УДК 519.8:683.3
Экономические науки

Изложен алгоритм нелинейной оптимизации многомерных функций сложных эконометрических моделей численным методом приближений параболической вершины (МППВ). Данный метод обладает устойчивой сходимостью расчета наилучших экономических показателей в многофакторных функционально-аналитических и регрессионных моделях. Эффективность оптимизации МППВ показана на трех примерах нелинейных решений эконометрических задач.

Ключевые слова и фразы: нелинейная эконометрика; математико-экономическая модель; оптимизация; регрессия; коэффициент детерминации.

Антонов Владимир Александрович, д.т.н.
Институт горного дела Уральского отделения Российской академии наук
Antonov@igduran.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ВЕРШИНЫ©

Введение. Сложные экономические процессы моделируют математическими методами, включающими теоретические построения функциональных связей разных показателей. При необходимости экспериментального уточнения характерных параметров моделей применяют метод многофакторной регрессии. Наилучшие функциональные и регрессионные параметры, при которых достигается цель экономического исследования, определяются по итогам оптимизации модели. Применение широко распространенных линейных решений эконометрики и соответствующей оптимизации методом наименьших квадратов (МНК) часто приводит к большим искажениям в интерпретации процессов и ошибочным практическим выводам. Наиболее достоверное отображение экономических процессов достигается в моделях, нелинейных по функциональным параметрам. Однако для их оптимизации МНК недостаточно, а применение других численных методов (прямого поиска, градиентных, второго порядка) затруднено или вовсе невозможно из-за часто получаемой сложной топологии целевой функции и, как следствие, неустойчивой сходимости алгоритмов итерационных расчетов. Это обстоятельство сдерживает развитие нелинейных методов эконометрики.

Для решения обозначенной проблемы автором предложен оптимизационный метод приближений параболической вершины (МППВ). Исследования [1] показали, что этим методом надежно и просто оптимизируются относительно сложные многомерные функции. Суть МППВ состоит в многократно повторяющейся и уточняющейся аппроксимации экстремальной области m-мерной унимодальной функции $U(\xi_j) \equiv U(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_m)$ так же m-мерной параболической функцией $P(\xi_j)$, имеющей единственный экстремум, условно названный вершиной. В k-приближении итерационного процесса параболическая функция P_k представляется в виде:

$$P_k = C_k + \sum_{j=1}^{m} (C_{j1k}\xi_j + C_{j2k}\xi_j^2),$$

где ξ_j – оптимизируемые аргументы; C_k, C_{j1k}, C_{j2k} – коэффициенты. Аппроксимацию проводят по опорным точкам, принадлежащим обеим функциям $U(\xi_j)$ и $P(\xi_j)$, для которых при поиске минимума или максимума функции $U(\xi_j)$ выполняются соответствующие неравенства коэффициентов $C_{j2k}>0$ или $C_{j2k}<0$. В процессе приближений опорные точки с наибольшим значением $U(\xi_j)$ при поиске минимума или с наименьшим значением $U(\xi_j)$ при поиске максимума заменяются вновь образованными опорными точками с координатами $\xi_{jвk}$, $U_в(\xi_{jвk})$, рассчитанными по вершине параболической функции. В результате аппроксимации осуществляется последовательное приближение вершинной точки параболической функции к экстремуму функции $U(\xi_j)$.

Дальнейшие исследования привели к следующим уточнениям алгоритма МППВ и формированию правил, по которым осуществляется оптимизация.

