ШИРОКОВ Лев Васильевич

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ d-РЕГУЛЯРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В статье изучаются свойства d-регулярных отображений, связанные с задачами продолжения непрерывных отображений. Результаты, приведенные в данной работе, непосредственно связаны с теорией продолжения, развитой в работах А. Н. Дранишникова, Е. В. Щепина. Решение ряда проблем, поставленных теорией продолжения, содержащееся в статье, органически дополняет эту теорию, придавая ей целостность и многообразность. В частности, в работе дается характеристика абсолютных ретрактов на языке операторов продолжения топологий. Доказательство главных результатов настоящей статьи основано на использовании современных математических методов.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2014. № 9 (87). C. 152-155. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2014/9/

Список литературы

1. **Головин Б. Н., Кобрин Р. Ю.** Лингвистические основы учения о терминах. М., 1987. 123 с.
2. **Шетулова Т. Г.** «Автоязык» и его специфика на продвинутом этапе иноязычного обучения магистров и аспирантов // Инновационные технологии современного учебного процесса: стратегия, задачи, внедрение. Нижний Новгород: НГТУ, 2010. С. 259-261.
3. **Шетулова Т. Г.** О межкатегориальных отношениях терминов в «автоязыке» // Актуальные проблемы социальной коммуникации: материалы Первой международной научно-практической конференции. Нижний Новгород: НГТУ, 2010. С. 515-516.
4. **Шетулова Т. Г.** Сопоставительный анализ русских и английских терминов автомобилестроения // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2013. № 5 (72). С. 193-195.
5. **Automotive Engineering.** 2004. № 12.

SUBJECT-CONCEPTUAL CHARACTERISTIC OF THE ENGLISH ONE-WORD AUTOMOTIVE INDUSTRY TERMS

Shetulova Tat'yana Gavrilovna, Ph. D. in Philology
Nizhny Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev
Schetulov@mail.ru

This work deals with the subject-conceptual classification of the English one-word automotive industry terms. When describing the considered terms at extra-linguistic level their facet classification based on the criteria of semantic generalization degree, application areas and their distribution in general technical categories is carried out. The hierarchical relationships of these names within general technical categories are studied. Generic and partitive relations between the one-word terms of “automotive language” are identified. The inter-categorial relationships of the analyzed names are established.

Key words and phrases: facet classification; hierarchical classification; generic feature; partitive feature; inter-categorial relationships; associative relationships.

УДК 513.83
Физико-математические науки

В статье изучаются свойства d-регулярных отображений, связанные с задачами продолжения непрерывных отображений. Результаты, приведенные в данной работе, непосредственно связаны с теорией продолжения, развитой в работах А. Н. Дранишникова, Е. В. Щепина. Решение ряда проблем, поставленных теорией продолжения, содержащееся в статье, органически дополняет эту теорию, придавая ей целостность и многообразность. В частности, в работе дается характеристика абсолютных ретрактов на языке операторов продолжения топологий. Доказательство главных результатов настоящей статьи основано на использовании современных математических методов.

Ключевые слова и фразы: топологическое пространство; непрерывное отображение; тихоновский куб; компакт; ретракт; экстремально несвязное пространство.

Широков Лев Васильевич, к. ф.-м. н., доцент
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского в г. Арзамасе
Shirokov1954@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ d-РЕГУЛЯРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ©

Определение всех используемых понятий, терминов и обозначений можно найти в работах [1-7; 9-11; 13; 14]. Компакт – компактное хаусдорфово пространство, не обязательно метризуемое. Все пространства предполагаются вполне регулярными.

Определение 1. Пусть $F \subset X$ и $f: F \to Y$ – сюръективное отображение. Оператор $e: \tau_Y \to \tau_X$ называется d-регулярным оператором продолжения открытых множеств, если e удовлетворяет условиям:

1) $e(U) \cap F = f^{-1}(U)$ для любого $U \in \tau_Y$;

2) $e(\varnothing) = \varnothing$, $e(Y) = X$;

3) $e(U \cap V) = e(U) \cap e(V)$ для любых $U, V \in \tau_Y$.

Отображение $f: F \to Y$, для которого существует d-регулярный оператор продолжения открытых множеств, называется d-регулярным.

Предложение 1. Если $f: F \to Y$ – d-регулярное отображение, то существует d-регулярный оператор продолжения открытых множеств $e: \tau_Y \to \tau_X$, удовлетворяющий условию 4) $[e(U) \cup e(V)]_X = X$ для любых $U, V \in \tau_Y$ таких, что $U \cup V = Y$.

