ТРУХМАНОВ Вячеслав Борисович

О ПОДПРЯМЫХ СУММАХ БЕСКОНЕЧНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Статья посвящена изучению одного из подклассов класса абелевых групп без кручения ранга 2, а именно, абелевых групп, являющихся подпрямой суммой двух бесконечных циклических групп с индуцирующей конечной циклической группой (такие группы называются элементарными специальными). Задача описания абелевых групп без кручения конечного ранга, отличного от ранга 1 (для групп ранга 1 задача решена), является достаточно важной и активно решаемой в теории абелевых групп. Рассматриваются некоторые свойства групп из данного подкласса.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2014. № 9 (87). C. 131-134. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2014/9/

Заключение. В работе рассмотрена проблема тригонометрической аппроксимации пространственного светораспределения источника света. Исходными данными для получения аналитического выражения служат результаты фотометрических измерений.

Искомый полином предлагается строить, используя дискретное преобразование Фурье. Затем в полученном выражении отбрасываются слагаемые с малыми коэффициентами при тригонометрических функциях. Этот метод отличается быстродействием, он нетребователен к ресурсам и может быть реализован на персональном компьютере. Корректность метода проверена путем расчета светораспределения конкретного осветительного прибора.

Автор благодарен С. В. Прыткову за предоставленные данные фотометрических измерений.

Список литературы

1. **ГОСТ Р 54350-2011. Приборы осветительные. Светотехнические требования и методы испытаний** / введен 2012-07-01. М.: Госстандарт России, 2011. 70 с.
2. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2-х т. М.: Мир, 1965. Т. 2.
3. **Рабинер Л., Гоулд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
4. **Сергиенко А. Б.** Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. 608 с.
5. **Сыромясов А. О., Прытков С. В.** Аппроксимация фотометрических данных тригонометрическими полиномами одной переменной // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2014. № 5-6 (84). С. 117-122.
6. **IESNA LM-63-95.** IESNA Recommended Standard File Format for Electronic Transfer of Photometric Data. New York: Illuminating Engineering Society of North America, 1995.
7. **Wolfram Mathematica 9** [Электронный ресурс]. URL: http://www.wolfram.com/mathematica (дата обращения: 07.04.2014).

CALCULATION OF LIGHT DISTRIBUTION OF POINT SOURCES WITH THE HELP OF DISCRETE FOURIER TRANSFORM

Syromyasov Aleksei Olegovich, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor
Ogarev Mordovia State University
syal1@yandex.ru

The dependence of light intensity on chosen direction appears a periodic function of two variables. For the approximate determination of the analytical form of this dependence on the basis of experimental data the author proposes to use discrete Fourier transform with two variables. This method doesn't require large computing costs and is very fast. Its efficiency is tested while calculating the spatial light distribution of a particular light source.

Key words and phrases: light intensity; trigonometric approximation; interpolation; discrete Fourier transform; photometric data.

УДК 512.541.3
Физико-математические науки

Статья посвящена изучению одного из подклассов класса абелевых групп без кручения ранга 2, а именно, абелевых групп, являющихся подпрямой суммой двух бесконечных циклических групп с индуцирующей конечной циклической группой (такие группы называются элементарными специальными). Задача описания абелевых групп без кручения конечного ранга, отличного от ранга 1 (для групп ранга 1 задача решена), является достаточно важной и активно решаемой в теории абелевых групп. Рассматриваются некоторые свойства групп из данного подкласса.

Ключевые слова и фразы: абелева группа; абелева группа без кручения; бесконечная циклическая группа; подпрямая сумма абелевых групп; кольцо целых чисел; кольцо вычетов.

Трухманов Вячеслав Борисович, к. ф.-м. н.
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Арзамасский филиал
v.truhmanov@yandex.ru

О ПОДПРЯМЫХ СУММАХ БЕСКОНЕЧНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП©

Идея использовать понятие подпрямой суммы для изучения абелевых групп принадлежит Л. Я. Куликову [1]. Именно им была поставлена задача описания абелевых групп без кручения конечного ранга, представимых в виде подпрямой суммы абелевых групп без кручения первого ранга.

