СЫРОМЯСОВ Алексей Олегович

РАСЧЕТ СВЕТОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Зависимость силы света от выбранного направления представляется периодической функцией двух переменных. Для приближенного определения аналитического вида этой зависимости по экспериментальным данным предлагается использовать дискретное преобразование Фурье по двум переменным. Этот метод не требует больших вычислительных затрат и является весьма быстрым. Его работоспособность проверена при расчетах пространственного светораспределения конкретного источника света.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2014/9/34.html

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2014. № 9 (87). C. 127-131. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2014/9/

УДК 519.65:51-74
Физико-математические науки

Зависимость силы света от выбранного направления представляется периодической функцией двух переменных. Для приближенного определения аналитического вида этой зависимости по экспериментальным данным предлагается использовать дискретное преобразование Фурье по двум переменным. Этот метод не требует больших вычислительных затрат и является весьма быстрым. Его работоспособность проверена при расчетах пространственного светораспределения конкретного источника света.

Ключевые слова и фразы: сила света; тригонометрическая аппроксимация; интерполяция; дискретное преобразование Фурье; фотометрические данные.

Сыромясов Алексей Олегович, к. ф.-м. н., доцент
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева
syal1@yandex.ru

РАСЧЕТ СВЕТОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ©

Постановка задачи о расчете светораспределения в пространстве. Светораспределение точечного источника описывается *индикатрисой силы света* $I(\vec{e})$. Это – функция, показывающая зависимость силы света I от направления $\vec{e}$, в котором он излучается.

В пространстве направление может быть задано парой углов в сферической системе координат, начало которой совпадает с изучаемым источником света. В фотометрии вводятся системы (A, α), (B, β) или (C, γ) [1]. Для определенности будем полагать, что используется последняя из них, в которой $C\in[0; 360°]$, $\gamma\in[0; 180°]$. График силы света в сферической системе координат, в которой сама I выступает в роли радиуса, называется *фотометрическим телом* (Рис. 1).

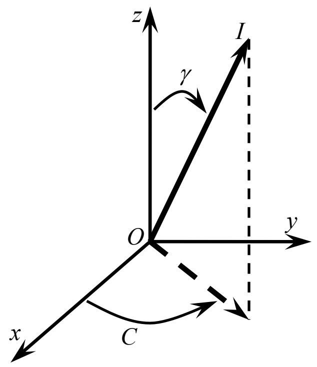

Рис. 1. *Совмещенные сферическая и декартова системы координат*

Важная задача состоит в определении аналитической зависимости $I(\vec{e})$ по экспериментальным данным. Они представляют собой набор чисел

$$i_{kl} = I(C_k, \gamma_l), \tag{1}$$

где C_k и γ_l – величины углов, при которых измерена сила света. Как правило, сетка, накрывающая множество $[0; 360°]\times[0; 180°]$, является равномерной:

$$\begin{aligned} C_k = k\Delta C, k = 0, \ldots, N_C,\ N_C\Delta C = 360°; \\ \gamma_l = l\Delta\gamma, l = 0, \ldots, N_\gamma,\ N_\gamma\Delta\gamma = 180°. \end{aligned} \tag{2}$$

Типичные значения ΔC и $\Delta\gamma$ составляют 5° и 1°, так что $N_C = 72$ и $N_\gamma = 180$.

При поиске $I(C, \gamma)$ логично использовать ее свойства:

1. Функция периодична по каждому из аргументов, ее периоды равны 360°.
2. В силу очевидного равенства $I(C, 360°–\gamma) = I(C, \gamma)$ функция четна по γ при любом значении C.

Итак, следует найти функцию, обладающую перечисленными свойствами, по данным (1), (2).

Проблема тригонометрической аппроксимации силы света в пространстве. Чтобы упрощенно описать светораспределение источника, можно зафиксировать одну из переменных C, γ и исследовать полученную функцию одной переменной. С геометрической точки зрения это означает построение сечения фотометрического тела плоскостью C = const или γ = const.

Из вышесказанного следует, что при фиксированном γ индикатриса силы света раскладывается в ряд Фурье по косинусам и синусам кратных дуг:

$$I_C = \sum_n a_n(\gamma)\cos nC + \sum_n b_n(\gamma)\sin nC, \tag{3a}$$

а при постоянном C в силу четности I – по косинусам кратных дуг:

$$I_\gamma = \sum_m a_m(C)\cos m\gamma. \tag{3b}$$

Имеется N_C измеренных значений угла C, различных по модулю 360° (от 0° до 360°–ΔC); для угла γ это количество составляет N_γ+1 (от 0° до 180°). Поэтому подстановка (1) и (2) в (3a) или (3b) приведет к системе уравнений, из которой можно будет найти не более N_C (соответственно, N_γ+1) первых коэффициентов разложения. Указанная система может быть решена, например, методом Гаусса или наименьших квадратов. Использование последнего корректно даже в случае, когда число базисных функций меньше числа уравнений, и мотивируется тем, что частичная сумма ряда Фурье есть наилучшее среднеквадратичное приближение периодической функции [2].

