Романов Вадим Николаевич

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

В статье предложен способ доказательства теоремы П. Ферма, использующий разложение исходного уравнения в ряд, который имеет вид взвешенной аддитивной функции, зависящей от одного аргумента и параметров. Исследована зависимость корней функции от выбора весов и показано, что выбор рациональных весов невозможен. Теоретическое исследование сопровождается расчетами, поясняющими ход доказательства.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2014. № 8 (86). C. 139-143. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2014/8/

УДК 511
Физико-математические науки

В статье предложен способ доказательства теоремы П. Ферма, использующий разложение исходного уравнения в ряд, который имеет вид взвешенной аддитивной функции, зависящей от одного аргумента и параметров. Исследована зависимость корней функции от выбора весов и показано, что выбор рациональных весов невозможен. Теоретическое исследование сопровождается расчетами, поясняющими ход доказательства.

Ключевые слова и фразы: теория чисел; теорема Ферма; разложение уравнения в ряд; весовые коэффициенты; действительные корни функции; задача о наименьшем уклонении.

Романов Вадим Николаевич, д.т.н., профессор
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»
vromanvpi@mail.ru

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ФЕРМА©

Теорема П. Ферма, как известно, утверждает, что уравнение

$$x^p + y^p = z^p \tag{1}$$

не имеет целых положительных решений при $p > 2$. В предыдущей статье была исследована взаимосвязь свойств натуральных чисел и теоремы Ферма [1, с. 151]. В настоящей статье предлагается способ доказательства теоремы, основанный на представлении уравнения (1) в виде полинома с весовыми коэффициентами и исследовании его корней. Рассмотрим область натуральных чисел N; x, y, $z \in N$. Обозначим наименьшее из трех чисел за x, следующее по величине – за y, самое большое – за z, так что $x<y<z$. Положим $y = x + m$; $z = x + n$ $(n > m)$, $n, m \in N$. Тогда исходное уравнение преобразуется к виду

$$x^p = C_p^1 x^{p-1}(n-m) + C_p^2 x^{p-2}(n^2 - m^2) + \ldots + C_p^{p-1} x(n^{p-1} - m^{p-1}) + (n^p - m^p) \ . \tag{2}$$

Введем функцию одной переменной x с параметрами m, n и запишем (2) в виде

$$f_p(x) = x^p - \{C_p^1 x^{p-1}(n-m) + \ldots + C_p^{p-1} x(n^{p-1} - m^{p-1}) + (n^p - m^p)\} = 0 \, . \tag{3}$$

Задача сводится к доказательству того, что $f_p(x)$ не имеет корней в области натуральных чисел, т.е. ни при каких натуральных x, m, n не обращается в нуль. Здесь имеется аналогия с известной задачей о наименьшем уклонении с той только разницей, что полином задан, и требуется найти значения аргумента, при которых функция (3) обращается в нуль. Рассмотрим уравнение (3). Предположим, что x – искомый корень этого уравнения, $x \in N$. Тогда выражение в фигурных скобках уравнения (3), зависящее от трех натуральных величин x, n, m, должно равняться x^p. Следовательно, можно ожидать, что целочисленные слагаемые этого выражения должны давать пропорциональные вклады в значение x^p. Представим выражение в фигурных скобках в виде взвешенной суммы

$$\{\bullet\} = \sum_{i=1}^{p} a_i x^p \ , \tag{4}$$

где a_i – рациональные числа, нормированные на 1; $\sum_{i=1}^{p} a_i = 1$. Нужно показать, что ни при каких рациональных a_i уравнение (3) не будет выполняться. Итак, имеем соотношения

$$C_p^1 x^{p-1}(n-m) = a_1 x^p; C_p^2 x^{p-2}(n^2 - m^2) = a_2 x^p, \ldots, C_p^{p-1} x(n^{p-1} - m^{p-1}) = a_{p-1} x^p,$$

$$(n^p - m^p) = a_p x^p \ . \tag{5}$$

Казалось бы, веса можно задать произвольно, однако это ничего не дает для решения основной задачи. Поэтому рассмотрим характерные случаи, обусловленные симметрией задачи, которые позволяют ввести разумные упрощения, не снижая общности.