Всюду в статье (если не сказано иначе) все группы – абелевы, A и B – бесконечные циклические группы, n – целое положительное число, большее 1.

Определение. *Подгруппа G прямого произведения* $A = \prod_i A_i$ *абелевых групп называется подпрямой суммой групп* A_i, *если для каждого i отображение* $\pi_i \big| G$: $G \to A_i$ *является эпиморфизмом, где* π_i *– проекция прямого произведения A на прямой сомножитель* A_i [4].

Как установлено [Там же], для того чтобы группа G являлась подпрямой суммой групп A и B, необходимо и достаточно, чтобы существовали группа F и такие эпиморфизмы $\varphi_A : A \to F$ и $\varphi_B : B \to F$, что для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$, $G = \{(a,b) \mid \varphi_A(a) = \varphi_B(b)\}$.

Назовем F порождающей группой для подпрямой суммы G групп A и B, а эпиморфизмы φ_A *и* φ_B *назовем определяющими для группы G.*

Необходимые определения и обозначения приведены в работах [1-8].

Определение. *Если для некоторого данного числа* $n \neq 1$ *группа G является подпрямой суммой данных групп A и B, порожденной конечной циклической группой* Z_n *– аддитивной группой кольца вычетов по модулю n, – то группу G будем называть элементарной специальной n-группой (esn-группой).*

В данной статье доказывается следующее основное утверждение для класса *esn*-групп: «Для данных групп A и B существует ровно $\Phi(n)$ различных *esn*-групп, где $\Phi(n)$ – функция Эйлера, $n \neq 1$».

Элементы h_1 и h_2 произвольной группы H будем называть сравнимыми по модулю n в группе H и обозначать $h_1 \equiv h_2(nH)$, если $(h_1 - h_2) \in nH \subseteq H$. Класс вычетов по модулю n в группе H, содержащий элемент h, будем обозначать $\bar{h}$. Далее, также всюду, полагаем G (или G_k, или G_m) – *esn*-группа; a, a_1, a_2, … – элементы группы A; b, b_1, b_2, … – элементы группы B; G_A и G_B – ядра группы G.

Предложение 1. Пусть $a_1 \equiv a_2(nA)$, $b_1 \equiv b_2(nB)$. Тогда $(a_1,b_1) \in G$, если и только если $(a_2,b_2) \in G$.

Доказательство. $a_1 \equiv a_2(nA) \Rightarrow a_1 - a_2 \equiv 0(nA) \Rightarrow (a_1 - a_2) \in G_A \Rightarrow \varphi_A(a_1 - a_2) = 0 \Rightarrow \varphi_A(a_1) = \varphi_A(a_2)$. Аналогично, $\varphi_B(b_1) = \varphi_B(b_2)$. Следовательно, равенства: $\varphi_A(a_1) = \varphi_B(b_1)$ и $\varphi_A(a_2) = \varphi_B(b_2)$ либо одновременно выполняются, либо одновременно не выполняются. Значит, для группы G имеет место либо условие а) $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in G$, либо условие б) $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \notin G$.

Следствие. Пусть $(a, b) \in G$. Если $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$, то для любых элементов $a_1 \in \bar{a}$ и $b_1 \in \bar{b}$ $(a_1, b_1) \in G$.

Доказательство очевидно вытекает из Предложения 1.

Предложение 2. Пусть $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in G$. Тогда $a_1 \equiv a_2(nA) \Leftrightarrow b_1 \equiv b_2(nB)$.

Доказательство. $a_1 \equiv a_2\ (nA) \Leftrightarrow \varphi_A(a_1) = \varphi_A(a_2) \Leftrightarrow \varphi_B(b_1) = \varphi_A(a_1) = \varphi_A(a_2) = \varphi_B(b_2) \Leftrightarrow b_1 \equiv b_2\ (nB)$.