Метод поиска тригонометрических аппроксимаций функции I на плоскости был реализован в системе *Mathematica* [7] на персональном компьютере с процессором *Intel Core i3* 2,27 ГГц и объемом оперативной памяти 4 ГБ под управлением ОС *Win 7 Home Basic*.

Задача отыскания индикатрисы силы света в пространстве существенно сложнее, чем на плоскости. Объединяя (3a) и (3b), получим, что разложение функции $I(C, \gamma)$ в ряд Фурье имеет вид

$$I = \sum_m \cos m\gamma \sum_n (a_{mn}\cos nC + b_{mn}\sin nC), \tag{4}$$

причем величины a_{mn} и b_{mn} – постоянны.

Из (2) следует, что общее количество условий (1), из которых будут определяться коэффициенты разложения (4), равно $(N_\gamma+1)N_C$. Решение системы с таким количеством линейных уравнений требует большого объема свободной оперативной памяти. Так, при указанных ранее значениях N_C = 72, N_γ = 180 система содержит 13032 уравнения и столько же неизвестных, а ее основная матрица состоит из 13032^2 элементов. Привлечение встроенной функции *ByteCount* позволяет определить, что при использовании системы *Mathematica* одно действительное число занимает в памяти компьютера 24 байта. Таким образом, для хранения одной только основной матрицы системы требуется $13032^2 \times 24$ = 4075992576 байт оперативной памяти, а значит, реализация изложенного ранее алгоритма в системе *Mathematica* на компьютере описанной конфигурации невозможна.

Дополнительной проблемой служит резкий рост трудоемкости задачи при увеличении ее размерности. Так, сложность метода Гаусса составляет $O(N^3)$, где N – число неизвестных, поэтому при переходе от описания светораспределения в плоскости к описанию в пространстве объем вычислений вырастает на 5-6 порядков.

Разумеется, можно воспользоваться компьютером с большим объемом оперативной памяти (у многих современных ПК он составляет 6 ГБ и более). Кроме того, можно отказаться от системы *Mathematica* в пользу более экономичного (в плане требуемых вычислительных ресурсов) средства решения задачи. Так, в языке *Object Pascal*, на котором основана система программирования *Delphi*, представление одного действительного числа требует 10 байт памяти. Большую трудоемкость вычислений можно частично компенсировать, реализуя параллельные алгоритмы счета.

Однако все перечисленные меры не решают проблему до конца. Так, если потребуются более подробные расчеты, и ΔC будет уменьшена до 1°, то N_C вырастет в 5 раз, требуемый объем оперативной памяти – в 5^2, а трудоемкость вычислений – в 5^3 раз, так что использование более мощной ЭВМ может не дать желаемого эффекта. Отказываться от системы *Mathematica* также невыгодно. Во-первых, этот пакет предоставляет мощные средства для решения сложных математических задач и графического отображения результатов вычислений. Во-вторых, он позволяет легко импортировать информацию из файлов *XLS* (программное обеспечение, поставляемое с современными гониофотометрами, сохраняет результаты измерений именно в таком формате).

Из сказанного следует, что для решения задачи о тригонометрической аппроксимации индикатрисы силы света в пространстве желательно применять метод, позволяющий приближенно восстановить периодическую функцию по равенствам (1), (2), но не требующий составления системы уравнений.

Восстановление индикатрисы силы света при помощи дискретного преобразования Фурье. Если дана периодическая последовательность $\{x_k\}$ с периодом N, то к ней можно применить дискретное преобразование Фурье:

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left(-i\frac{2\pi nk}{N}\right). \tag{5a}$$

Здесь k, n, N – целые; x_k и X_n могут быть комплексными.