Алгоритм оптимизации МППВ. Представим МППВ в варианте поиска максимума функции $U(\xi_j)$. Опорные точки имеют координаты $\xi_{j\nu}$ и U_ν. Индекс j пробегает значения от 1 до m – количества аргументов, а индекс ν обозначает номер опорной точки и изменяется от 1 до $2m+1$. Сначала в области предварительной локализации максимума функции $U(\xi_j)$ выбирается положение первой опорной точки ($\nu=1$). Стартовое положение остальных опорных точек с номерами $\nu>1$ задается по следующему правилу ортогонального вогнутого перекрестка, которое состоит из двух частей. Центром перекрестка считаем положение первой опорной точки. Аргументы опорных точек с номерами $1<\nu<2j$ и $2j+1<\nu \le 2m+1$ тоже принимают значения центра. Опорные точки с номерами $2j$ и $2j+1$ смещаются по оси j-аргумента от центра в двух противоположных направлениях на интервал $|\Delta \xi_j|$. Координаты точек с номерами $\nu=2j$ выражаются разностью $\xi_{j\nu} = \xi_{j1} - |\Delta\xi_j|$, а с номерами $\nu = 2j+1$, соответственно, суммой $\xi_{j\nu} = \xi_{j1} + |\Delta\xi_j|$. Координаты опорных точек, установленные по первой части изложенного правила, приведены в Таблице 1. Интервал $\left|\Delta\ \xi_j\right|$ в стартовом состоянии опорных точек назначается намного меньшим, чем размер области локализации. Примеры установки опорных точек по данному правилу показаны на Рисунке 1.

Табл. 1. *Координаты опорных точек МППВ, установленные по первой части правила ортогонального перекрестка*

$\xi_{j\nu}$ / ν	$\xi_{1\nu}$	$\xi_{2\nu}$	$\xi_{3\nu}$	…	$\xi_{m\nu}$
1	ξ_{11}	ξ_{21}	ξ_{31}	…	ξ_{m1}
2	$\xi_{11}-\left|\Delta\,\xi_1\right|$	ξ_{21}	ξ_{31}	…	ξ_{m1}
3	$\xi_{11}+\left|\Delta\,\xi_1\right|$	ξ_{21}	ξ_{31}	…	ξ_{m1}
4	ξ_{11}	$\xi_{21}-\left|\Delta\xi_2\right|$	ξ_{31}	…	ξ_{m1}
5	ξ_{11}	$\xi_{21}+\left|\Delta\xi_2\right|$	ξ_{31}	…	ξ_{m1}
6	ξ_{11}	ξ_{21}	$\xi_{31}-\left|\Delta\xi_3\right|$	…	ξ_{m1}
7	ξ_{11}	ξ_{21}	$\xi_{31}+\left|\Delta\xi_3\right|$	…	ξ_{m1}
…	…	…	…	…	…
$2m$	ξ_{11}	ξ_{21}	ξ_{31}	…	$\xi_{m1}-\left|\Delta\xi_m\right|$
$2m+1$	ξ_{11}	ξ_{21}	ξ_{31}	…	$\xi_{m1}+\left|\Delta\xi_m\right|$

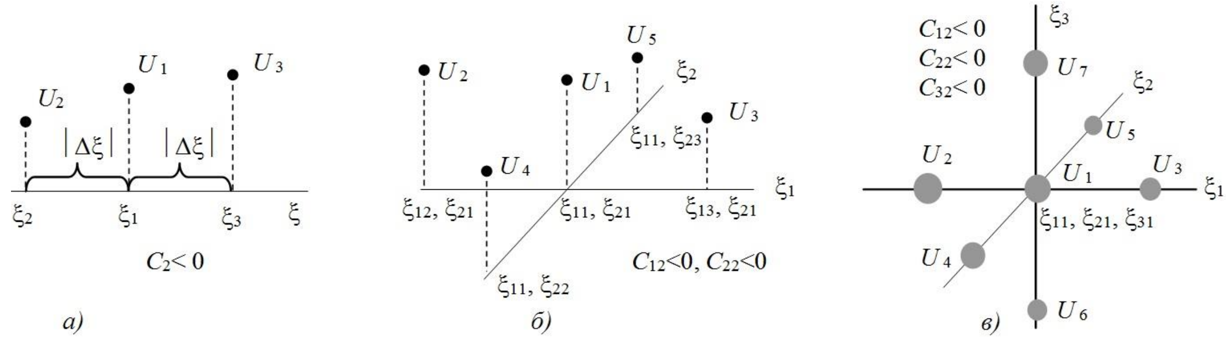


Рис. 1. *Примеры установки опорных точек МППВ по первой части правила ортогонального перекрестка. Количество оптимизируемых аргументов*: *а)* – 1, *б)* – 2, *в)* – 3.