Теорема 3. Если $a \in nA$, $b \in nB$, то $(a, b) \in G$.

Доказательство. Так как $nA = G_A$, $nB = G_B$, то для любой *esn*-группы G $nA \oplus nB = G_A \oplus G_B \subseteq G$. Откуда и вытекает условие теоремы.

Пусть $A = \langle\alpha\rangle$ и $B = \langle\beta\rangle$, и пусть для некоторых несравнимых по модулю n целых чисел k и m $(k, m > 1)$ $a = k\alpha$, $b = m\beta$. Введем следующие обозначения: $d_{n,k}$ – наибольший общий делитель чисел n и k, $d_{n,m}$ – наибольший общий делитель чисел n и m.

Теорема 4. *esn*-группа G, такая что $(a,b) \in G$, существует тогда и только тогда, когда $d_{n,k} = d_{n,m}$.

Доказательство. Пусть $d_{n,k} = d_{n,m}$. Рассмотрим отображения $f_A : t\alpha \to \bar{t}$, $f_B : t\beta \to \bar{t}$ соответственно групп A и B на группу Z_n. Нетрудно видеть, что таким образом определенные отображения есть эпиморфизмы. Тогда, $f_A(k\alpha) = \bar{k}$, $f_B(m\beta) = \bar{m}$. Откуда, очевидным образом, вытекает существование целых чисел u и v таких, что $u\bar{k} = v\bar{m}$. В качестве определяющих эпиморфизмов подпрямой суммы групп A и B выберем отображения: $\varphi_A = uf_A$, $\varphi_B = vf_B$. Следовательно, множество $G = \{(x,y) \mid \varphi_A(x) = \varphi_B(y)\}$ образует *esn*-группу, причем такую, что $(a,b) \in G$, так как из вышеотмеченного следует выполнение равенств:

$$\varphi_A(a) = \varphi_A(k\alpha) = u \cdot f_A(k\alpha) = u\bar{k} = v\bar{m} = v \cdot f_B(m\beta) = \varphi_B(m\beta) = \varphi_B(b).$$

Таким образом, доказано, что искомая *esn*-группа G существует.

Обратно. Пусть $d_{n,k} \neq d_{n,m}$, тогда, по условию, найдутся целые числа t и s такие, что $d_{n,k} \cdot t = d_{n,m} \cdot s = n$, а также целые числа u и v, такие что $k = d_{n,k} \cdot u$, $m = d_{n,m} \cdot v$. Допустим, что существует *esn*-группа G, для которой $(a,b) \in G$. Следовательно, $(ta,tb) = t \cdot (a,b) \in G$. Так как $ta = tk\alpha = td_{n,k}v\alpha = nv\alpha$, то получаем: $ta = tk\alpha \in nA = G_A \subseteq A$. Поскольку n не является делителем t, то значит n должно делить число k, и, поэтому, $d_{n,k} = n$. Но тогда $tb \in nB = G_B \subseteq B$. Но, так как $tb = tm\beta$, и n не является делителем t, то n должно делить число m. И значит, $d_{n,m} = n$. Следовательно, $d_{n,k} = d_{n,m}$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, предположение о существовании *esn*-группы G неверно. Что и требовалось доказать.

Теорема 5. Пусть $d_{n,k} = d_{n,m} = D$. Тогда существуют ровно D различных *esn*-групп G_1, G_2, …, G_D, таких что $(a,b) \in G_i$, где $i = 1, 2, \ldots, D$.

