4k}+9^{5+4k}=17^{5+4k}$
$2^{5+4k}+9^{5+4k}=11^{5+4k}$	$3^{5+4k}+9^{5+4k}=12^{5+4k}$	$7^{5+4k}+9^{5+4k}=16^{5+4k}$	$8^{6+4k}+9^{6+4k}=15^{6+4k}$
$2^{6+4k}+9^{6+4k}=15^{6+4k}$	$3^{6+4k}+9^{6+4k}=10^{6+4k}$	$7^{6+4k}+9^{6+4k}=10^{6+4k}$	$8^{3+4k}+10^{3+4k}=18^{3+4k}$
$2^{3+4k}+11^{3+4k}=19^{3+4k}$	$3^{3+4k}+10^{3+4k}=13^{3+4k}$	$7^{4+4k}+10^{4+4k}=11^{4+4k}$	$8^{4+4k}+10^{4+4k}=12^{4+4k}$
$2^{3+4k}+10^{3+4k}=12^{3+4k}$	$3^{4+4k}+10^{4+4k}=13^{4+4k}$	$7^{4+4k}+10^{4+4k}=17^{4+4k}$	$8^{4+4k}+10^{4+4k}=16^{4+4k}$
$2^{4+4k}+10^{4+4k}=12^{4+4k}$	$3^{4+4k}+10^{4+4k}=19^{4+4k}$	$7^{6+4k}+10^{6+4k}=17^{6+4k}$	$8^{4+4k}+10^{4+4k}=18^{4+4k}$
$2^{4+4k}+10^{4+4k}=14^{4+4k}$	$13^{4+4k}+10^{4+4k}=19^{4+4k}$	$7^{6+4k}+10^{6+4k}=13^{6+4k}$	$8^{6+4k}+10^{6+4k}=12^{6+4k}$
$2^{4+4k}+0^{4+4k}=8^{4+4k}$	$3^{5+4k}+10^{5+4k}=13^{5+4k}$	$7^{3+4k}+10^{3+4k}=17^{3+4k}$	$8^{6+4k}+10^{6+4k}=18^{6+4k}$
$2^{5+4k}+10^{5+4k}=12^{5+4k}$	$3^{6+4k}+10^{6+4k}=13^{6+4k}$	$7^{5+4k}+10^{5+4k}=17^{5+4k}$	$8^{3+4k}+11^{3+4k}=17^{3+4k}$
$2^{6+4k}+10^{6+4k}=12^{6+4k}$	$3^{3+4k}+11^{3+4k}=12^{3+4k}$	$7^{6+4k}+14^{6+4k}=15^{6+4k}$	$8^{5+4k}+11^{5+4k}=19^{5+4k}$
$2^{6+4k}+0^{6+4k}=8^{6+4k}$	$3^{5+4k}+11^{5+4k}=14^{5+4k}$	$7^{6+4k}+24^{6+4k}=25^{6+4k}$	$8^{6+4k}+11^{6+4k}=18^{6+4k}$
$2^{3+4k}+1^{3+4k}=9^{3+4k}$	$3^{6+4k}+1^{6+4k}=10^{6+4k}$		$8^{6+4k}+11^{6+4k}=15^{6+4k}$
$2^{5+4k}+1^{5+4k}=3^{5+4k}$			
$2^{6+4k}+1^{6+4k}=5^{6+4k}$			
×	×	×	×
$4^{3+2k}+5^{3+2k}=9^{3+2k}$	$9^{3+2k}+5^{3+2k}=14^{3+2k}$	$5^{3+k}+6^{3+k}=11^{3+k}$	$6^{3+k}+10^{3+k}=16^{3+k}$
$4^{4+4k}+5^{4+4k}=13^{4+4k}$	$9^{4+2k}+5^{4+2k}=14^{4+2k}$	$5^{3+k}+10^{3+k}=15^{3+k}$	$6^{3+4k}+11^{3+4k}=13^{3+4k}$
$4^{4+4k}+5^{4+4k}=7^{4+4k}$	$9^{4+2k}+5^{4+2k}=16^{4+2k}$	$5^{3+k}+11^{3+k}=16^{3+k}$	×
$4^{3+2k}+6^{3+2k}=10^{3+2k}$	$9^{4+2k}+15^{4+2k}=16^{4+2k}$	$15^{3+k}+11^{3+k}=16^{3+k}$	$10^{3+k}+11^{3+k}=21^{3+k}$
$14^{3+4k}+9^{3+4k}=17^{3+4k}$	$9^{4+4k}+5^{4+4k}=12^{4+4k}$	$5^{4+k}+6^{4+k}=13^{4+k}$	×
$4^{3+4k}+9^{3+4k}=17^{3+4k}$	$9^{4+4k}+5^{4+4k}=18^{4+4k}$	$5^{4+k}+6^{4+k}=7^{4+k}$	
$4^{3+2k}+10^{3+2k}=14^{3+2k}$	$9^{4+4k}+15^{4+4k}=18^{4+4k}$	×	
$4^{4+4k}+10^{4+4k}=12^{4+4k}$	$9^{3+2k}+6^{3+2k}=15^{3+2k}$		
$4^{4+4k}+10^{4+4k}=18^{4+4k}$	$9^{3+2k}+10^{3+2k}=19^{3+2k}$		
$14^{4+4k}+10^{4+4k}=18^{4+4k}$	$9^{4+4k}+10^{4+4k}=13^{4+4k}$		
$4^{4+2k}+10^{4+2k}=14^{4+4k}$	$9^{4+4k}+10^{4+4k}=17^{4+4k}$		