Название вогнутого ортогонального перекрестка опорных точек отражает то обстоятельство, что сечения параболической функции, проведенные вдоль каждого j-аргумента через центр перекрестка по трем опорным точкам с координатами $\xi_{j1}-\left|\Delta\xi_j\right|$, ξ_{j1}, $\xi_{j1}+\left|\Delta\xi_j\right|$, представляют собой вогнутые параболы. Они расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях и в условиях неравенств $C_{j2}<0$ имеют общий максимум P_B.

Возможно, что топология функции $U(\xi_j)$ в области перекрестка имеет осложнения, например, локальный склон, перегиб. Поэтому одно или несколько упомянутых неравенств могут не выполняться. Тогда по следующей, второй, части правила перекрестка проводится его расширение вдоль j-осей аргументов таких неравенств. Опорные точки с номерами $2j$ и $2j+1$ смещаются относительно центра перекрестка в направлении, которое определяется по результатам сравнения значений U в точках $\xi_{j1}-\left|\Delta\xi_j\right|$ и $\xi_{j1}+\left|\Delta\xi_j\right|$. Расширение проводится по направлению, проходящему от центра через точку, имеющую наибольшее значение U. Точки с номерами $2j$ и $2j+1$ перемещаются с установленным интервалом поочередно шагами с опережением, т.е. «перепрыгиванием» одной точки через другую. Процедура расширения прекращается после восстановления соответствующих неравенств $C_{j2}<0$ или при достижении координат перемещающихся опорных точек предельно допустимых значений.

После установки опорных точек по изложенному правилу проводятся итерации всего перекрестка или отдельных его точек в следующем порядке. Используя координаты опорных точек перекрестка, рассчитывают по формуле $\xi_{jB}=-C_{j1}/2C_{j2}$ совокупность вершинных аргументов $\xi_{j\text{в}}$ параболической функции. Затем, принимая их значения и рассчитанное с их учетом соответствующее значение функции $U_\text{в}(\xi_{j\text{в}})$, получают новую опорную точку. После этого действуют по следующим вариантам.

1. Получено значение $U_\text{в}$ меньше наименьшего U_ν в опорных точках. Среди их номеров $\nu>1$ найдется точка с наибольшим отсчетом U_ν и большим, чем отсчет U_1 в центре. Этой точке присваивается номер 1 и

вокруг нее строится новый перекресток, т.е. он переносится на интервал $\left|\Delta\ \xi_j\right|$ в направлении роста U. При отсутствии отмеченной точки интервалы $\left|\Delta\ \xi_j\right|$ перекрестка изменяют. Если после этого точка переноса не найдена, то данная центральная точка является приближенным максимумом U.

2. Получено значение $U_в$ больше наибольшего $U_ν$ в опорных точках. Перекресток переносится на место новой опорной точки с координатами ($\xi_{jв}$, $U_в$). Этой точке присваивается номер один. Остальные опорные точки устанавливаются вокруг нее по уже упомянутому правилу перекрестка.

3. Получено значение $U_в$ больше наименьшего и меньше наибольшего значения $U_ν$ в опорных точках. Тогда проводят итерации опорных точек. Заменяют одну из них с наименьшим значением $U_ν$ на новую опорную точку.

В каждом следующем k-приближении, используя координаты опорных точек, рассчитывают координаты вновь образованной точки $\xi_{jвk} = -C_{j1k} / 2C_{j2k}$ и $U_{вk}(\xi_{jвk})$. В приближении k +1 действуют по следующим условиям.