Случай 1. Определим веса a_i следующим «естественным» образом:

$$a_i = C_p^i / (2^p - 1) \ , \tag{6}$$

где $i = 1, 2, \ldots, p$, $(2^p - 1) = C_p^1 + C_p^2 + \ldots + C_p^p$. Сопоставляя (5) и (6), получаем

$$n - m = x / (2^p - 1) \ , \tag{7}$$

$$n^2 - m^2 = x^2 / (2^p - 1) \, . \tag{8}$$

Из (7) и (8) получаем

$$n + m = x \, . \tag{9}$$

Аналогично из (5) и (6) имеем

$$n^3 - m^3 = x^3 / (2^p - 1) \tag{8a}$$

или с учетом (7)

$$n^2 + nm + m^2 = x^2 . \tag{9a}$$

Последнее из соотношений (5) с учетом (6) дает

$$n^p - m^p = x^p / (2^p - 1) \tag{10}$$

или с учетом (7)

$$n^{p-1} + n^{p-2}m + ... + nm^{p-2} + m^{p-1} = x^{p-1} . \tag{11}$$

Решая (7) и (9) совместно, найдем

$$n = \frac{1}{2}[1 + 1/(2^p - 1)]x \tag{12}$$

$$m = \frac{1}{2}[1 - 1/(2^p - 1)]x . \tag{13}$$

Покажем, что соотношения для неполных степеней суммы (9a)…(11) не могут выполняться при одних и тех же n, m. Рассмотрим, например, член $n^2 + nm + m^2$, определяемый из (9a). Подставляя значения n, m из (12), (13), имеем

$$n^2 + nm + m^2 = 1/4(3 + 1/(2^p - 1))x^2 < x^2 . \tag{14}$$

Этот результат имеет место и для других неполных степеней суммы. В частности, для $n^3 + n^2m + nm^2 + m^3$ это следует из неравенства $n^3 + n^2m + nm^2 + m^3 < (n+m)(n^2 + nm + m^2)$. Так как $(n+m) = x$, а $n^2 + nm + m^2 < x^2$, то $n^3 + n^2m + nm^2 + m^3 < x^3$. Вообще для произвольного $p > 2$ можно записать $n^{p-1} + n^{p-2}m + ... + nm^{p-2} + m^{p-1} < (n+m)(n^{p-2} + n^{p-3}m + ... + nm^{p-3} + m^{p-2}) < x^{p-1}$.

Из приведенных рассуждений следует, что при заданном выборе весов $f_p(x) \neq 0$ ни при каком натуральном x для $p > 2$, так как сумма слагаемых в фигурных скобках выражения (3) должна равняться x^p, а в действительности (как показано выше) она меньше x^p. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений среди натуральных чисел при $p > 2$, т.е. теорема Ферма справедлива при заданном выборе весов. Рассмотрим два частных случая $p = 2$ и $p = 3$. Для $p = 2$ уравнение (3) имеет вид $f_2(x) = x^2 - \{2(n-m)x + (n^2 - m^2)\} = 0$. Расчеты дают $n = 2x/3$, $m = x/3$, поэтому $y = x + m = 4x/3$, $z = x + n = 5x/3$. Отсюда следует, что x должно иметь вид $x = 3k$, где k – произвольное натуральное число. Получаем одно из решений квадратного уравнения. Для $p = 3$ уравнение (3) имеет вид $f_3(x) = 0$. Расчеты дают $n = 4x/7$, $m = 3x/7$, $n^2 + nm + m^2 = 37x^2/49$. Отсюда получаем $f_3(x) = 12x^3/343 \neq 0$.