Доказательство. Пусть $d_{n,k} = d_{n,m} = D = 1$. Допустим, что найдется еще одна *esn*-группа G', такая что $(a,b) \in G'$ и φ'_A и φ'_B – ее определяющие эпиморфизмы. Следовательно, $\varphi_A(a) = \varphi_B(b) = \bar{m}$,

$\varphi'_A(a) = \varphi'_A(b) = \bar{k}$ для некоторых смежных классов чисел $\bar{m}$ и $\bar{k}$ по модулю *n*. Тогда существует целое число *t*, такое что $\bar{k} = t\bar{m}$. Поскольку $G \neq G'$, то выполняется либо условие а) $\varphi_A \neq \varphi'_A$; либо условие б) $\varphi_B \neq \varphi'_B$. Рассмотрим эти условия:

а) $\varphi_A \neq \varphi'_A \Rightarrow t\varphi_A(a) = t\bar{m} = \bar{k} = \varphi'_A(a) \Rightarrow (t\varphi_A - \varphi'_A)(a) = \bar{0} \Rightarrow a \in nA \subseteq A$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, предположение о существовании еще одной *esn*-группы, содержащей пару (*a*, *b*), отличной от данной, не верно. Аналогичный вывод получается из условия б).

Далее, пусть $D \neq 1$. По Теореме 4, существует хотя бы одна *esn*-группа, содержащая пару $(a,b) = (k\alpha, m\beta)$. Покажем, что найдется ровно *D* таких различных *esn*-групп. Не нарушая общности доказательства теоремы, положим, что $0 < k < m < n$.

Обозначим через k_1, m_1, n_1, соответственно, отношения $\frac{k}{D}$, $\frac{m}{D}$, $\frac{n}{D}$.

Рассмотрим множество пар вида $\left(k_1\alpha, (m_1 + jn_1)\beta\right)$, где *j* пробегает все целые числа в интервале от 1 до *n*. Пусть числа j_1 и j_2 из интервала от 1 до *n* различны, и пусть для *esn*-группы *G* одновременно $\left(k_1\alpha, (m_1 + j_1n_1)\beta\right) \in G$ и $\left(k_1\alpha, (m_1 + j_2n_1)\beta\right) \in G$. Откуда, по Предложению 2: $m_1 + j_1n_1 \equiv m_1 + j_2n_1 (nZ) \Rightarrow j_1n_1 \equiv j_2n_2(nZ) \Rightarrow j_1 \equiv j_2(D)$, но, так как, $0 < j_1, j_2 < D$, то отсюда получаем, что $j_1 = j_2$, а это противоречит условию.

Если *esn*-группу, элементом которой является пара $\left(k_1\alpha, (m_1 + jn_1)\beta\right)$, обозначить через G_j для каждого целого числа *j* из интервала от 0 до $D-1$, то тем самым доказано, что из ряда G_0, G_1, G_2, ..., G_{D-1} все группы различны.

Теперь покажем, что каждая группа из ряда G_0, G_1, G_2, ..., G_{D-1} содержит своим элементом пару (a,b). Действительно, для любого выбранного из интервала от 0 до *D* – 1 числа *j*: $D(m_1 + jn_1) = m + jn$ и $m\beta \equiv (m + jn)\beta\ (nB)$. Тогда, по Теореме 3, для *j*-й *esn*-группы G_j одновременно $(a,b) = (k\alpha, m\beta) \in G_j$ и $\left(k\alpha, (m + jn)\beta\right) = D\left(k_1\alpha, (m_1 + jn_1)\beta\right) \in G_j$. Но так как номер *j* выбирается произвольно из интервала от 0 до *D* – 1, то получаем, что пара (a,b) является элементом каждой из групп G_0, G_1, G_2, ..., G_{D-1}, то есть мы нашли *D* различных *esn*-групп, удовлетворяющих условию теоремы.