Если значение $U_в$ превышает $U_ν$ хотя бы одной опорной точки и выполнены все или часть соотношений C_{j2k}<0, то заменяют одну из опорных точек с наименьшим значением U на новую опорную точку. Если $U_в$ по значению равно или меньше наименьшего из $U_ν$ или нарушены все неравенства C_{j2k}<0, то итерации временно останавливают и проводят коррекцию координат опорных точек.

Коррекция заключается в установке опорных точек по тому же правилу ортогонального вогнутого перекрестка (с возможным его расширением), но с учетом достигнутого на момент коррекции итерационного приближения. Теперь центром перекрестка считается единственная сохраняемая опорная точка, имеющая наибольшее значение $U_ν$. Ей присваивается номер $ν$=1. Остальные опорные точки смещаются относительно центра по направлению соответствующей j-оси на интервал $\left|\Delta\ \xi_{jk}\right|$

$$\left|\Delta\xi_{jk}\right| = \frac{1}{2m+1}\sum_{ν=1}^{ν=2m+1}\left|\xi_{jνk} - \xi_{jцk}\right|,$$

который в данном случае представляется усредненным текущим отклонением опорных точек k-приближения от их взвешенного центра. Его j-координата $\xi_{jцk}$ определяется выражением

$$\xi_{jцk} = \frac{\xi_{j1k}U_{1k} + \xi_{j2k}U_{2k} + \ .... \ + \xi_{j(2m+1)k}U_{(2m+1)k}}{U_{1k} + U_{2k} + \ .... \ + U_{(2m+1)k}}.$$

Коррекция опорных точек считается завершенной, когда восстанавливаются все неравенства C_{j2k}<0. Далее итерации возобновляются по указанному выше порядку перемещения всего ортогонального перекрестка или отдельных опорных точек в направлении дальнейшего роста функции U.

При поиске минимума функции $U(\xi_j)$ знак неравенства коэффициентов C_{j2k}<0 следует заменить на противоположный C_{j2k}>0. Опорные точки на старте и в коррекциях итераций устанавливаются по правилу ортогонального выпуклого перекрестка. В итерациях опорные точки с наибольшим значением $U(\xi_j)$ заменяются вновь образованными опорными точками с координатами $\xi_{jвk}$, $U_в(\xi_{jвk})$.

Если некоторая оптимизируемая функция $F(\xi_j)$ имеет два или несколько однозначных экстремумов, то расчеты МППВ проводятся в последовательно чередующихся ее ортогональных сечениях, содержащих функции $U(\xi_j)$. Каждое сечение образуется путем задания в функции F фиксированных значений некоторым параметрам ξ так, что в оставшихся координатах ξ_1, ξ_2...ξ_j...ξ_m оно содержит единственный глобальный максимум $U_м$.

Достаточность приближений МППВ внутри сечения оценивается сравнением сколь угодно малой допустимой, то есть заданной, простой средней относительной погрешности δ определения вершинных координат ξ_j с ее частным значением δ_{jk}, рассчитанным в текущем приближении для каждого аргумента по формуле

$$\delta_{jk} = \frac{\sum_{ν=1}^{ν=2m+1}\left|\xi_{j(k+1)} - \xi_{jkν}\right|}{(2m+1)\left|\xi_{j(k+1)}\right|},$$

где $\xi_{jkν}$ – значение j-аргумента опорной ν-точки в k-приближении; $\xi_{j(k+1)}$ – значение j-аргумента новой опорной точки, рассчитанной для приближения k+1. Приближения с номером k считаются достаточными, если для каждого аргумента выполняется неравенство $\delta_{jk} \le \delta$.