$4^{3+2k}+11^{3+2k}=15^{3+2k}$	$9^{4+2k}+10^{4+2k}=19^{4+2k}$		
×	$9^{3+2k}+11^{3+2k}=20^{3+2k}$		

Примечание 1. Приведенные в Табл. 2 соотношения не означают фактического равенства и являются символьной записью, отражающей выполнение основных условий, необходимых для уравнения (1), а именно, совпадение показателей степени всех составляющих и совпадение последней цифры, на которую оканчиваются левая и правая части.

Примечание 2. Комбинируемые основания степеней выбраны из условия минимальной допустимости и так, чтобы выполнялось условие (4); в этом смысле они названы «элементарными». При таком выборе оснований они, в большинстве, оказываются регулярными. Нерегулярными являются основания, для которых условие (4) изначально не выполняется, как, например, основания 1, 5, 6 и т.д. К этой же группе относятся так называемые «инверсные» основания, для которых основание в правой части меньше одного или обоих оснований в левой части, как, например, 7, 4, 5. Чтобы сделать их регулярными и обеспечить выполнение условия (4), мы увеличивали некоторые из них на 10. Здесь возможно несколько допустимых комбинаций, если основание в правой части больше одного или обоих оснований в левой части (см. таблицу).

Таблица 3. *Комбинации регулярных «элементарных» оснований при различных* b

$b<0$			
$2^{4+4k}+4^{4+4k}=10^{4+4k}$	$2^{6+4k}+9^{6+4k}=15^{6+4k}$	$3^{3+4k}+9^{3+4k}=16^{3+4k}$	$7^{3+4k}+4^{3+4k}=13^{3+4k}$
$2^{6+4k}+4^{6+4k}=10^{6+4k}$	$2^{4+4k}+10^{4+4k}=14^{4+4k}$	$3^{4+4k}+10^{4+4k}=19^{4+4k}$	$7^{6+4k}+4^{6+4k}=15^{6+4k}$
$2^{4+4k}+5^{4+4k}=11^{4+4k}$	$2^{4+4k}+10^{4+4k}=18^{4+4k}$	$3^{6+4k}+1^{6+4k}=10^{6+4k}$	$7^{4+4k}+5^{4+4k}=16^{4+4k}$
$2^{6+4k}+5^{6+4k}=13^{6+4k}$	$2^{6+4k}+10^{6+4k}=18^{6+4k}$	$9^{4+2k}+5^{4+2k}=16^{4+2k}$	$7^{4+4k}+5^{4+4k}=14^{4+4k}$
$2^{3+4k}+6^{3+4k}=14^{3+4k}$	$2^{3+4k}+11^{3+4k}=19^{3+4k}$	$9^{4+4k}+5^{4+4k}=18^{4+4k}$	$7^{6+4k}+6^{6+4k}=15^{6+4k}$
$2^{6+4k}+6^{6+4k}=10^{6+4k}$	$2^{6+4k}+11^{6+4k}=15^{6+4k}$	$5^{4+k}+6^{4+k}=13^{4+k}$	$7^{3+4k}+9^{3+4k}=18^{3+4k}$
$2^{3+4k}+7^{3+4k}=11^{3+4k}$	$3^{3+4k}+4^{3+4k}=11^{3+4k}$	$4^{4+4k}+5^{4+4k}=13^{4+4k}$	$8^{3+4k}+4^{3+4k}=16^{3+4k}$
$2^{3+4k}+9^{3+4k}=13^{3+4k}$	$3^{6+4k}+5^{6+4k}=12^{6+4k}$	$4^{3+4k}+9^{3+4k}=17^{3+4k}$	$8^{6+4k}+5^{6+4k}=17^{6+4k}$
$0^{4+4k}+4^{4+4k}=8^{4+4k}$	$3^{6+4k}+6^{6+4k}=15^{6+4k}$	$4^{4+4k}+10^{4+4k}=18^{4+4k}$	$8^{4+4k}+5^{4+4k}=17^{4+4k}$
$0^{4+4k}+2^{4+4k}=4^{4+4k}$	$0^{4+4k}+3^{4+4k}=9^{4+4k}$	$2^{3+4k}+1^{3+4k}=9^{3+4k}$	$12^{3+4k}+1^{3+4k}=19^{3+4k}$
$b=0$			
$2^{3+4k}+3^{3+4k}=5^{3+4k}$	$3^{5+4k}+4^{5+4k}=7^{5+4k}$	$7^{3+4k}+5^{3+4k}=12^{3+4k}$	$8^{5+4k}+4^{5+4k}=12^{5+4k}$