Случай 2. Покажем теперь, что другой выбор рациональных весов при $p > 2$ невозможен. Выберем веса в (4), вводя поправочные коэффициенты:

$$a_i = \delta_i C_p^i / (2^p - 1) , \tag{15}$$

где $i = 1, 2, ..., p$, δ_i – рациональные числа. Получаем уравнение

$$\delta_1 C_p^1 + \delta_2 C_p^2 + ... + \delta_p C_p^p = 2^p - 1 . \tag{16}$$

При этом одновременно

$$C_p^1 + C_p^2 + ... + C_p^p = 2^p - 1 . \tag{17}$$

Вычитая (17) из (16), имеем уравнение

$$C_p^1(\delta_1 - 1) + C_p^2(\delta_2 - 1) + ... + C_p^p(\delta_p - 1) = 0 . \tag{16a}$$

Его очевидным решением является $\delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_p = 1$, и мы приходим к первому случаю, рассмотренному выше, для которого справедливость теоремы Ферма установлена. Покажем, что других рациональных решений уравнение (16a) не имеет. В уравнении (16a) все δ_i выражаются через величины δ_1 и δ_2 (см. ниже). Одну из этих независимых величин можно выбрать произвольно. Положим в дальнейшем $\delta_1 = 1$, что облегчает расчеты, не снижая общности (изменение δ_1 на рациональное число приводит к сдвигу корня на рациональное число, не меняя класса решений). Тогда (16a) принимает вид

$$F_p(\delta) = C_p^2(\delta_2 - 1) + ... + C_p^p(\delta_p - 1) = 0 . \tag{16б}$$

Имеем следующие соотношения для введенных выше величин:

$$n - m = \delta_1 x / (2^p - 1) , \tag{18}$$

$$n^2 - m^2 = \delta_2 x^2 / (2^p - 1) , \tag{19}$$

$$n^3 - m^3 = \delta_3 x^3 / (2^p - 1) ,…, \tag{20}$$

$$n^p - m^p = \delta_p x^p / (2^p - 1) . \tag{21}$$

Сопоставляя (18) и (19), находим

$$n+m=x\delta_2/\delta_1 . \quad (22)$$

Вместо (12), (13) имеем соответственно

$$n=\frac{1}{2}[\delta_2/\delta_1+\delta_1/(2^p-1)]x . \quad (12а)$$

$$m=\frac{1}{2}[\delta_2/\delta_1-\delta_1/(2^p-1)]x . \quad (13а)$$

Вместо (9а), (11) получаем

$$n^2+nm+m^2=x^2\delta_3/\delta_1 . \quad (9б)$$

$$n^{p-1}+n^{p-2}m+...+nm^{p-2}+m^{p-1}=x^{p-1}\delta_p/\delta_1 . \quad (11а)$$

Все остальные δ_i выражаются через δ_1 и δ_2/δ_1. В частности,

$$\delta_3/\delta_1=\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\delta_1}{2^3-1}\right)^2\right\}, \quad (23)$$

$$\delta_4/\delta_1=\left\{\frac{4}{8}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^3+\frac{4}{8}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\left(\frac{\delta_1}{2^4-1}\right)^2\right\}. \quad (23а)$$

В общем случае имеем для нечетных p

$$\delta_p/\delta_1=\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{i=p-1}^{0}C_p^i\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^i\left(\frac{\delta_1}{2^p-1}\right)^{p-1-i}, \quad (24)$$

где $p=2k+1$, $k=1,2,....$, а индекс i пробегает значения $(p-1)$, $(p-1)-2$, $(p-1)-4$ и т.д. до 0. Для четных p имеем

$$\delta_p/\delta_1=\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{i=p-1}^{1}C_p^i\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^i\left(\frac{\delta_1}{2^p-1}\right)^{p-1-i}, \quad (25)$$