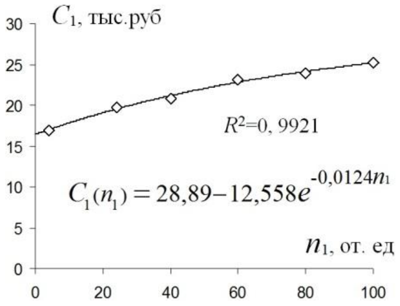
Достаточность чередования сечений определяется по сходимости рассчитанных в них параметров ξ_j. Сходимость оценивается по нескольким последним результатам расчетов, повторяющихся в очереди, когда в полученных малых приращениях $\Delta\xi_j$, соответствующих погрешности δ, появляются разные алгебраические знаки.

Применение оптимизации МППВ. Вид оптимизируемой, т.е. целевой, функции $F(\xi_j)$ определяется условиями и характерными особенностями конкретной экономической задачи. Методики оптимизации МППВ (М) обозначаются количеством опорных точек (3Т, 5Т, 7Т…) и проставленным через тире числом соответствующих сечений U.

В уравнениях нелинейной регрессии коэффициенты, стоящие при функциях, оптимизируются МНК, а функциональные параметры ξ_j – МППВ. Критерием оптимизации является приведение к максимуму коэффициента детерминации построенной модели $R^2(\xi_j) = 1 - \frac{D(\xi_j)}{D}$, где D – дисперсия заданных значений зависимого экономического показателя (узловых точек); $D(\xi_j)$ – дисперсия отклонений регрессии от узловых точек. В результате оптимизации определяется совокупность параметров ξ_j, при которой коэффициент детерминации $R^2(\xi_j)$ наибольший из всех возможных, оцениваемых МНК. По алгоритму оптимизации МППВ рассчитывается серия двумерных уравнений регрессии в известной компьютерной программе для ЭВМ «Уравнения нелинейной регрессии, тренды двумерные функционально-факторные с самоопределяющимися параметрами и повышенной достоверностью (Тренды ФСП-1)».

Эффективность применения МППВ покажем на следующих практических примерах.

Пример 1. Предприятие готовится к производству двух видов изделий, которые реализуются по ценам $Ц_1$ и $Ц_2$, соответственно, 30 и 19 тыс. рублей. Установлено на опытах, что из-за брака, возникающего в процессе производства, себестоимость C_1 и C_2 каждого изделия изменяется по мере увеличения их количества n_i (i =1, 2) в выпускаемых партиях. Соответствующие наблюдения обозначены на Рис. 2 точками. Ограничения производства, связанные с имеющимися запасами ресурсов и материалов, выражаются неравенствами $50< n_1 < 210$, $25< n_2 < 90$. Требуется составить план выпуска изделий, обеспечивающий получение максимальной прибыли $П$.



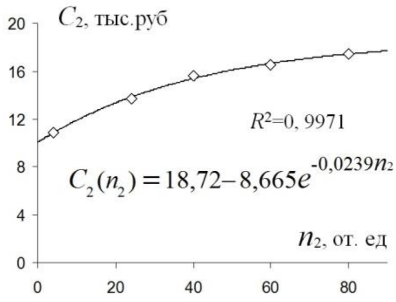


Рис. 2. *Наблюденные значения себестоимостей C_1 и C_2 выпускаемых изделий в примере 1 (точки), уравнения и графики их регрессии.*

Выразим целевую функцию прибыли суммой

$$П = \left[Ц_1 - C_1(n_1)\right] \cdot n_1 + \left[Ц_2 - C_2(n_2)\right] \cdot n_2 .$$