$2^{5+4k}+3^{5+4k}=5^{5+4k}$	$3^{4+4k}+5^{4+4k}=8^{4+4k}$	$7^{4+4k}+5^{4+4k}=12^{4+4k}$	$8^{3+4k}+5^{3+4k}=13^{3+4k}$
$2^{5+4k}+4^{5+4k}=6^{5+4k}$	$3^{5+4k}+5^{5+4k}=8^{5+4k}$	$7^{6+4k}+5^{6+4k}=12^{6+4k}$	$8^{4+4k}+5^{4+4k}=13^{4+4k}$
$2^{3+4k}+5^{3+4k}=7^{3+4k}$	$3^{6+4k}+5^{6+4k}=8^{6+4k}$	$7^{5+4k}+5^{5+4k}=12^{5+4k}$	$8^{5+4k}+5^{5+4k}=13^{5+4k}$
$2^{6+4k}+5^{6+4k}=7^{6+4k}$	$3^{3+4k}+5^{3+4k}=8^{3+4k}$	$7^{5+4k}+6^{5+4k}=13^{5+4k}$	$8^{6+4k}+5^{6+4k}=13^{6+4k}$
$2^{5+4k}+6^{5+4k}=8^{5+4k}$	$3^{5+4k}+6^{5+4k}=9^{5+4k}$	$7^{3+4k}+8^{3+4k}=15^{3+4k}$	$8^{5+4k}+6^{5+4k}=14^{5+4k}$
$2^{5+4k}+7^{5+4k}=9^{5+4k}$	$3^{3+4k}+7^{3+4k}=10^{3+4k}$	$7^{5+4k}+8^{5+4k}=15^{5+4k}$	$8^{5+4k}+9^{5+4k}=17^{5+4k}$
$2^{3+4k}+8^{3+4k}=10^{3+4k}$	$3^{5+4k}+7^{5+4k}=10^{5+4k}$	$7^{5+4k}+9^{5+4k}=16^{5+4k}$	$8^{3+4k}+10^{3+4k}=18^{3+4k}$
$2^{5+4k}+8^{5+4k}=10^{5+4k}$	$3^{5+4k}+8^{5+4k}=11^{5+4k}$	$7^{3+4k}+10^{3+4k}=17^{3+4k}$	$8^{4+4k}+10^{4+4k}=18^{4+4k}$
$2^{3+4k}+10^{3+4k}=12^{3+4k}$	$3^{5+4k}+9^{5+4k}=12^{5+4k}$	$7^{4+4k}+10^{4+4k}=17^{4+4k}$	$8^{5+4k}+10^{5+4k}=18^{5+4k}$
$2^{4+4k}+10^{4+4k}=12^{4+4k}$	$3^{4+4k}+10^{4+4k}=13^{4+4k}$	$7^{5+4k}+10^{5+4k}=17^{5+4k}$	$8^{6+4k}+10^{6+4k}=18^{6+4k}$
$2^{5+4k}+10^{5+4k}=12^{5+4k}$	$3^{3+4k}+10^{3+4k}=13^{3+4k}$	$7^{6+4k}+10^{6+4k}=17^{6+4k}$	$8^{5+4k}+11^{5+4k}=19^{5+4k}$
$2^{6+4k}+10^{6+4k}=12^{6+4k}$	$3^{5+4k}+10^{5+4k}=13^{5+4k}$	$4^{3+2k}+5^{3+2k}=9^{3+2k}$	$18^{5+4k}+1^{5+4k}=19^{5+4k}$
$2^{5+4k}+9^{5+4k}=11^{5+4k}$	$3^{6+4k}+10^{6+4k}=13^{6+4k}$	$4^{3+2k}+6^{3+2k}=10^{3+2k}$	$8^{5+4k}+1^{5+4k}=9^{5+4k}$
$2^{5+4k}+1^{5+4k}=3^{5+4k}$	$3^{5+4k}+11^{5+4k}=14^{5+4k}$	$4^{3+2k}+10^{3+2k}=14^{3+2k}$	$13^{5+4k}+1^{5+4k}=14^{5+4k}$
$1^{3+k}+5^{3+k}=6^{3+k}$	$3^{5+4k}+1^{5+4k}=4^{5+4k}$	$4^{4+2k}+10^{4+2k}=14^{4+4k}$	$9^{3+2k}+5^{3+2k}=14^{3+2k}$
$2^{5+4k}+5^{5+4k}=7^{5+4k}$	$7^{5+4k}+4^{5+4k}=11^{5+4k}$	$4^{3+2k}+1^{3+2k}=5^{3+2k}$	$9^{4+2k}+5^{4+2k}=14^{4+2k}$
$4^{3+2k}+11^{3+2k}=15^{3+2k}$	$9^{3+2k}+6^{3+2k}=15^{3+2k}$	$9^{3+2k}+10^{3+2k}=19^{3+2k}$	$9^{4+2k}+10^{4+2k}=19^{4+2k}$
$9^{3+2k}+11^{3+2k}=20^{3+2k}$	$9^{3+2k}+1^{3+2k}=10^{3+2k}$	$5^{3+k}+6^{3+k}=11^{3+k}$	$5^{3+k}+10^{3+k}=15^{3+k}$
$5^{3+k}+11^{3+k}=16^{3+k}$	$6^{3+k}+10^{3+k}=16^{3+k}$	$10^{3+k}+11^{3+k}=21^{3+k}$	$14^{3+2k}+1^{3+2k}=15^{3+2k}$
$b>0$			
$3^{6+4k}+4^{6+4k}=5^{6+4k}$	$7^{6+4k}+9^{6+4k}=10^{6+4k}$	$8^{3+4k}+6^{3+4k}=12^{3+4k}$	$8^{3+4k}+14^{3+4k}=16^{3+4k}$
$3^{4+4k}+5^{4+4k}=6^{4+4k}$	$7^{4+4k}+5^{4+4k}=8^{4+4k}$	$8^{4+4k}+10^{4+4k}=12^{4+4k}$	$14^{4+4k}+10^{4+4k}=18^{4+4k}$
$3^{3+4k}+6^{3+4k}=7^{3+4k}$	$7^{6+4k}+5^{6+4k}=8^{6+4k}$	$8^{6+4k}+6^{6+4k}=10^{6+4k}$	$8^{6+4k}+10^{6+4k}=12^{6+4k}$