где $p=2k+2$, $k=1,2,....$, а индекс i пробегает значения $(p-1)$, $(p-1)-2$, $(p-1)-4$ и т.д. до 1. Соотношения (24), (25) имеют вид биномиального разложения $(a+b)^p$, где $a=\frac{\delta_2}{\delta_1}$, $b=\frac{\delta_1}{2^p-1}$, в котором часть членов сокращается. При нечетном p остаются только члены с четными степенями величины δ_2/δ_1, а при четном p – только с нечетными степенями величины δ_2/δ_1. Отметим, что если в (25) вынести за знак суммы величину δ_2/δ_1, то (25) будет содержать те же степени, что и (24), но с другими коэффициентами. Главный вклад дает первый член, остальные члены пренебрежимо малы и стремятся к 0 при $p\to\infty$. Таким образом, при фиксированном p величины δ_i, где $i=3,...,p$ (мы положили $\delta_1=1$), изменяются монотонно с δ_2. За счет выбора δ_2 можно обеспечить выполнение одного из условий при произвольном p: $\delta_p<1$ или $\delta_p>1$. Первое условие выполняется при $\delta_2<2/(p)^{1/(p-1)}$, а второе – при $\delta_2>2/(p)^{1/(p-1)}$ (сдвиг за счет остаточных членов в данном случае несуществен). Примем для определенности, что $\delta_2>1$. Видно, что величина $2/(p)^{1/(p-1)}$, как функция p, не является рациональным числом ни при каком натуральном конечном $p>2$, монотонно возрастая от $2/\sqrt{3}$ при $p=3$ до 2 при $p\to\infty$ (при $p=2$ эта величина равна 1). Отметим, что коэффициенты в (16б) при $\delta_2>1$ имеют всего одну перемену знака, поэтому уравнение (16б) имеет один положительный действительный корень. Ясно, что решения уравнения (16б) находятся в узком открытом интервале от 1 до 2, мало отличаясь от 1. Докажем методом математической индукции, что корень уравнения (16б) не является рациональным числом. Расчеты для $p=3$ выполняются непосредственно. Из (16б) имеем

$$3(\delta_2-1)+(\delta_3-1)=0 , \quad (16в)$$

а с другой стороны из (23) или из (24) при $p=3$ получаем

$$\delta_3=\frac{3}{4}\delta_2^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^3-1}\right)^2 . \quad (24а)$$

Решая (24а) и (16в) совместно относительно δ_2, убеждаемся, что решение δ_2 не является рациональным числом. Расчеты дают $\delta_2=-2\pm\sqrt{457}/7$ (приближенное значение положительного корня равно 1,057). Подстановкой точного положительного значения корня в уравнение (3) убеждаемся, что оно выполняется. Аналогично, для $p=4$, решая кубическое уравнение относительно δ_2, получаем, что оно не имеет рациональных корней. Более подробно: положительный действительный корень равен $\delta_2 = \sqrt[3]{B+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{B-\sqrt{D}} - 2$ (приближенное значение положительного корня равно 1,097), где $B = 15 + 1/15^2 - 1/49$, $D = \left(\frac{1}{3\cdot 15^2}\right)^3 + \left(15 + 1/15^2 - 1/49\right)^2$. Подстановкой точного значения корня в уравнение (3) убеждаемся, что оно выполняется. Докажем, что уравнение (16б) не имеет рациональных корней при любом $p > 2$. Предположим противное, что при $p = k$ уравнение (16б) имеет рациональный корень δ_2^*, т.е. $F_k(\delta_2^*) = 0$. Положим $p = k+1$, и пусть δ_2^{**} – корень уравнения (16б), т.е. $F_{k+1}(\delta_2^{**}) = 0$. Покажем, что при нашем предположении относительно δ_2^* корень δ_2^{**} также рациональный. Рассмотрим разность $F_{k+1}(\delta_2^{**}) - F_k(\delta_2^*) = 0$. Ее можно представить в виде

$$F_{k+1}(\delta_2^{**}) - F_k(\delta_2^*) = \sum_{i=2}^{k} C_{k+1}^i(\delta_i^{**} - \delta_i^*) + \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i(\delta_{i+1}^* - 1) + (\delta_{k+1}^{**} - 1) = 0 . \quad (26)$$