Функции себестоимостей $C_1(n_1)$ и $C_2(n_2)$, учтенные в прибыли, определим регрессией, построенной по данным наблюдений. Учитывая наличие лишь одной монотонности в изменении экспериментальных отсчетов себестоимости, выберем уравнение следующего вида:

$$C = C_0 + A e^{\beta n} .$$

Коэффициент β данного уравнения оптимизирован МППВ с погрешностью δ=0,001 по методике МЗТ-1. Полученные уравнения и их графики показаны на Рис. 2. С учетом проведенной регрессии представим целевую функцию в следующем виде:

$$П = (1,11 + 12,558e^{-0,0124n_1})n_1 + (0,28 + 8,665e^{-0,0239n_2})\, n_2 .$$

Ее максимум определяется МППВ по методике М5Т-1. Стартовое положение первой опорной точки задается граничными условиями n_1=50, n_2=25. Итерационное передвижение вершинной опорной точки по поверхности целевой функции показано на Рис. 3. В результате с относительной погрешностью δ=0,01 получен оптимальный план выпуска изделий n_1=106, n_2 =46, обеспечивающий максимальную прибыль $П$=620,6 тыс. руб.

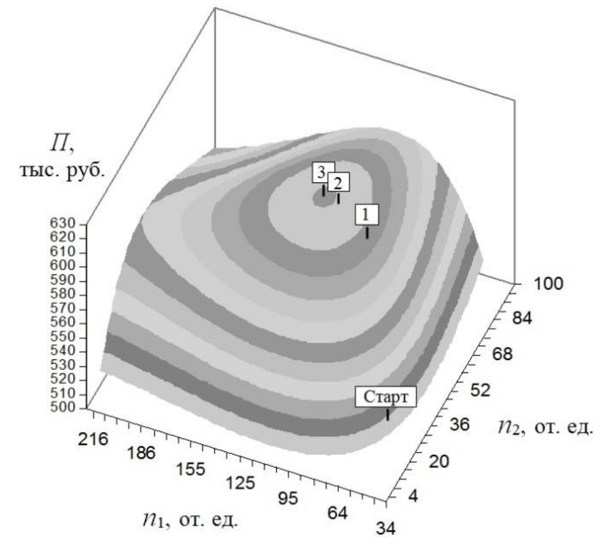


Рис. 3. *Схема итерационного (k=1, 2, 3) приближения вершинной опорной точки МППВ к максимальной прибыли в Примере 1*

Пример 2. Активы банка зависят от размера выдаваемых ссуд, количества и состава заемщиков. На Рис. 4 точками показано имеющееся на текущий период количество заемщиков N с разной суммой S займа. Для функционального управления и расчета кредитных операций требуется по данным точкам построить математическую модель регрессии.

Распределение заемщиков характеризуется сложной правосторонней асимметрией с пологим убыванием их числа по мере роста займа. Такую особенность отображает следующий вид уравнения регрессии, состоящий из суммы двух распределений N_1 и N_2 с разным средним значением займов

$$N = A_1(S \cdot a_1^{-S})^{\mu_1} + A_2(S \cdot a_2^{-S})^{\mu_2}.$$

Здесь алгоритмом МППВ по методике М5Т-2 оптимизируются четыре параметра: a_1, a_2, μ_1, μ_2. В результате расчетов с погрешностью δ=0,0001 получено уравнение регрессии с коэффициентом детерминации R^2=0,992 в следующем конкретном виде

$$N = 2{,}1384 \cdot 10^{-11}(S \cdot 1{,}0043^{-S})^{6{,}9888} + 161{,}6141(S \cdot 1{,}0092^{-S})^{0{,}1911}.$$

Первая компонента данного уравнения N_1 выражает распределение заемщиков с относительно небольшими займами, а вторая N_2 – с займами увеличенного размера. Линии регрессии N, N_1, N_2 показаны на Рис. 4.