$3^{3+4k}+8^{3+4k}=9^{3+4k}$	$7^{4+4k}+10^{4+4k}=13^{4+4k}$	$8^{3+4k}+11^{3+4k}=17^{3+4k}$	$8^{6+4k}+11^{6+4k}=15^{6+4k}$
$3^{3+4k}+11^{3+4k}=12^{3+4k}$	$7^{6+4k}+10^{6+4k}=13^{6+4k}$	$8^{6+4k}+9^{6+4k}=15^{6+4k}$	$4^{4+4k}+5^{4+4k}=7^{4+4k}$
$13^{3+4k}+9^{3+4k}=16^{3+4k}$	$7^{4+4k}+10^{4+4k}=11^{4+4k}$	$8^{4+4k}+5^{4+4k}=11^{4+4k}$	$14^{3+4k}+9^{3+4k}=17^{3+4k}$
$3^{6+4k}+9^{6+4k}=10^{6+4k}$	$7^{3+4k}+6^{3+4k}=9^{3+4k}$	$8^{4+4k}+10^{4+4k}=16^{4+4k}$	$6^{3+4k}+11^{3+4k}=13^{3+4k}$
$8^{6+4k}+4^{6+4k}=10^{6+4k}$	$17^{3+4k}+9^{3+4k}=18^{3+4k}$	$9^{4+4k}+10^{4+4k}=17^{4+4k}$	$9^{4+4k}+5^{4+4k}=12^{4+4k}$
$4^{4+4k}+10^{4+4k}=12^{4+4k}$	$8^{3+4k}+9^{3+4k}=11^{3+4k}$	$9^{3+4k}+12^{3+4k}=13^{3+4k}$	$15^{3+k}+11^{3+k}=16^{3+k}$
$9^{4+2k}+15^{4+2k}=16^{4+2k}$	$8^{4+4k}+15^{4+4k}=17^{4+4k}$	$9^{6+4k}+12^{6+4k}=15^{6+4k}$	$20^{3+k}+11^{3+k}=21^{3+k}$
$9^{4+4k}+15^{4+4k}=18^{4+4k}$	$8^{6+4k}+15^{6+4k}=17^{6+4k}$	$5^{4+k}+6^{4+k}=7^{4+k}$	$7^{4+4k}+15^{4+4k}=18^{4+4k}$
$17^{4+4k}+5^{4+4k}=18^{4+4k}$	$9^{4+4k}+10^{4+4k}=13^{4+4k}$	$7^{3+4k}+16^{3+4k}=19^{3+4k}$	$3^{3+4k}+16^{3+4k}=17^{3+4k}$
$13^{3+4k}+6^{3+4k}=17^{3+4k}$	$17^{3+4k}+6^{3+4k}=19^{3+4k}$	$13^{4+4k}+5^{4+4k}=16^{4+4k}$	$13^{3+4k}+8^{3+4k}=19^{3+4k}$
$10^{4+4k}+12^{4+4k}=14^{4+4k}$	$3^{4+4k}+15^{4+4k}=16^{4+4k}$	$12^{6+4k}+5^{6+4k}=13^{6+4k}$	$12^{5+4k}+4^{5+4k}=16^{5+4k}$
$2^{5+4k}+14^{5+4k}=16^{5+4k}$	$12^{3+4k}+6^{3+4k}=14^{3+4k}$	$2^{6+4k}+15^{6+4k}=17^{6+4k}$	$12^{6+4k}+5^{6+4k}=13^{6+4k}$
$12^{6+4k}+5^{6+4k}=17^{6+4k}$	$6^{6+4k}+13^{6+4k}=15^{6+4k}$	$3^{3+4k}+18^{3+4k}=19^{3+4k}$	$5^{4+4k}+14^{4+4k}=17^{4+4k}$
$15^{4+4k}+4^{4+4k}=17^{4+4k}$	$4^{6+4k}+13^{6+4k}=15^{6+4k}$	$14^{6+4k}+3^{6+4k}=15^{6+4k}$	$5^{4+4k}+16^{4+4k}=17^{4+4k}$
$6^{4+4k}+15^{4+4k}=17^{4+4k}$	$10^{4+4k}+13^{4+4k}=19^{4+4k}$	$7^{6+4k}+14^{6+4k}=15^{6+4k}$	$7^{6+4k}+24^{6+4k}=25^{6+4k}$