Исходная последовательность восстанавливается по величинам X_n при помощи обратного преобразования Фурье:

$$x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n \exp\left(i\frac{2\pi nk}{N}\right). \tag{5b}$$

Равенства (5a), (5b) позволяют найти и непрерывную периодическую функцию $x(t)$, занимающую ограниченную полосу частот [4]. Пусть $\{x_k\}$ – последовательность, состоящая из N ее отсчетов, причем временной интервал между соседними отсчетами равен Δt. Тогда замена k на $t/\Delta t$ в (5b) дает

$$x(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} X_n \exp\left(i\frac{2\pi nt}{N\Delta t}\right). \tag{6}$$

Здесь диапазон суммирования изменен для удобства счета: $n_{\min} = -N/2$, $n_{\max} = N/2-1$ при четном N, $n_{\min} = -(N-1)/2$, $n_{\max} = (N-1)/2$ при нечетном N. Для отрицательных n значения X_n находятся из условия периодичности: $X_{N+n} = X_n$.

С помощью указанных соотношений можно восстановить индикатрису силы света на плоскости, если известны измеренные значения силы света $\{i_k\}$.

Если речь идет об отыскании функции I_C (3a), то достаточно применить к последовательности $\{i_k\}$ преобразование (5a), где $N = N_C$. После этого для получения искомой функции в (6) надо положить $t = C$, $\Delta t = \Delta C$.

Алгоритм поиска I_γ (3b) содержит один дополнительный шаг по сравнению с поиском I_C. Так как сила света измеряется при $0° \le \gamma \le 180°$, последовательность $\{i_k\}$ следует продолжить до значения угла $\gamma = 360° - \Delta\gamma$. В силу четности I_γ это продолжение выполняется при помощи равенства

$$i_{N+k} = i_{N-k},\ k = 1,\dots, N-1, \tag{7}$$

где $N = N_\gamma$. После этого общая длина последовательности становится равной $2N_\gamma$, и именно такое значение N должно фигурировать в (6). Понятно, что теперь t в этой формуле следует заменить на γ, Δt на $\Delta\gamma$.

Сила света I принимает действительные значения. Но найденное выражение может содержать и малую по абсолютной величине мнимую часть. Эта погрешность возникает вследствие конечной разрядности представления чисел в ЭВМ (из-за больших объемов входных данных алгоритм не реализуется «вручную»). Поэтому в полученном выражении требуется выделить действительную часть. Именно она и будет искомой функцией I.

Изложенный метод был протестирован на примере светораспределения осветительного прибора СДУ-01-60-001. Найденные аналитические выражения полностью совпали с полученными ранее результатами [5], чем и подтверждается корректность метода.

Дискретное преобразование Фурье обобщается и на функции нескольких переменных [3]. Если последовательность $\{x_{kl}\}$ имеет периоды N, Q (по первому и второму индексу, соответственно), то ее дискретное преобразование Фурье определяется соотношением

$$X_{nm} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{Q-1} x_{kl} \exp\left(-i\frac{2\pi nk}{N}\right)\exp\left(-i\frac{2\pi ml}{Q}\right). \tag{8a}$$

Обратное преобразование описывается с помощью формулы

$$x_{kl} = \frac{1}{NQ}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{Q-1} X_{nm} \exp\left(i\frac{2\pi nk}{N}\right)\exp\left(i\frac{2\pi ml}{Q}\right). \tag{8b}$$

Из (8b) следует, что если бы для искомой нами функции $I(C, \gamma)$ была известна последовательность значений $\{i_{kl}\}$, периодичная по обоим индексам, то получить аналитическое выражение для I можно было бы аналогично (6):

$$I(C,\gamma) = \frac{1}{N_C Q_\gamma}\sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}}\sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} I_{nm} \exp\left(i\frac{2\pi nC}{N_C\Delta C}\right)\exp\left(i\frac{2\pi m\gamma}{Q_\gamma\Delta\gamma}\right).$$

Здесь $Q_\gamma = 360°/\Delta\gamma$ – длина последовательности, периодичной по γ. Очевидно, $Q_\gamma = 2N_\gamma$; периодизация выполняется с помощью (7). Границы суммирования $n_{\min}$, $n_{\max}$, $m_{\min}$, $m_{\max}$ определяются так, как это описано выше. Величины I_{nm} являются результатом преобразования (8a), в которое вместо x_{kl} следует подставить i_{kl}, а вместо N и Q – N_C и Q_γ, соответственно.

Учитывая, что $N_C\Delta C = Q_\gamma\Delta\gamma = 360°$, получим из последнего равенства:

$$I(C,\gamma) = \frac{1}{N_C Q_\gamma}\sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}}\sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} I_{nm} \exp\big(i(nC + m\gamma)\big). \tag{9}$$

Итоговый алгоритм расчета светораспределения в пространстве на основе данных (1), (2) выглядит следующим образом:

1. Четным образом продолжить последовательность $\{i_{kl}\}$ на углы $\gamma > 180°$. Для этого следует использовать соотношения, аналогичные (7).
2. Выполнив дискретное преобразование Фурье (8a), вычислить величины I_{nm}.
3. Найти приближенное аналитическое выражение для I из (9).
4. Выделить в полученном выражении действительную часть.