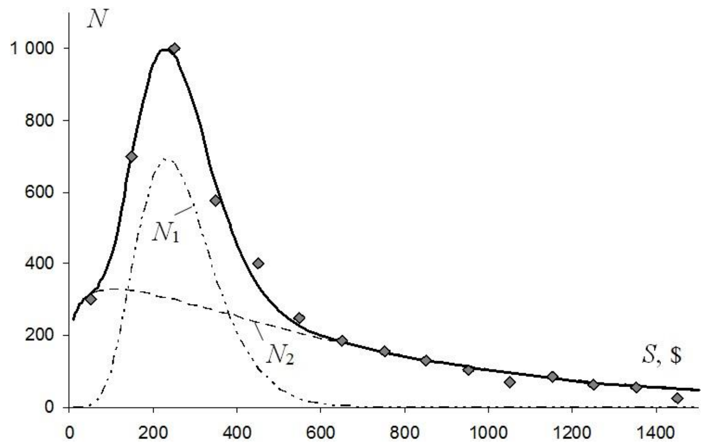


Рис. 4. *Распределение количества заемщиков банка с разными вкладами в Примере 2 (точки) и график их регрессии с компонентами N_1 и N_2*

Пример 3. Некоторый результирующий экономический показатель Y предприятия, например, прибыль, доход, зависит от пяти других технико-экономических показателей x_i – аргументов. Ряды их значений, зафиксированные в течение некоторого периода времени, представлены в Таблице 2. С целью прогноза и управления экономическим процессом на предприятии требуется методом множественной регрессии построить математическую модель зависимости $Y(x_i)$ и оценить, как на нее влияют аргументирующие показатели.

Табл. 2. *Значения технико-экономических показателей в Примере 3*

Y	532	765	407	850	594	743	795	844	721	825	908	1092	870	980	707
x_1	18	44	13	30	18	34	24	51	40	28	49	67	38	42	30
x_2	17	29	11	31	13	39	21	20	11	12	49	42	40	28	16
x_3	20	33	11	37	12	38	41	23	26	46	45	34	24	49	19
x_4	32	16	38	14	26	17	17	15	19	13	13	13	16	15	21
x_5	42	30	48	27	47	46	36	36	41	41	17	19	29	9	38

Предварительно убедившись, что между аргументами нет тесной корреляционной связи, составим три регрессионные модели формирования результирующего показателя, представленные степенным полиномиальным уравнением. Первая модель линейная. Вторая – с априори заданными целочисленными показателями степени. В третьей модели показатели степени расчетные в области рациональных чисел. Первая и вторая модели оптимизированы МНК, а третья – совместно МНК и МППВ по методике М11Т-1. В результате получены следующие статистически значимые уравнения:

$$Y_1 = 9{,}63x_1 + 1{,}23x_2 + 8{,}53x_3 + 3{,}61x_4 + 2{,}19x_5;$$

$$Y_2 = 2{,}73x_1 + 0{,}52x_2 + 1740{,}84x_3^{-1} + 9062{,}89x_4^{-1} + 1814{,}03x_5^{-1};$$

$$Y_3 = 2{,}418 \cdot 10^{-22} x_1^{13{,}08} - 7{,}789 \cdot 10^{-11} x_2^{6{,}68} - 0{,}03x_3^{1{,}86} - 22{,}81x_4^{0{,}93} + 1642{,}15x_5^{-0{,}11}.$$

Достоверность модельной зависимости $Y(x_i)$ оценим по коэффициенту детерминации R^2, а вклад каждого члена соответствующего уравнения в регрессию выразим его относительной долей в сумме значений Y, вычисленных в узловых точках. Результаты оценок сведены в Таблице 3.

Табл. 3. *Оценка детерминации и состава регрессионных моделей в Примере 3*

Вид модели	R^2	Номер аргумента в уравнении регрессии				
		1	2	3	4	5
		Относительный вклад в регрессию				
Линейный, Y_1	0,783	<u>0,44</u>	0,04	<u>0,34</u>	0,09	0,10
Целочисленные показатели степени, Y_2	0,910	0,12	0,02	0,09	<u>0,68</u>	0,09
Расчетные показатели степени, Y_3	0,984	0,0155	-0,0025	-0,0211	-<u>0,4497</u>	<u>1,4579</u>

По мере снятия закрепощенности модельных показателей степени, т.е. усложнения нелинейной регрессии, коэффициент ее детерминации возрастает. В связи с этим перераспределяется вклад в регрессию отдельных независимых технико-экономических показателей. Значения относительно больших вкладов подчеркнуты. В линейной модели наибольший вклад в регрессию – 0,44 – принадлежит показателю x_1. Во второй модели вклад этого показателя существенно снижен – до 0,12, а в третьей модели он мизерно мал – 0,0155. Напротив, вклад в регрессию показателя x_5 в первых двух моделях относительно мал (0,10, 0,09), зато в третьей модели является наибольшим – 1,4579.

