Широков Лев Васильевич
КЛАСС ПРОСТРАНСТВ L И ЕГО СВОЙСТВА
В статье проводится изучение глобальных и локальных свойств пространств класса . Рассматриваются свойства пространств этого класса, связанные с различного рода кардинальными характеристиками, такими как характер, теснота, вес. Результаты, приведенные в данной работе, существенно дополняют теорию диадических компактов. Доказательство основных результатов настоящей статьи основано на использовании современных математических методов.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2014. № 8 (86). C. 181-183. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2014/8/

УДК 513.83
Физико-математические науки

В статье проводится изучение глобальных и локальных свойств пространств класса L. Рассматриваются свойства пространств этого класса, связанные с различного рода кардинальными характеристиками, такими как характер, теснота, вес. Результаты, приведенные в данной работе, существенно дополняют теорию диадических компактов. Доказательство основных результатов настоящей статьи основано на использовании современных математических методов.

Ключевые слова и фразы: топологическое пространство; непрерывное отображение; тихоновский куб; канторов куб; компакт; экстремально несвязное пространство; характер точки; теснота; суперрасширение.

Широков Лев Васильевич, к. ф.-м. н., доцент
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Арзамасский филиал
Shirokov1954@mail.ru

КЛАСС ПРОСТРАНСТВ L И ЕГО СВОЙСТВА©

В статье проведено всестороннее изучение класса пространств L, введенного автором [8]. Ряд вопросов, связанных с классом L, рассматривался в [4]. Определения всех используемых понятий, терминов и обозначений можно найти в работах [1-4; 6; 8; 13]. В дальнейшем τ_X – топология пространства X. Компакт – компактное хаусдорфово пространство, не обязательно метризуемое. Все пространства предполагаются вполне регулярными.

Определение [9; 10]. Пусть $F \subset X$ и $f : F \to Y$ – сюръективное отображение. Оператор $e : \tau_Y \to \tau_X$ называется регулярным оператором продолжения открытых множеств, если выполняются условия:

1) $e(U) \bigcap F = f^{-1}(U)$ для любого $U \in \tau_Y$;

2) если U_1, $U_2 \in \tau_Y$ и $U_1 \bigcap U_2 = \varnothing$, то $e(U) \bigcap e(V) = \varnothing$.

Отображение $f : F \to Y$, для которого существует регулярный оператор продолжения открытых множеств, называется регулярным.

Одним из расширений класса диадических компактов является класс компактов, являющихся образами подпространств канторовых кубов D^τ относительно регулярных отображений. Класс пространств такого типа обозначается L [8]. Нетрудно заметить, что класс L содержит класс каппа-адических компактов, введенных Е. В. Щепиным, замкнут относительно тихоновских произведений и содержит компакты, являющиеся непрерывными образами всюду плотных подпространств компактов, принадлежащих L.

Нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Утверждение. Если $X \in L$, то $w(X) = \chi(X)$.

Далее λX – суперрасширение пространства X [12].

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. Для любой точки $x \in X \in L$ выполняется $\chi(x, X) = \overline{\pi\chi}(x, \lambda X)$.

Теорема 2. Пусть $x \in X \in L$, $t(x, \lambda X) \le \tau$ и $\omega(X) \le 2^\tau$. Тогда $\chi(x, X) \le \tau$.

По стандартной форме проводится доказательство следующего предложения.

Предложение 1. Если $f : F \to Y$ – регулярное отображение, то существует регулярный оператор продолжения открытых множеств $\tilde{e} : \tau_Y \to \tau_X$, удовлетворяющий условию 3) $\left[\tilde{e}(U) \bigcup \tilde{e}(V)\right]_X = X$ для любых $U, V \in \tau_Y$ таких, что $U \bigcup V = Y$.

Следствие 1. Если $f : F \to Y$ – регулярное отображение и X – экстремально несвязный компакт, то существует непрерывное отображение $\overline{f} : X \to \lambda Y$ такое, что $\overline{f}\,|_F = f$.

Доказательство Теоремы 1. Пусть $F \subset D^\tau = \prod\left\{D_\alpha : \alpha \in A\right\}$, $f : F \to X$ – регулярное отображение на компакт X и $\overline{f} : pD^\tau \to \lambda X$ – непрерывное отображение такое, что $\overline{f}\,|_{\pi^{-1}(F)} = f \circ \pi$ (через π обозначается естественное отображение абсолюта pX пространства X на X [11]). Существование отображения $\overline{f}$ следует из Следствия 1. Для каждого $x \in X$ положим $F_x = \pi(\overline{f}^{-1}(x))$. Пусть $\overline{\pi\chi}(x, \lambda X) \le \tau'$. Покажем, что тогда $\chi(x, X) \le \tau'$. Рассмотрим произвольное элементарное открыто-замкнутое множество $O \subset D^\tau$ такое, что $O\bigcap F_x \neq \varnothing$. Очевидно, $x\in\bar{O}=\bar{f}(\pi^{-1}(O))$. Пусть семейство $\mu=\{U_m : m\in M\}$ является π-базой точки $x\in\bar{O}$ в $\bar{O}$ мощности $\leq\tau'$. Положим

$\bar{\mu}=\left\{\left[\pi^{\#}(\bar{f}^{-1}(U_m)\bigcap\pi^{-1}(O))\right]_{D^{\tau}} : m\in M\right\}$.