Пусть для еще одной *esn*-группы *G*: $(a,b) \in G$. Тогда, по определению подпрямой суммы, в интервале от 1 до *n* – 1 найдется целое число *l* такое, что $(k_1\alpha, l\beta) \in G$. Но тогда $D(k_1\alpha, l\beta) = (k\alpha, Dl\beta) \in G$, и, следовательно, $Dl \equiv m(nZ)$, или $l \equiv m_1(n_1Z)$. А это означает, что для некоторого целого числа *i*: $l = m_1 + in_1$, а поскольку $1 \le l \le n$, то $0 < i < D-1$. Это означает, что группа *G* есть одна из групп ряда G_0, G_1, G_2, ..., G_{D-1}. Что и требовалось доказать.

Теорема 6. Пусть *A* = <α> и *B* = <β>, $(\alpha, k\beta) \in G_k$, где *k* – взаимно простое с *n* целое число, $a \notin nA$ и $b \notin nB$. Тогда (*a*, *b*) ∈ $G_k \Leftrightarrow$ существуют целые числа *t* и *s* такие, что *a* = *t*α, *b* = *s*β, *s* ≡ *tk* (*nZ*), и такие, что *n* не является их делителем.

Доказательство. Пусть G_k – *esn*-группа, для которой $(a,b) \in G_k$. Это значит, что найдутся целые числа *u* и *v*, такие что $a = u\alpha$, $b = v\beta$. Следовательно, поскольку $(\alpha, k\beta) \in G_k$, то $(u\alpha, uk\beta) \in G_k$. Откуда, по Предложению 2, $v\beta \equiv uk\beta\ (nB)$, то есть $v \equiv uk\ (nZ)$.

Поскольку все выше приведенные рассуждения можно провести в обратном порядке, то, очевидно, обратное утверждение также справедливо.

Теорема 7. Пусть *A* = <α> и *B* = <β>. Тогда каждой *esn*-группе – подгруппе группы $A \oplus B$ – можно поставить в соответствие некоторый автоморфизм группы Z_n, причем такое соответствие взаимно однозначно.

Доказательство. Пусть G_k – *esn*-группа, такая что $(\alpha, k\beta) \in G_k$, и числа *n* и *k* – взаимно просты. Определим отображение группы Z_n на себя следующим образом: $f_k(\bar{a}) = k\bar{a}$ для каждого элемента $\bar{a} \in Z_n$. Нетрудно видеть, что отображение f_k является автоморфизмом группы Z_n тогда и только тогда, когда числа *n* и *k* взаимно просты. Далее каждой *esn*-группе G_k поставим в соответствие автоморфизм f_k группы Z_n. Установим, что данное соответствие от выбора пары $(\alpha, k\beta)$ в группе G_k не зависит. Действительно, пусть для некоторого числа k', взаимно простого с числом *n*, также $(\alpha, k'\beta) \in G_k$. Но тогда, по Предложению 2: $k\beta \equiv k'\beta\ (nB)$, то есть $(k - k')\beta \in nB$. Значит, для любого элемента $a \in A$: $(k - k')a \in nA$, то есть $ka \equiv k'a\ (nA)$ или, что равносильно, $k\bar{a} = k'\bar{a}$ для любого элемента $\bar{a} \in Z_n$. Таким образом, доказано, что автоморфизм $f_{k'}$ совпадает с автоморфизмом f_k группы Z_n.

Далее установим взаимную однозначность данного соответствия. Пусть $(\alpha, k\beta) \in G_k$ и $(\alpha, m\beta) \in G_m$, и пусть $G_k \neq G_m$. Следовательно, по Предложению 2, элементы $k\beta$ и $m\beta$ несравнимы по модулю *nB* в группе *B*, то есть, для произвольного элемента $\bar{a} \in Z(n)$: $k\bar{a} \neq m\bar{a}$. Значит, автоморфизмы f_k и f_m группы Z_n отличны друг от друга.