Отметим, что значение δ_2^{**} должно увеличиться по сравнению с δ_2^*, чтобы компенсировать отрицательный вклад от $(\delta_{k+1} - 1)$ в (16б). Допустим, что корень δ_2^{**} не является рациональным, т.е. содержит иррациональную часть. Тогда (26) запишется в виде

$$F_{k+1}(\delta_2^{**}) - F_k(\delta_2^*) = U + V = 0 , \quad (26а)$$

где U – рациональная часть, а V – иррациональная. Вклад в величину V дают только члены в первой сумме, содержащие δ_2^{**}. V можно представить в виде $V = a_1u^{1/k} + a_2u^{2/k} + ... + a_{k-1}u^{(k-1)/k}$, где u – некоторое действительное число, причем числа в показателях степени не являются целыми. Из (26а) следует, что должны одновременно выполняться равенства $U = 0$ и $V = 0$. Но это невозможно, так как число $(\delta_{k+1}^{**} - 1)$ должно быть рациональным по (21), вторая сумма – также рациональное число, δ_2^* – рациональное число, а в первой сумме $\delta_2^{**} > \delta_2^* > 0$, т.е. равенство (26а) не выполняется. Следовательно, чтобы (26а) выполнялось, корни δ_2^* и δ_2^{**} должны быть одного класса, т.е. оба рациональные или оба нерациональные. Так как при $p = 3$ и $p = 4$ корни не являются рациональными, как показано выше, то можно заключить, что уравнение (16б) не имеет рациональных корней при $p > 2$. Мы выше приняли, что $\delta_2 > 1$. Посмотрим, что будет при другом выборе δ_2. Положим $0 < \delta_2 < 1$ (при $\delta_2 = 1$ мы снова приходим к уже рассмотренному первому случаю). Тогда все величины в (16б) меньше 1, и компенсация положительных и отрицательных слагаемых невозможна. Величина δ_2 не может быть также меньше или равна 0, что следует из (18) и (22), поэтому этот случай не рассматривается. Таким образом, сделанный выбор весов невозможен, и уравнение (16б), а значит и (16), не имеет рациональных решений, отличных от 1, что соответствует первому случаю, для которого справедливость теоремы Ферма установлена. Отметим, что для $p = 2$ величина $2/(p)^{1/(p-1)}$ равна 1, и имеется осмысленное решение $\delta_2 = \delta_1 = 1$.

Случай 3. Вернемся к уравнению (16а) и рассмотрим еще один случай, изменив нормировку, а именно положив

$$\delta_1 C_p^1 + \delta_2 C_p^2 + ... + \delta_p C_p^p = (2^p - 1)\delta , \quad (27)$$

где все δ_i и δ – рациональные числа. Введением новых переменных $\gamma_i = \delta_i / \delta$ мы приводим задачу ко второму случаю. Все γ_i выражаются через γ_1, γ_2. Ход рассуждений такой же, как во втором случае, и с теми же результатами. Поскольку в рамках нашего подхода мы рассмотрели все возможные случаи назначения весов, и ни один из них не дает рационального решения, то теорема Ферма доказана. Интерес представляет частный случай уравнения (1) при $p = 2$ (квадратное уравнение). Уравнение (16) для весов принимает вид $2\delta_1 + \delta_2 = 3$ и является единственным ограничением, которое на них накладывается. Поэтому рациональные веса δ_1, δ_2 могут выбираться различным образом с известным произволом, что позволяет определить разные семейства решений квадратного уравнения с точностью до умножения или деления всех оснований (x, y, z) исходного уравнения на одно и то же натуральное число. Имеем следующие семейства решений: $\{3,4,5\}$ при $\delta_1 = \delta_2 = 1$; $\{5,12,13\}$ при $\delta_1 = 3/5, \delta_2 = 9/5$; $\{8,15,17\}$ при $\delta_1 = 3/4, \delta_2 = 3/2$; $\{7,24,25\}$ при $\delta_1 = 3/7, \delta_2 = 15/7$; $\{12,35,37\}$ при $\delta_1 = 1/2, \delta_2 = 2$; $\{20,21,29\}$ при $\delta_1 = 6/5, \delta_2 = 3/5$ и т.д.

Список литературы

1. **Романов В. Н.** Натуральные числа и теорема Ферма // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2014, № 3. С. 151-162.