Семейство $\bar{\mu}$ – семейство канонически замкнутых подмножеств D^{τ}. Для каждого $m\in M$ через $A_m\subset A$ обозначим счетное индексное множество такое, что канонически замкнутое множество $V_m\in\bar{\mu}$ не зависит от $A\setminus A_m$ [2] и положим $\bar{A}=\left(\bigcup\{A_m : m\in M\}\right)\bigcup A^{*}$, где A^{*} – конечное основание O. Очевидно, мощность множества $\bar{A}\leq\tau'$. Покажем, что множество $O\bigcap F_x$ является накрытием в D^{τ} с основанием $\bar{A}$ [6]. Допустим, что $pr_{A\setminus\bar{A}}(O\bigcap F_x)\neq pr_{A\setminus\bar{A}}(O)$. Выберем в $pr_{A\setminus\bar{A}}(O)$ слой $\bar{\bar{O}}$ с конечным основанием такой, что $\bar{\bar{O}}\bigcap pr_{A\setminus\bar{A}}(O\bigcap F_x)=\varnothing$ и положим $\tilde{O}=\bar{\bar{O}}\times\prod\{D_{\alpha} : \alpha\in\bar{A}\}$. Множество $O'=\bar{f}\left(\pi^{-1}(\tilde{O}\bigcap O)\right)$ является замкнутым подмножеством $\bar{O}$ и не содержит точку $x\in\bar{O}$. Выберем элемент семейства $U_{m'}\in\mu$ такой, что $[U_{m'}]\bigcap O'=\varnothing$. Тогда для множества $V_{m'}\in\bar{\mu}$ не выполняется условие $A_{m'}\subset\bar{A}$ – противоречие. Итак, множество $O\bigcap F_x$ является накрытием в D^{τ} с основанием $\bar{A}$ мощности $\leq\tau'$. Тогда множество $O\bigcap F_x$ содержит слой обобщенного канторова дисконтинуума D^{τ} с основанием мощности $\leq\tau'$ [Там же]. Таким образом, F_x является замыканием объединения слоев с основаниями мощности $\leq\tau'$ и, следовательно, имеет тип $G_{\delta,\tau'}$ в D^{τ} [2]. Пусть $F_x=\bigcap\{U_{\beta} : \beta\in B\}$, где все U_{β} открыты в D^{τ}, и мощность множества B не превосходит τ'. Тогда

$x=\bigcap\left\{\bar{f}^{\#}(\pi^{-1}(U_{\beta})) : \beta\in B\right\}$,

а это и означает, что $\chi(x,X)\leq\tau'$. Теорема доказана.

Доказательство следующих утверждений основано на свойствах топологических произведений и экстремально несвязных пространств.

Предложение 2. Если компакт X является образом подпространства канторова куба относительно регулярного отображения, то X является образом подпространства канторова куба $D^{\omega(X)}$ относительно регулярного отображения.

Предложение 3. Если $f : F\to Y$ – регулярное отображение и X – экстремально несвязный компакт, содержащий F, то существует непрерывное отображение $\bar{f} : X\to\lambda Y$ такое, что $\bar{f}\,|_F=f$.

