Для умеренно малых чисел Кнудсена

$$M = \frac{M_0}{1 + 3C_m \mathrm{Kn}},$$

$$C_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{I_2}{I_1} = 1{,}1284 \frac{2-q}{q}$$ – коэффициент изотермического скольжения.

На Рис. 1 приведена зависимость тормозящего момента $M\left(1+6\mathrm{Kn}\right)/M_0$ от величины $\left(1+\mathrm{Kn}\right)^{-1}$. Выбор осей обусловлен необходимостью детализации результатов [5]. Верхний график соответствует q=1, далее q= 0,9; 0,8. На Рис. 2 представлено сравнение с результатами других авторов. В работе [Ibidem] вычисления проведены методом постановки новых граничных условий для уравнений Навье – Стокса. В работе [7] применен численный метод.

Список литературы

1. **Поддоскин А. Б., Юшканов А. А.** Вращение сферы в неограниченном газе // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 165-171.
2. **Смирнов Л. П., Чекалов В. В.** Медленное вращение сферы в ограниченном объёме разреженного газа // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1978. № 4. С. 117-124.
3. **Ферцигер Дж., Капер Г.** Математическая теория процессов переноса в газах / пер. с англ. Д. Н. Зубарева и А. Г. Башкирова. М.: Мир, 1976. 554 с.
4. **Черчиньяни К.** Теория и приложения уравнения Больцмана / пер. с англ. под ред. Р. Г. Баранцева. М.: Мир, 1978. 495 с.
5. **Cercignani C., Tironi G.** Some Applications to the Transition Regime of a New Set of Boundary Conditions for Navier – Stokes Equations // Rarefied Gas Dynamics. N. Y.: Academic Press, 1969. Vol. 1. P. 281-290.
6. **Lees L.** Kinetic Theory Description of Rarefied Gas Flow // Journal of Society of Industrial and Applied Mathematics. 1965. Vol. 13. № 1. P. 278-311.
7. **Loyalka S. K.** Motion of a Sphere in a Gas: Numerical Solution of the Linearized Boltzmann Equation // Physics of Fluids. 1992. Vol. 4. № 5. P. 1049-1056.

ON ISSUE OF SPHERE ROTATION IN RAREFIED GAS AT ARBITRARY KNUDSEN NUMBERS

Mayasov Evgenii Gabrielevich
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (Branch) in Arzamas
eugenemay@yandex.ru

At arbitrary Knudsen numbers the moment of resistance force acting in rarefied gas on slowly rotating sphere was calculated. The analysis is conducted on the basis of the solution of linearized Boltzmann equation with exact collision integral by moment method for gas molecules interacting as hard spheres. Boundary condition on sphere surface is put in general terms. Comparison with results obtained previously by other methods was carried out.

Key words and phrases: kinetic equation; collision integral; transitional regime; Knudsen number; distribution function; moment method; resistance force moment; integral brackets.

УДК 533.72
Физико-математические науки

В статье разработана схема численного решения линейных краевых задач математической теории неоднородных газов при произвольных числах Кнудсена. Анализ основан на решении линеаризованного уравнения Больцмана в форме Чепмена – Энскога методом симметричных моментов, являющимся обобщением метода полупространственных моментов. Представленная методика позволяет свести краевую задачу к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями. В качестве примера разобрана задача о вращении сферы в разреженном газе.

Ключевые слова и фразы: кинетическое уравнение Больцмана; модель Бхатнагара – Гросса – Крука (БГК); переходный режим; число Кнудсена; функция распределения; моментные методы.

Маясов Евгений Габриелевич
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (филиал) в г. Арзамасе
eugenemay@yandex.ru

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ©

При аналитическом решении задач газокинетической теории широко применяются различные варианты моментных методов. В переходном по числу Кнудсена режиме основным является метод Лиза и его модификации [2; 3; 8]. При этом напрямую учитывается разрывность функции распределения как следствие влияния обтекаемой газом поверхности, но при составлении моментных уравнений используются непрерывные функции (или наоборот [2]). Достаточно грубое полиномиальное приближение позволяет получать удовлетворительные результаты для макропараметров. Однако реальная картина распределения потоков массы, тепла и импульса сильно искажается. Например, при удалении от обтекаемой поверхности потоки сосредотачиваются в сужающемся конусе влияния поверхности.