Примечание 1. В Табл. 3 приведены элементарные основания и ближайшие к ним, так чтобы охватить весь спектр возможностей. При этом из одного набора элементарных оснований может возникнуть несколько дополнительных. Так, например, набор 3, 4, 5 порождает наборы 13, 4, 15 и 3, 14, 15. Включено также несколько оснований из второго десятка.

Примечание 2. Набор 10, 20, 30 в дальнейшем может не рассматриваться, так как при синхронном увеличении оснований на число $a=10k$ и сокращении на общий множитель $10k$ этот набор сводится к уже рассмотренным (допустимым) наборам, а именно 2, 3, 4; 3, 4, 5; 4, 5, 6 и т.д.

Таблица 4. *Расчет характеристических величин для b<0*

v	***u***	***b***	***c***	***x***	***y***	***z***	***d***	***h***	***f***	***g***	*p*
6	8	-4	-80	2	4	10	-928	-9728	-98944	-995840	4; 6
7	18	-6	-216	1	12	19					3
6	9	-4	-92	2	5	11	-1197	- 14000	-157894	-1755870	4
8	11	-6	-140	2	5	13	-2100	-28000	-370000	-4800000	6
8	12	-6	-156	2	6	14					3
4	8	-2	-60	2	6	10	-786	-8700	-92000	-950000	6
4	9	-2	-71	2	7	11					3
4	11	-2	-84	2	9	13					3
6	13	-4	-140	2	9	15					6
8	17	-6	-236	2	11	19					3
4	12	-2	-92	2	10	14					4
8	16	-6	-220	2	10	18					4
7	8	-6	-76	1	2	9					3
4	13	-2	-100	2	11	15					6
8	9	-4	-128	4	5	13	-2000	-28000	-367000	-4800000	4
8	14	-4	-208	4	10	18	-5800	-95000	-1780000	-33000000	4
8	11	-4	-192	4	9	17					3
7	8	-4	-96	3	4	11					3
7	9	-4	-110	3	5	12					6
9	12	-6	-180	3	6	15					6
7	13	-4	-166	3	9	16					3
9	16	-6	-252	3	10	19					4
7	9	-6	-90	1	3	10					6
7	11	-2	-151	5	9	16					4
9	13	-4	-218	5	9	18	-1900	-31000	-480000	-7000000	4
6	9	-2	-104	4	7	13					3
8	11	-4	-160	4	7	15					6
7	9	-2	-122	5	7	14					4
8	9	-2	-140	6	7	15	-2900	-47000	-735000	-11240000	6
9	11	-2	-196	7	9	18					3
8	12	-4	-176	4	8	16					3
9	12	-4	-200	5	8	17					4; 6
9	11	-4	-182	5	7	16					4
6	9	-6	-72	0	3	9					4
4	8	-4	-48	0	4	8					4

v	*u*	*b*	*c*	*x*	*y*	*z*	*d*	*h*	*f*	*g*	*p*
2	4	-2	-12	0	2	4					4
7	8	-2	-108	5	6	13					4

Примечание. Здесь и далее *p* – разрешенная (допустимая) по ограничениям степень; для величин *d, h, f, g* даны отдельные значения, показывающие порядок величин.