Дальнейшие действия связаны с упрощением найденного выражения и полностью аналогичны описанным ранее [5]. Поскольку N_C и N_γ велики, частичные суммы рядов (3a), (3b) и (4) получаются громоздкими. При этом большая часть найденных коэффициентов весьма мала, так что соответствующие слагаемые не вносят существенного вклада в общую сумму. Для упрощения выражений следует выбрать «допуск» μ (малое положительное число), найти максимальное измеренное значение силы света M, а далее исключить из рассмотрения все слагаемые, коэффициенты при которых меньше μM. Относительная погрешность аппроксимации рассчитывается по формуле

$$\delta = \max \left| \frac{P(C_k, \gamma_l) - i_{kl}}{i_{kl}} \right|, \qquad (10)$$

где $P(C, \gamma)$ – упрощенное аналитическое выражение I, полученное после отбрасывания малых слагаемых. Максимум вычисляется лишь в том диапазоне углов, где $i_{kl} \geq M/2$.

В настоящее время своеобразным «паспортом» светильника служит описание его светораспределения в формате *IESNA* [6]. Это – текстовый файл, содержащий таблицу значений i_{kl}, а также некоторую дополнительную информацию. Разработанный метод позволяет описывать светораспределение одной формулой, пригодной во всем диапазоне углов C, γ, не перечисляя измеренных величин силы света. В качестве дополнительной информации, прилагаемой к формуле, следует указывать ΔC, $\Delta\gamma$, а также M, μ и δ.

Пример расчета светораспределения в пространстве. Разработанный метод был проверен при поиске индикатрисы силы света уже упомянутого осветительного прибора СДУ-01-60-001. Все измерения были выполнены на гониофотометрическом комплексе GO2000A; шаги изменения углов составили $\Delta C = 5°$, $\Delta\gamma = 1°$. Результаты измерений были сохранены в XLS-файле и импортированы в систему *Mathematica* в виде двумерного массива. Дискретное преобразование Фурье в этом математическом пакете выполняется с помощью встроенной функции *Fourier*. Наибольшее экспериментально найденное значение силы света составило $M = 2730{,}88$ кд.

Ранее при решении задачи на плоскости выбиралось значение допуска $\mu_{2D} = 5 \times 10^{-3}$. Аналитическое выражение индикатрисы силы света в пространстве изначально содержит гораздо большее количество слагаемых (в том числе с малыми коэффициентами), чем на плоскости. Поэтому сохранение μ на прежнем уровне приведет к тому, что из рассмотрения будет исключено слишком большое количество членов разложения, а это повлечет за собой увеличение погрешности. В связи с этим в качестве допуска было выбрано меньшее число – $\mu = 2 \times 10^{-4}$. В результате число слагаемых снизилось с первоначальных 13032 до 337 в итоговом выражении для $P(C, \gamma)$.

На Рис. 2 приведено фотометрическое тело, описанное функцией P, а также эмпирические данные о светораспределении осветительного прибора. Известные точки (C_k, γ_l, i_{kl}) изображены черными кружками. Как видно, предлагаемый метод обеспечивает хорошее качество аппроксимации данных.

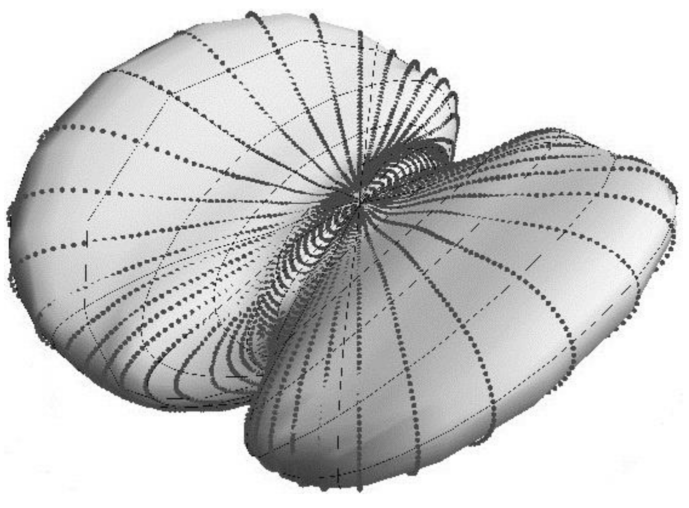

Рис. 2. *Светораспределение осветительного прибора СДУ-01-60-001*

Относительная погрешность, вычисленная по формуле (10), составила 1,7%, что вполне допустимо с точки зрения практики.