Метод полупространственных моментов хорошо зарекомендовал себя в области малых и умеренно малых чисел Кнудсена. Автор проанализировал возможность применения этого подхода при любых числах Кнудсена к задаче о вращении сферы. Для моментных уравнений удалось получить аналитическое решение, однако тормозящий момент в свободномолекулярном режиме оказался завышенным в два раза. Наиболее логичным и естественным является симметричный метод как обобщение метода полупространственных моментов на произвольные числа Кнудсена: в аппроксимации функции и при составлении моментных уравнений в качестве полиномов используется один и тот же набор разрывных функций скорости молекул газа. При этом получаются сложные моментные уравнения, аналитическое решение которых вряд ли возможно. Тем не менее, представляет интерес численный анализ. Основная трудность заключается в том, что приходится решать краевую задачу на полубесконечном промежутке и соответствующими методами (например, методом стрельбы) отсеивать растущие на бесконечности решения. Предлагаемая схема позволяет свести решение к задаче Коши на единичном отрезке с нулевыми начальными условиями. Для иллюстрации метода рассмотрим задачу о вращении сферы.

Пусть сфера радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω в неограниченном объёме изотермического разреженного газа. Температура газа T. Линейная скорость точек поверхности сферы много меньше тепловой скорости молекул газа и выполняется условие линеаризации

$$g\omega R \ll 1;\ \ g = \left(2kT/m\right)^{-1/2},$$

где m – масса молекулы газа, k – постоянная Больцмана. Введём сферическую систему координат r, θ, φ. Начало системы координат совместим с центром сферы, полярную ось $\theta = 0$ направим по оси вращения вдоль вектора угловой скорости.

Движение окружающего сферу газа описывается стационарным кинетическим уравнением Больцмана:

$$\mathbf{v}\nabla f = J(f). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ – скорость молекул, f – функция распределения, J – интеграл столкновений [4]. Введём обозначения: $f_0 = n\left(m/2\pi kT\right)^{3/2}\exp(-c^2)$ – равновесная функция распределения, n – концентрация молекул, $\mathbf{c}$=g$\mathbf{v}$ – безразмерная молекулярная скорость, $\eta = \lambda n\left(2mkT/\pi\right)^{1/2}$ – коэффициент вязкости, λ – средняя длина свободного пробега молекул газа. Функцию распределения будем искать в виде

$$f = f_0\left(1 + 2c_\varphi G_\varphi + \psi + \Phi\right), \tag{2}$$

где G_φ – безразмерная гидродинамическая скорость течения газа, ψ – функция Чепмена – Энскога [Там же], $\Phi(r,\mathbf{c})$ – поправка к ней, учитывающая влияние поверхности.

$$\psi = -bc_r c_\varphi P_{r\varphi}, \tag{3}$$

где $P_{r\varphi}$ – безразмерный компонент тензора напряжений. Для молекул – твердых шаров коэффициент $b = 4/\sqrt{\pi}$. Макроскопическое поле скоростей вдали от поверхности находится путем решения линеаризованных уравнений Навье – Стокса и неразрывности [1]:

$$G_\varphi = AR^2 r^{-2}\sin\theta,\ G_r = G_\theta = 0,$$

$$P_{r\varphi} = -\frac{3AR^2\lambda}{r^3}\sin\theta,$$

где A – константа, которую необходимо найти из граничных условий на поверхности. Линеаризованный интеграл столкновений представим в форме модели БГК с параметром ν=2/b [5]. Можно решать задачу с точным интегралом столкновений, но тогда необходим приближенный расчет интегральных скобок [4]. Уравнение для функции Ф принимает вид:

$$\mathbf{c}\nabla\Phi = I\left(\Phi\right) - \mathbf{c}\nabla\psi, \tag{4}$$

$$I\left(\Phi\right) = \nu\lambda^{-1}\left(2\pi^{-3/2}c_\varphi\int c_\varphi\Phi\exp\left(-c^2\right)d\mathbf{c} - \Phi\right).$$

Поправку Ф будем искать в виде:

$$\Phi = \left(b_1^+ + b_1^-\chi\right)c_\varphi\sin\theta + \left(b_2^+ + b_2^-\chi\right)c_r c_\varphi\sin\theta, \tag{5}$$

где $b_i^\pm = b_i^\pm\left(r\right)$, $\chi = \operatorname{sgn}\left(\xi\right)$, $\xi = \dfrac{c_r}{c} - \sqrt{1 - R^2/r^2}$, $\operatorname{sgn}\xi$ – знаковая функция, учитывающая наличие конуса влияния поверхности на функцию распределения молекул газа.

Подстановка (5) в (4) с последующим умножением на $c_\varphi \exp\left(-c^2\right)$ и $c_r c_\varphi \exp\left(-c^2\right)$ и интегрированием по пространству скоростей приводит к моментным уравнениям. Обозначим: $x = \dfrac{R}{r}$, $\varepsilon = \dfrac{R}{\lambda} = \mathrm{Kn}^{-1}$ – обратное число Кнудсена, $a_1^{\pm}(x) = x b_1^{\pm}(x)$, $a_2^{\pm}(x) = b_2^{\pm}(x)$, $\gamma(x) = \left(1 - x^2\right)^{1/2}$.