Таблица 5. *Расчет характеристических величин для b=0*

v	*u*	*b*	*c*	*x*	*y*	*z*	*d*	*h*	*p*
1	2	0	-4	1	2	3			5
2	3	0	-12	2	3	5	-90	-578	3; 5
10	10	0	-220	10	11	21	-6930	-170240	3
2	4	0	-16	2	4	6	-144		5
2	5	0	-20	2	5	7	-210		3; 5; 6
1	3	0	-6	1	3	4	-36	-174	5
1	13	0	-26	1	13	14	-546		5
2	6	0	-24	2	6	8	-192		5
2	7	0	-28	2	7	9	-243	-4144	5
2	8	0	-32	2	8	10	-480		3; 5
2	9	0	-36	2	9	11	-594		5
2	10	0	-40	2	10	12	-720		3; 4; 5; 6
3	4	0	-24	3	4	7	-252		5
3	5	0	-30	3	5	8	-360		3; 4; 5; 6
3	6	0	-36	3	6	9	-486		5
3	7	0	-42	3	7	10	-630		3; 5
3	8	0	-48	3	8	11	-792		5
3	9	0	-54	3	9	12	-972		5
3	10	0	-60	3	10	13	-1170		3; 4; 5; 6
3	11	0	-66	3	11	14	-1386		5
4	7	0	-56	4	7	11	-924		5
5	7	0	-70	5	7	12	-1260		3; 4; 5; 6
6	7	0	-84	6	7	13	-507		5
7	8	0	-112	7	8	15	-2520		3; 5
7	9	0	-126	7	9	16	-3024		5
7	10	0	-140	7	10	17	-3570		3; 4; 5; 6
4	8	0	-64	4	8	12	-1152		5
5	8	0	-80	5	8	13	-1560		3; 4; 5; 6
6	8	0	-96	6	8	14	-2016		5
8	9	0	-144	8	9	17	-3672		5
8	10	0	-160	8	10	18	-4320		3; 4; 5; 6
8	11	0	-176	8	11	19	-5016		5
1	8	0	-16	1	8	9	-216		5
4	5	0	-40	4	5	9	-243		3
4	6	0	-48	4	6	10	-720		3
4	10	0	-80	4	10	14	-1680		3; 4
4	11	0	-88	4	11	15	-1980		3
1	4	0	-8	1	4	5	-60		3
5	9	0	-90	5	9	14	-1890		3; 4
6	9	0	-108	6	9	15	-2430		3
9	10	0	-180	9	10	19	-5130		3
9	11	0	-192	9	11	20	-5940		3
1	9	0	-18	1	9	10	-270		3
5	6	0	-30	5	6	11	-990		3
5	10	0	-100	5	10	15	-2250		3
5	11	0	-110	5	11	16	-2640		3
6	10	0	-120	6	10	16	-2880		3
1	5	0	-10	1	5	6			3
5	12	0	-120	5	12	17	-3060		5
2	15	0	-60	2	15	17	-1530		3
4	12	0	-96	4	12	16	-2304		3
1	15	0	-30	1	15	16	-720		3; 4
1	14	0	-28	1	14	15	-630		3
1	18	0	-36	1	18	19	-1026		3

Таблица 6. *Расчет характеристических величин для b>0*

v	*u*	*b*	*c*	*x*	*y*	*z*	*d*	*h*	*p*
1	2	2	0	3	4	5	-34	-288	6
1	3	2	-2	3	5	6	-64	-590	4
1	4	2	-4	3	6	7	-100	-1024	3