ABOUT ONE METHOD OF FERMAT'S THEOREM PROOF

Romanov Vadim Nikolaevich, Doctor in Technical Sciences, Professor
National Mineral Resources University (University of Mines)
vromanvpi@mail.ru

This paper proposes a method of Fermat's theorem proof using the expansion of the original equation in series, which is of the form of a weighted additive function that depends on a single argument and parameters. The dependence of the function roots on the choice of weights is studied and the impossibility of the rational choice of weights is shown. Theoretical study is accompanied by calculations explaining the course of proving.

Key words and phrases: theory of numbers; Fermat's theorem; expansion of equation in series; weighted coefficients; real roots of function; problem on least deviation.

УДК 630.161.4
Биологические науки

В работе приводится сравнительная физиологическая характеристика двух сортов озимой пшеницы. Показано, что растения более продуктивного короткостебельного сорта Немчиновская-52 характеризуются, по сравнению с Зарей, повышенными значениями рабочей адсорбирующей поверхности корней, интенсивности поглощения и накопления ионов K^+, концентрации эндогенных цитокининов и хлорофиллов, фотохимической активности хлоропластов, интенсивности фотосинтеза и хлорофиллового индекса. Расширен круг изученных фаз развития растений, физиологических параметров и процессов, обуславливающих повышенную продуктивность короткостебельного сорта.

Ключевые слова и фразы: озимая пшеница; сравнение сортов; продуктивность; короткостебельность; высокостебельность; адсорбирующая поверхность; поглощение и накопление ионов; фотохимическая активность; интенсивность фотосинтеза; цитокинины; гиббереллины; хлорофилловый индекс.

Ростунов Александр Анатольевич, к.б.н., доцент
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Арзамасский филиал
tatyana.konchina@mail.ru

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДВУХ СОРТОВ ОЗИМОЙ ПШЕНИЦЫ, РАЗЛИЧАЮЩИХСЯ ПО ВЫСОТЕ СТЕБЛЯ И ПРОДУКТИВНОСТИ[©]

В последние десятилетия большое внимание селекционеров уделяется выведению сортов зерновых культур, сочетающих короткостебельность и высокую продуктивность [10, с. 249]. Акцентируются изменения в структуре и функциях фотосинтетического аппарата как признака, учет которого необходим при селекционной работе [10, с. 249; 11, с. 122]. Поэтому одной из научных основ дальнейшего повышения продуктивности сельскохозяйственных культур выступает теория фотосинтетической продуктивности [1, с. 513].

Проведенные в этом направлении исследования с высоко- и короткостебельными сортами оказываются весьма противоречивыми. Рядом авторов на различных культурных растениях более продуктивных короткостебельных сортов отмечается превосходство над высокорослыми формами в фотосинтезе и его составляющих (фотосинтетические пигменты, фотохимическая активность хлоропластов (ФХА), интенсивность фотосинтеза) [2, с. 47; 4, с. 77; 6, с. 65; 7, с. 56; 18, с. 345; 20, с. 897; 25, p. 117]. Однако до настоящего времени о прямой зависимости продуктивности сельскохозяйственных растений от напряженности фотосинтеза и его составных компонентов говорить преждевременно, поскольку в литературе имеются и противоположные данные [12, с. 63; 17, с. 19].

Причины таких расхождений остаются неясными. Относительно небольшой набор культур, используемых в экспериментах различных авторов, неоднозначность полученных данных не дают до сих пор возможности ответить, какие параметры определяют специфичность фотосинтетического аппарата высокопродуктивных сортов. Одной из причин могут являться различия возделывания сортов в разных условиях минерального питания. Широко известно, что сортовые реакции на различное обеспечение элементами минерального питания могут быть разными. В связи с этим, очень важными представляются исследования взаимосвязи между фотосинтетической активностью и продуктивностью культур в зависимости от интенсивности поглощения, накопления и использования минеральных элементов питания и, особенно, такого важного, как калий. Этот элемент активирует ряд ферментов, в том числе, участвующих в процессе фотосинтеза. Показана положительная связь между активностью ряда ферментов и концентрацией K^+ внутри клеток.

Известно, что в регуляции физиологических процессов очень большую роль играет гормональный баланс [15]. В этой связи рядом авторов указывается на необходимость учета концентрации и соотношения