Моментные уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{dx}\left(2x^3 a_1^- + \sqrt{\pi} a_2^+ - \left(3x^2+2\right)\gamma^3 a_2^-\right) = 0, \tag{6}$$

$$x^4 \frac{d}{dx} a_1^+ + \sqrt{\pi} x\left(3x^2+2\right)\gamma^3 \frac{d}{dx} a_2^+ - 2\sqrt{\pi}\frac{d}{dx} a_2^- - 3\sqrt{\pi}\left(2x^4 + x^2 + 2\right)\gamma a_2^+ + 6\sqrt{\pi} a_2^- =$$
$$= -\nu\varepsilon\left(\sqrt{\pi} x^2\left(x^2+3\right) a_1^- + 4x^3 a_2^+ + 2x^3\left(x^2+2\right)\gamma a_2^-\right) - 45\sqrt{\pi} A b \varepsilon^{-1} x^7 \gamma, \tag{7}$$

$$-2\sqrt{\pi} x \frac{d}{dx} a_1^+ + \sqrt{\pi} x\left(3x^2+2\right)\gamma^3 \frac{d}{dx} a_1^- + 4x^6\left(2x^2-3\right)\frac{d}{dx} a_2^- + 4x^5\left(4x^2-3\right) a_2^- = 0, \tag{8}$$

$$\sqrt{\pi} x\left(3x^2+2\right)\gamma^3 \frac{d}{dx} a_1^+ - 2\sqrt{\pi} x \frac{d}{dx} a_1^- + 4x^6\left(2x^2-3\right)\frac{d}{dx} a_2^+ + 4x^5\left(4x^2-3\right) a_2^+ =$$
$$= \nu\varepsilon\left(-2x^3\left(x^2+2\right)\gamma a_1^- + \sqrt{\pi}\left(3x^2+2\right)\gamma^3 a_2^+ + 2\sqrt{\pi} x\left(2\pi^{-1} x^7 - 1\right) a_2^-\right) + 24 A b \varepsilon^{-1} x^8\left(5x^2-6\right). \tag{9}$$

Анализ показывает, что убывающее на бесконечности решение системы (6-9) имеет вид:

$$a_i^{\pm}(x) = A q_i^{\pm}(x) + B p_i^{\pm}(x),$$

где $p_i^{\pm}(x)$ – частное решение однородной системы, $q_i^{\pm}(x)$ – частное решение неоднородной системы при A=1, B – постоянная интегрирования.

Граничное условие на поверхности можно рассматривать в общем виде [5], но в данной работе ограничимся диффузным отражением молекул газа от поверхности с равным единице коэффициентом аккомодации тангенциальной составляющей импульса:

при $x = 1$

$$2Ac_\varphi + 3Ab\varepsilon^{-1} c_r c_\varphi + \left(AQ_1 + BP_1\right)c_\varphi + \left(AQ_2 + BP_2\right)c_r c_\varphi = 2g\omega R c_\varphi, \tag{10}$$

где $P_i = p_i^+(1) + p_i^-(1)$, $Q_i = q_i^+(1) + q_i^-(1)$.

Граничные условия необходимо представить в моментной форме. Для этого выражение (10) умножается на c_φ и $c_r c_\varphi$ с последующим интегрированием по полупространству $c_r > 0$. Из полученной системы уравнений находится постоянная A:

$$A = \frac{2g\omega R P_2}{\left(2 + Q_1\right)P_2 - \left(\dfrac{12}{\varepsilon\sqrt{\pi}} + Q_2\right)P_1}. \tag{11}$$

Для однозначного нахождения констант следует добавить условие

$$p_i^{\pm}(0) = q_i^{\pm}(0) = 0, \tag{12}$$

которое автоматически отсекает возрастающие на бесконечности решения.

Момент силы сопротивления, действующий со стороны газа на сферу, равен:

$$M = -m\int v_r v_\varphi f d\mathbf{v} = -4\pi A b \lambda R^2 n k T. \tag{13}$$

Анализ выражений (11-13) приводит к следующей вычислительной схеме:

1. Решается задача Коши для однородной системы (6-9) при A=0 с нулевыми начальными условиями (12) (например, методом Рунге – Кутта).
2. Решается задача Коши для неоднородной системы (6-9) при A=1 с нулевыми начальными условиями (12).
3. В конечном итоге представляют интерес значения функций $p_i^{\pm}(1)$ и $q_i^{\pm}(1)$.
4. По формулам (11) и (13) вычисляется тормозящий момент на сфере.