1	6	2	-8	3	8	9	-53	-2209	3
3	7	6	-6	9	13	16	-1170	-30414	3
1	7	2	-10	3	9	10	-244	-3358	6
6	9	4	-92	10	13	19	-3662	-91760	4
1	9	2	-14	3	11	12	-370	-6314	3
1	3	4	10	5	7	8	-44	-1070	4; 6
2	3	4	4	6	7	9	-170	-2864	3
1	9	8	46	9	17	18	-190	-14894	3
1	7	6	22	7	9	10	72	-1038	6
1	4	6	28	7	10	11	12	-2240	4
3	6	4	-20	7	10	13	-854	-16160	4; 6
2	8	6	4	8	14	16	-840	-23024	3
2	6	2	-20	4	8	10	-424	-5648	6
3	6	2	-32	5	8	11	-694	-9920	4
2	9	6	0	8	15	17	-1026	-28800	4; 6
4	6	2	-44	6	8	12	-1000	-15344	3
2	4	4	0	6	8	10	-272	-4608	6
2	3	6	24	8	9	11	-90	-3984	3
6	7	2	-80	8	9	15	-2134	-39968	6
2	4	6	20	8	10	12	-216	-6640	4; 6
6	8	2	-92	8	10	16	-2584	-51440	4
6	9	2	-104	8	11	17	-3070	-64784	3
4	7	4	-40	8	11	15	-1532	-31888	6
2	3	2	-8	4	5	7	-154	-1520	4
3	8	6	-12	9	14	17	-1440	-38544	3
2	8	2	-28	4	10	12	-764	-10480	4
4	8	6	-28	10	14	18	-2088	-56560	4
1	7	8	50	9	15	16	8	-8350	4
3	7	2	-38	5	9	12	-874	-13550	4
3	9	6	-18	9	15	18	-1728	-47790	4
3	4	6	12	9	10	13	-468	-12000	4
7	8	2	-108	9	10	17	-3184	-66960	4
1	5	10	90	11	15	16	610	-270	3
2	7	4	-20	6	11	13	-650	-12624	3
1	8	4	0	5	12	13	-344	-7200	6
2	8	4	-16	6	12	14	-800	-16384	3
1	4	8	-56	9	12	13	260	-1264	3
3	6	6	0	9	12	15	-918	-23328	6
2	4	8	-48	10	12	14	-16	-7680	4
3	11	2	-62	5	13	16	-1774	-36350	4
1	13	2	-22	3	15	16	-694	-14830	4
1	14	2	-24	3	16	17	-790	-17904	3
4	11	2	-84	6	13	17	-2500	-53664	3
2	9	4	-20	6	13	15	-962	-20768	6
1	16	2	-28	3	18	19	-1000	-25264	3
6	11	2	-128	8	13	19	-4150	-97664	3
3	7	6	-6	9	13	16	-1170	-30414	3
3	12	2	-68	5	14	17	-2044	-44480	4
2	13	2	-48	4	15	17	-1474	-32640	4
2	11	2	-40	4	13	15	-1114	-21818	6
1	12	2	-20	3	14	15	-604	-12128	6
1	10	10	-80	11	20	21	70	-19840	3
1	2	4	12	5	6	7	-2	-480	4
1	12	4	-8	5	16	17	-692	-17360	4
2	11	4	-28	6	15	17	-1322	-31600	4
1	8	6	20	7	14	15	-288	-9808	6
1	18	6	0	7	24	25	-1458	-56448	6