Из первой модели с коэффициентом детерминации R^2=0,783 получается, что с ростом всех аргументов x_i регрессия результирующего показателя Y_1 увеличивается. При этом основной вклад в нее вносят показатели x_1 и x_3. Из анализа второй, более точной, модели с коэффициентом R^2=0,910 следует другое объяснение – результирующий показатель Y_2 увеличивается в основном при уменьшении показателя x_4. Менее значимое увеличение Y_2 наблюдается при росте показателя x_1 и снижении показателей x_3 и x_5.

Наиболее достоверна третья модель (R^2=0,984). В уравнении регрессии Y_3 имеются отрицательные члены, интерпретируемые как ее составляющие с обратным экономическим действием. Например, вместо прибыли – убыль, или вместо дохода – расход. Модель обнаруживает, что наибольшее влияние на регрессию оказывают показатели x_4 и x_5. Оценим это влияние дифференцировано. Изменение $\Delta Y_{(i)}$, происходящее от малого приращения Δx_i, выразим соотношением $\Delta Y_{(i)} = \frac{\partial Y}{\partial x_i}\Delta x_i$. Из него следует, что изменения $\Delta Y_{3(4)}$ и $\Delta Y_{3(5)}$, вызванные показателями x_4 и x_5, зависят от их значений и рассчитываются по соответствующим формулам

$$\Delta Y_{3(4)} = -21,21 x_4^{-0,07}\Delta x_4;\ \Delta Y_{3(5)} = -180,64 x_5^{-1,11}\Delta x_5.$$

Положив условно x_4=x_5=25 и Δx_4=Δx_5=5, рассчитаем соответствующие изменения $\Delta Y_{3(4)}$=- 84,66 и $\Delta Y_{3(5)}$=-25,36. Очевидно, что наибольший вклад показателя x_5 в регрессию Y_3 незначительно увеличивается по мере его уменьшения. Более существенный рост Y_3 наблюдается при уменьшении показателя x_4, создающего относительно меньший отрицательный вклад, что объясняется снижением его обратного действия на регрессию.

Заключение. Алгоритм оптимизации МППВ, проводимый в чередующихся сечениях многомерных целевых функций сложных эконометрических моделей, приводит к устойчивой сходимости в расчете их наилучших показателей. Построенные таким образом модели нелинейной регрессии наиболее достоверно отображают свойства и характерные черты исследуемых экономических процессов. Это позволяет уверенно проводить их интерпретацию и принимать эффективные управляющие решения.

Список литературы

1. **Антонов В. А.** Об одном методе построения полиномных трендов с самоопределяющимися показателями и коэффициентами // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46. № 2. С. 78-88.

NON-LINEAR ECONOMETRIC MODELS OPTIMIZATION BY METHOD OF PARABOLIC VERTEX APPROXIMATION

Antonov Vladimir Aleksandrovich, Doctor in Technical Sciences
Mining Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
Antonov@igduran.ru

The algorithm of the non-linear optimization of the multi-dimensional functions of complex econometric models by the numerical method of parabolic vertex approximations (MPVA) is represented. This method has the stable convergence of the best economic indicators calculation in multiple-factor functional-analytic and regression models. The efficiency of MPVA optimization is shown by three examples of the non-linear solutions of econometric tasks.

Key words and phrases: non-linear econometrics; mathematical-economic model; optimization; regression; determination coefficient.