Контроль точности реализации алгоритма можно производить, принимая во внимание то, что уравнение (6), выражающее закон сохранения потока импульса, интегрируется, причем постоянную интегрирования следует положить равной нулю, так как поправка Ф должна убывать быстрее функции Чепмена – Энскога:

$$2x^3 a_1^- + \sqrt{\pi} a_2^+ - \left(3x^2+2\right)\gamma^3 a_2^- = 0.$$

Кроме того, плоская задача (Kn=0) легко решается аналитически, что также позволяет осуществлять проверку при малых числах Кнудсена. В гидродинамическом режиме (Kn→0) должен получаться классический результат [1]:

$$M = -8\pi\eta\omega R^3,$$

при Kn→∞ (свободномолекулярный режим)

$$M_\infty = -\frac{4}{3} n\omega R^4\left(2\pi m k T\right)^{1/2}.$$

Список литературы

1. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
2. **Савков С. А., Юшканов А. А.** Модификация метода Лиза в приложении к вычислению потока тепла от сферической частицы при произвольных числах Кнудсена // Прикладная механика и техническая физика. 1996. Т. 37. № 1. С. 57-63.
3. **Савков С. А., Юшканов А. А., Яламов Ю. И.** К вопросу о вычислении потока тепла от сферической частицы при произвольных числах Кнудсена // Теплофизика высоких температур. 1994. Т. 32. № 4. С. 554-557.
4. **Ферцигер Дж., Капер Г.** Математическая теория процессов переноса в газах / пер. с англ. Д. Н. Зубарева и А. Г. Башкирова. М.: Мир, 1976. 554 с.
5. **Черчиньяни К.** Теория и приложения уравнения Больцмана / пер. с англ. под ред. Р. Г. Баранцева. М.: Мир, 1978. 495 с.
6. **Bhathnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A.** A Model for Collision Processes in Gases // Physical Review. 1954. Vol. 94. № 3. P. 511-525.
7. **Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S.** Boundary Value Problems in Kinetic Theory of Gases // Annals of Physics. 1957. Vol. 1. № 2. P. 141-167.
8. **Lees L.** Kinetic Theory Description of Rarefied Gas Flow // Journal of Society of Industrial and Applied Mathematics. 1965. Vol. 13. № 1. P. 278-311.

METHOD OF COMPUTATIONAL SOLUTION OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF KINETIC THEORY OF RAREFIED GASES

Mayasov Evgenii Gabrielevich
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (Branch) in Arzamas
eugenemay@yandex.ru

In the article the scheme of the computational solution of the linear boundary-value problems of the mathematical theory of rarefied gases with arbitrary Knudsen numbers is worked out. The analysis is based on the solution of the linearized equation of Boltzmann in Chapman – Enskog form by the method of symmetrical moments, which are a generalization of the method of semi-spatial moments. The given methods allow reducing the boundary-value problem to Cauchy problem for the system of differential equations with zero initial conditions. The problem about sphere rotation in rarefied gas is solved as an example.

Key words and phrases: Boltzmann kinetic equation; BGK (Bhathnagar – Gross – Krook) model; transient regime; Knudsen number; distribution function; moment methods.

УДК 34
Юридические науки

Статья поднимает вопрос применения института малозначительности в практической деятельности Федеральной службы финансово-бюджетного надзора РФ (Росфиннадзор). Раскрываются основания спора между Росфиннадзором и судами РФ по поводу применения малозначительности. Также автор пытается сделать вывод на основании изложенного материала по данному вопросу.

Ключевые слова и фразы: Росфиннадзор; малозначительность; валютные операции; резидент (нерезидент); уполномоченный банк; Центральный банк РФ; прогноз социально-экономического развития РФ; публично-правовая обязанность.

Медведев Михаил Александрович
Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс, г. Орёл
Misha1989um@rambler.ru

ИНСТИТУТ МАЛОЗНАЧИТЕЛЬНОСТИ В ПРАКТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ РОСФИННАДЗОРА©

В последнее время уровень правосознания граждан увеличивается. Благодаря этому растет и число обращений в суд в целях защиты нарушенных или оспариваемых прав, свобод и законных интересов граждан или организаций.

В связи с развитием административного законодательства и наметившейся тенденцией ужесточения законодателем санкций за административные правонарушения, в деятельности судов общей юрисдикции и арбитражных судов растет количество производств по делам из публичных правоотношений. Вследствие чего, для облегчения работы судей, в их практической деятельности вырабатывается определенная практика рассмотрения и вынесения решений по схожим и однотипным делам. Подобная практика сложилась и в отношении применения института малозначительности к статьям Кодекса об административных правонарушениях [2], в отношении которых Федеральная служба финансово-бюджетного надзора РФ уполномочена рассматривать дела об административных правонарушениях.