Доказательство Теоремы 2. Пусть $F\subset D^{\tau^{*}}=\prod\{D_{\alpha} : \alpha\in A\}$, $f : F\to X$ – регулярное отображение на компакт X и $\bar{f} : pD^{\tau^{*}}\to\lambda X$ – непрерывное отображение такое, что $\bar{f}\,|_{\pi^{-1}(F)}=f\circ\pi$ (через π, как и при доказательстве Теоремы 1, обозначается естественное отображение абсолюта pX пространства X на X). Существование отображения $\bar{f}$ следует из Предложения 3. В силу Предложения 2 можно считать, что $\tau^{*}=2^{\tau}$. Положим $F_x=\pi(\bar{f}^{-1}(x))$. Покажем, что $\chi(x,X)\leq\tau$. Рассмотрим произвольное элементарное открыто-замкнутое множество $O\subset D^{\tau^{*}}$ такое, что $O\bigcap F_x\neq\varnothing$. Очевидно, что $x\in O'=\bar{f}(\pi^{-1}(O))$. По теореме Хьюитта – Марчевского – Пондицери [11] выполняется $d(O)\leq\tau$, то есть существует множество $M=\{x^{t} : t\in T\}$ мощности $\leq\tau$ всюду плотное в O ($x^{t}=(x^{t}_{\alpha})$). Положим $\sum^{t}_{\tau}=\left\{x=(x_{\alpha})\in O : \left|\{\alpha\in A : x_{\alpha}\neq x^{t}_{\alpha}\}\right|\leq\tau\right\}$ и $P_t=\bar{f}(\pi^{-1}(\sum^{t}_{\tau}))$ для каждого $t\in T$. Ясно, что для любого $t\in T$ замыкание множества P_t совпадает с множеством O' и, следовательно, x является предельной точкой множества P_t. В силу свойств $\sum^{t}_{\tau}$ и условия $t(x,\lambda X)\leq\tau$ точка x принадлежит множеству P_t для любого $t\in T$. Для каждого $t\in T$ выберем точку $z^{t}\in F_x\cap\Sigma^{t}_{\tau}$ и положим $A^{t}=\{\alpha\in A : pr_{\alpha}(z^{t})\neq pr_{\alpha}(x^{t})\}$. Тогда мощность множества $A^{*}=\bigcup\{A^{t} : t\in T\}\bigcup A_O$ не превосходит τ, где A_O – конечное подмножество A такое, что множество O не зависит от множества $A\setminus A_O$. Так как множество $pr_{A\setminus A^{*}}(M)$ всюду плотно в $pr_{A\setminus A^{*}}(O)$, то $pr_{A\setminus A^{*}}(F_x\cap O)=pr_{A\setminus A^{*}}(O)$, то есть множество $F_x\cap O$ является накрытием грани $D_{A\setminus A^{*}}$ пространства $D^{\tau^{*}}$ с основанием A^{*} мощности $\leq\tau$. Тогда существует слой $H^{i(v)}_{v}$ с основанием v мощности $\leq\tau$, лежащий в $F_x\cap O$ [6]. Так как элементарное открытое множество O было выбрано произвольно, то существует множество $F'_x \subset F_x$, являющееся объединением множеств типа $G_{\delta,\tau}$ в D^{τ^*} такое, что $[F'_x]_{D^{\tau^*}} = F_x$, а это означает, что множество F_x имеет тип $G_{\delta,\tau}$ в D^{τ^*} [2].

Пусть $F_x = \bigcap\{U_\beta : \beta \in B\}$, где все U_β открыты в D^{τ^*}, и мощность множества B не превосходит τ. Тогда $x = \bigcap\{\bar{f}^{\#}(\pi^{-1}(U_\beta)) : \beta \in B\} \bigcap X$, а так как в компактах псевдохарактер точек совпадает с их характером, то $\chi(x, X) \le \tau$. Теорема доказана.

Замечание. Естественным образом (с учетом результатов [5] и необходимых ограничений, накладываемых на пространства и отображения) полученные результаты переносятся на образы подпространств пределов обратных спектров с открытыми проекциями относительно регулярных отображений.

Список литературы

1. **Архангельский А. В.** Об отображениях всюду плотных подпространств топологических произведений // Доклады АН СССР. 1971. Т. 197. № 4. С. 750-753.
2. **Ефимов Б. А.** Диадические бикомпакты // Труды Московского математического общества. 1965. Т. 14. С. 211-247.
3. **Трухманов В. Б.** Подпрямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13. № 3. С. 209-221.
4. **Успенский В. В.** Топологические группы и компакты Дугунджи // Математический сборник. 1989. Т. 180. № 8. С. 1092-1118.
5. **Широков Л. В.** Внешняя характеристика пространств Дугунджи и $\aleph$-метризуемых бикомпактов // Доклады АН СССР. 1982. Т. 263. № 5. С. 1073-1077.
6. **Широков Л. В.** О некотором расширении класса диадических бикомпактов / деп. в ВИНИТИ 19 июня 1981 г. № 2945-81. Деп.
7. **Широков Л. В.** О продолжении непрерывных отображений и аппроксимативной связности // Проблемы современной науки. 2013. Вып. 9. С. 3-9.
8. **Широков Л. В.** О регулярных отображениях подпространств топологических произведений // Бакинская международная топологическая конференция (3-9 октября 1987 г.): тезисы. Баку: Коммунист, 1987. Ч. 2.
9. **Широков Л. В.** О $AE(n)$-бикомпактах // Известия РАН. 1992. Т. 56. № 6. С. 1316-1327.
10. **Широков Л. В.** О $AE(n)$-бикомпактах и n-мягких отображениях // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 33. № 2. С. 151-156.
11. **Engelking R.** General Topology. Warszawa: PWN, 1977. 626 p.
12. **Groot J. de** Superextension and Supercompactness // On Extension Theory of Topological Structures and Its Applications: proceedings of international symposium. Berlin, 1969. P. 89-90.
13. **Trukhmanov V. B.** On Subdirect Sums of Abelian Torsion-Free Groups of Rank 1 // Journal of Mathematical Sciences. 2008. Vol. 154. № 3. P. 422-429.

CLASS *L* OF SPACES AND ITS PROPERTIES

Shirokov Lev Vasil'evich, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (Branch) in Arzamas
Shirokov1954@mail.ru

The article carries out the study of the global and local properties of the spaces of class *L*. The author considers the properties of this class spaces connected with various types of cardinal characteristics such as character, narrowness, weight. The results shown in this paper are an essential addition to the theory of dyadic compacts. The proof of the main results of this article is based on the use of modern mathematical methods.

Key words and phrases: topological space; continuous mapping; Tychonov cube; Cantor cube; compact; extremely disconnected space; character of point; narrowness; superextension.