Обратно. Пусть для произвольного элемента $\bar{a} \in Z_n$ отображение f_k группы Z_n на себя, определенное следующим образом: $f_k(\bar{a}) = k\bar{a}$, где число k взаимно просто с числом n, есть автоморфизм. Тогда, по Теореме 4, существует и причем единственная *esn*-группа G_k, такая что $(\alpha, k\beta) \in G_k$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть n – целое положительное число, $\Phi(n)$ – функция Эйлера, которая определяет число целых чисел в интервале от 1 до n, взаимно простых с n. Для любых бесконечных циклических абелевых групп A и B существует ровно $\Phi(n)$ различных *esn*-групп.

Доказательство непосредственно следует из данной Теоремы 7, а также из Теорем 3 и 6.

Список литературы

1. **Куликов Л. Я.** О подпрямых суммах абелевых групп без кручения первого ранга // XII Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Свердловск, 1973.
2. **Трухманов В. Б.** О некоторых специальных и *p*-специальных группах [Электронный ресурс] // Исследования в области естественных наук. 2014. № 6. URL: http://science.snauka.ru/2014/06/7405 (дата обращения: 25.06.2014).
3. **Трухманов В. Б.** Подпрямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13. № 3. С. 209-221.
4. **Фукс Л.** Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.
5. **Широков Л. В.** О $AE(n)$ -бикомпактах // Известия РАН. 1992. Т. 56. № 6. С. 1316-1327.
6. **Широков Л. В.** О продолжении непрерывных отображений и аппроксимативной связности // Проблемы современной науки. 2013. Вып. 9. С. 3-9.
7. **Широков Л. В., Ямпурин Н. П., Садков В. Д.** Теория аналитических функций. Аспекты приложений. Арзамас: АГПИ, 2004. 188 с.
8. **Trukhmanov V. B.** On Subdirect Sums of Abelian Torsion-Free Groups of Rank 1 // Journal of Mathematical Sciences. 2008. Vol. 154. № 3. P. 422-429.

ABOUT SUBDIRECT SUMS OF INFINITE CYCLIC ABELIAN GROUPS

Trukhmanov Vyacheslav Borisovich, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (Branch) in Arzamas
v.truhmanov@yandex.ru

The article is devoted to the research of one of the subclasses of Abelian torsion-free groups class of rank 2, namely, to Abelian groups that are a subdirect sum of two infinite cyclic groups with inducing finite cyclic group (such groups are called “elementary special”). The problem of describing Abelian groups with torsion-free finite rank, different from rank 1 (for the groups of rank 1 the problem is solved), is sufficiently important and actively solved in the theory of Abelian groups. The author considers some features of the groups of this subclass.

Key words and phrases: Abelian group; Abelian torsion-free group; infinite cyclic group; subdirect sum of Abelian groups; ring of integers; residue ring.

УДК 94
Исторические науки и археология

В статье рассматривается процесс создания и становления народной милиции Тобольской губернии в очень важный период истории России – правления Временного правительства (март-октябрь 1917 г.). Анализируется деятельность тюменской милиции по борьбе с преступностью в сложных условиях смены власти в стране. Прослеживается преемственность царской полиции и народной милиции Временного правительства.

Ключевые слова и фразы: Временное правительство; Февральская революция; органы внутренних дел; народная милиция; губернский комиссар; большевики; Советы рабочих и солдатских депутатов.

Фирсов Иван Федорович, к.и.н., доцент
Тюменский институт повышения квалификации МВД России
elena_firsova@mail.ru

НАРОДНАЯ МИЛИЦИЯ ТОБОЛЬСКОЙ ГУБЕРНИИ В ПЕРИОД ВРЕМЕННОГО ПРАВИТЕЛЬСТВА©

В последние годы наметились новые подходы в освещении событий 1917 г., гражданской войны и последующих десятилетий, была пересмотрена роль партии большевиков и других политических сил как в истории страны в целом, так и в истории органов внутренних дел. Был пересмотрен и подход к народной милиции Временного правительства.

Особенность процесса становления советской милиции состоит в том, что корни его уходят к Февральской буржуазно-демократической революции, когда в ходе революционных событий царская полиция была