Список литературы

1. **Романов В. Н.** Подходы к доказательству теоремы Ферма. СПб.: ЛЕМА, 2009.
2. **Романов В. Н.** Способы доказательства теоремы Ферма: препринт. СПб.: СЗТУ, 2005.
3. **Wiles A.** Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem // Annals of Mathematics. 1995. Vol. 142. P. 443-551.

NATURAL NUMBERS AND FERMAT'S THEOREM

Romanov Vadim Nikolaevich, Doctor in Technical Sciences, Professor
National Mineral Resources University (University of Mines)
vromanvpi@mail.ru

The paper studies the correlation of natural numbers set properties and Fermat's theorem. The theorem proving, based on the above mentioned properties and the analysis of the limitations of supposed solutions, is proposed. The role of the acceptable transformations of variables included in the equation is studied, as well as the contributions of separate constituents depending on the values of characteristic quantities. Calculations confirm the correctness of the proving process.

Key words and phrases: theory of numbers; natural numbers; Fermat's last theorem; limitations of supposed solutions; acceptable transformations.

УДК 373.1
Педагогические науки

В данной статье предлагаются рекомендации по проведению подготовительных курсов в 11 классе для сдачи ЕГЭ по биологии. Классы с химико-биологическим профилем не удовлетворяют потребности всех учащихся, выбравших биологию в качестве итогового экзамена. Поэтому общеобразовательные учреждения организуют подготовительные курсы с химико-биологическим направлением. Эта задача возлагается на учителей биологии, которые, не имея опыта проведения таких курсов, могут испытывать затруднения. Мы в своей статье не только опираемся на собственный опыт подготовки учащихся, но и предлагаем анализ анкет (в виде диаграмм) студентов-первокурсников, уже сдавших ЕГЭ по биологии.

Ключевые слова и фразы: основные теоретические блоки; тематическое закрепление; виды памяти; экзаменационный стресс; «экзаменационный иммунитет».

Смирнова Людмила Вячеславовна, к.б.н.
Чаплынская Татьяна Викторовна
МБОУ «Средняя общеобразовательная школа № 1 с углубленным изучением отдельных предметов», г. Воронеж
chaplinskay1973@yandex.ru

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ КУРСОВ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО БИОЛОГИИ©

ЕГЭ перестал быть экспериментальной формой аттестации и занял прочное место в сфере образования. Задача учителя – помочь ученику достойно подготовиться к этому важному жизненному этапу, так как ЕГЭ не только завершает образование в школе, но и обеспечивает возможность поступления в желаемое высшее учебное заведение.

Для большей объективности рекомендаций по проведению подготовки к ЕГЭ мы анкетировали студентов-первокурсников Воронежского государственного педагогического университета. Результаты опроса оформили в виде диаграмм.