В качестве дополнительного теста исследуем поведение найденной функции в плоскостях $\gamma = 90°$, $C = 0°$ и $C = 90°$. При подстановке этих углов в $P(C, \gamma)$ получаются функции одной переменной $P_1(C)$, $P_2(\gamma)$ и $P_3(\gamma)$, соответственно. С точностью до $\mu_{2D}M$ коэффициенты их разложения по тригонометрической системе совпадают с ранее найденными значениями [5], что также подтверждает корректность метода.

Следует отметить, что преобразование Фурье (в отличие от решения системы линейных уравнений с 13032 неизвестными) на ПК описанной выше конфигурации выполняется практически мгновенно, а фотометрическое тело на Рис. 2 было построено в течение нескольких секунд.

Заключение. В работе рассмотрена проблема тригонометрической аппроксимации пространственного светораспределения источника света. Исходными данными для получения аналитического выражения служат результаты фотометрических измерений.

Искомый полином предлагается строить, используя дискретное преобразование Фурье. Затем в полученном выражении отбрасываются слагаемые с малыми коэффициентами при тригонометрических функциях. Этот метод отличается быстродействием, он нетребователен к ресурсам и может быть реализован на персональном компьютере. Корректность метода проверена путем расчета светораспределения конкретного осветительного прибора.

Автор благодарен С. В. Прыткову за предоставленные данные фотометрических измерений.

Список литературы

1. **ГОСТ Р 54350-2011. Приборы осветительные. Светотехнические требования и методы испытаний** / введен 2012-07-01. М.: Госстандарт России, 2011. 70 с.
2. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2-х т. М.: Мир, 1965. Т. 2.
3. **Рабинер Л., Гоулд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
4. **Сергиенко А. Б.** Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. 608 с.
5. **Сыромясов А. О., Прытков С. В.** Аппроксимация фотометрических данных тригонометрическими полиномами одной переменной // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2014. № 5-6 (84). С. 117-122.
6. **IESNA LM-63-95.** IESNA Recommended Standard File Format for Electronic Transfer of Photometric Data. New York: Illuminating Engineering Society of North America, 1995.
7. **Wolfram Mathematica 9** [Электронный ресурс]. URL: http://www.wolfram.com/mathematica (дата обращения: 07.04.2014).

CALCULATION OF LIGHT DISTRIBUTION OF POINT SOURCES WITH THE HELP OF DISCRETE FOURIER TRANSFORM

Syromyasov Aleksei Olegovich, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor
Ogarev Mordovia State University
syal1@yandex.ru

The dependence of light intensity on chosen direction appears a periodic function of two variables. For the approximate determination of the analytical form of this dependence on the basis of experimental data the author proposes to use discrete Fourier transform with two variables. This method doesn't require large computing costs and is very fast. Its efficiency is tested while calculating the spatial light distribution of a particular light source.

Key words and phrases: light intensity; trigonometric approximation; interpolation; discrete Fourier transform; photometric data.

УДК 512.541.3
Физико-математические науки

Статья посвящена изучению одного из подклассов класса абелевых групп без кручения ранга 2, а именно, абелевых групп, являющихся подпрямой суммой двух бесконечных циклических групп с индуцирующей конечной циклической группой (такие группы называются элементарными специальными). Задача описания абелевых групп без кручения конечного ранга, отличного от ранга 1 (для групп ранга 1 задача решена), является достаточно важной и активно решаемой в теории абелевых групп. Рассматриваются некоторые свойства групп из данного подкласса.

Ключевые слова и фразы: абелева группа; абелева группа без кручения; бесконечная циклическая группа; подпрямая сумма абелевых групп; кольцо целых чисел; кольцо вычетов.

Трухманов Вячеслав Борисович, к. ф.-м. н.
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Арзамасский филиал
v.truhmanov@yandex.ru

О ПОДПРЯМЫХ СУММАХ БЕСКОНЕЧНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП©

Идея использовать понятие подпрямой суммы для изучения абелевых групп принадлежит Л. Я. Куликову [1]. Именно им была поставлена задача описания абелевых групп без кручения конечного ранга, представимых в виде подпрямой суммы абелевых групп без кручения первого ранга.

Всюду в статье (если не сказано иначе) все группы – абелевы, A и B – бесконечные циклические группы, n – целое положительное число, большее 1.