Доказательство. Введем на семействе $E = \{e: \tau_Y \to \tau_X\}$ всех d-регулярных операторов продолжения открытых множеств частичный порядок: $e_1 \prec e_2$, если для любого $U \in \tau_Y$ выполняется $e_1(U) \subset e_2(U)$. Покажем, что в E каждая цепь имеет верхнюю грань. Пусть $E' \subset E$ – цепь, и $e': e'(U) = \cup\{e(U): e \subset E_1\}$ для любого $U \in \tau_Y$. Ясно, что e' является верхней гранью множества E'. Пусть $\tilde{e}$ – максимальный элемент множества E. Покажем, что $[\tilde{e}(U) \cup \tilde{e}(V)]_X = X$ для любых $U, V \in \tau_Y$ таких, что $U \cup V = Y$. Допустим, что существуют открытые множества $U_1, V_1 \in \tau_Y$ такие, что $U_1 \cup V_1 = Y$, но $[\tilde{e}(U_1) \cup \tilde{e}(V_1)]_X \neq X$ и положим $W = X \setminus [\tilde{e}(U_1) \cup \tilde{e}(V_1)]_X$. Для произвольного открытого множества $U \in \tau_Y$ положим

$\tilde{U}_1(U) = \cup\{\tilde{U}: \tilde{U} \in \tau_Y, \tilde{U} \cap U_1 = U \cap U_1\}$ и

$\tilde{U}_2(U) = \tilde{U}_1(U) \cup (Y \setminus [U_1]_Y)$.

Оператор $\bar{e}$ определим правилом: $\bar{e}(U) = \tilde{e}(U) \cup [\tilde{e}(\tilde{U}_2(U)) \cap W]$ для любого $U \in \tau_Y$. Покажем, что оператор $\bar{e} \in E$. Очевидно выполнение условий 1) и 2) Определения 1. Пусть $U, V \in \tau_Y$ и $x \in \bar{e}(U \cap V)$. Если $x \in \tilde{e}(U \cap V)$, то $x \in \tilde{e}(U) \cap \tilde{e}(V)$ и, следовательно, $x \in \bar{e}(U) \cap \bar{e}(V)$. Если $x \in [\tilde{e}(\tilde{U}_2(U \cap V)) \cap W]$, то, в силу монотонности оператора $\tilde{e}$ (если $U \subset V$, то $\tilde{e}(U) \subset \tilde{e}(V)$), элемент x содержится как в множестве $\tilde{e}(\tilde{U}_2(U)) \cap W$, так и в множестве $\tilde{e}(\tilde{U}_2(V)) \cap W$. Таким образом, $x \in \bar{e}(U) \cap \bar{e}(V)$. Пусть теперь $x \in \bar{e}(U) \cap \bar{e}(V)$. Выполнение условия $x \in \bar{e}(U \cap V)$ следует из того, что $\tilde{U}_2(U \cap V) = \tilde{U}_2(U) \cap \tilde{U}_2(V)$ и $\tilde{e} \in E$. Итак, $\bar{e} \in E$, а это противоречит максимальности оператора $\tilde{e}$. Предложение доказано.

Замечание. Аналогичным образом можно доказать существование d-регулярного оператора продолжения открытых множеств $e: \tau_Y \to \tau_X$, удовлетворяющего кроме условия 4) условию 5) $[e(U)]_X = X$ для любого $U \in \tau_Y$ такого, что $[U]_Y = Y$.

Предложение 2. Если существует d-регулярное вложение φ компакта X в тихоновский куб I^τ, то и всякое вложение X в произвольный компакт Z является d-регулярным.

Доказательство. Пусть $\psi: X \to Z$ – произвольное вложение компакта X в некоторый компакт Z, $e: \tau_X \to \tau_{I^\tau}$ – d-регулярный оператор продолжения открытых множеств. Обозначим через g гемеоморфизм $\psi(X)$ на $\varphi(X)$ и пусть $f: Z \to I^\tau$ – непрерывное отображение такое, что $f|(\psi\ X) = g$. Каждому открытому подмножеству U пространства $\psi(X)$ поставим в соответствие открытое подмножество

$\tilde{e}(U) = f^{-1}(e(g(U)) \bigcap f(Z))$

пространства Z. Очевидно, указанное соответствие удовлетворяет всем требованиям Определения 1. Предложение доказано.

Определение 2. Пусть $X \subset Y$. Оператор $e: \tau_X \to \tau_Y$ называется r-регулярным оператором продолжения открытых множеств, если e удовлетворяет условиям:

1) $e(U) \cap X = U$ для любого $U \in \tau_X$;

2) $e(\varnothing) = \varnothing$, $e(X) = Y$;

3) $e(U \cap V) = e(U) \cap e(V)$ для любых $U, V \in \tau_X$;

4) если $U_1, U_2 \in \tau_X$ и $U_1 \bigcup U_2 = X$, то $e(U_1) \bigcup e(U_2) = Y$.

Вложение φ пространства X в пространство Y, для которого существует r-регулярный оператор продолжения открытых множеств e_φ, называется r-регулярным.

Теорема 1. Пусть X – компакт и $\varphi: X \to Y$ – вложение X в Y. Для того, чтобы компакт X был ретрактом пространства Y необходимо и достаточно, чтобы вложение φ пространства X в пространство Y было r-регулярным.

Доказательство. Доказательство необходимости тривиально.

Достаточность. Так как вложение φ является r-регулярным, то для любой точки $y \in Y$ существует открытое подмножество V компакта X такое, что $y \in e_\varphi(V)$. Для каждой точки $y \in Y$ совокупность всех открытых подмножеств V компакта X таких, что $y \in e_\varphi(V)$ обозначим через η_y. Покажем, что для любого

$y \in Y$ семейство η_y центрировано. Допустим, что существуют элементы $V_1,...,V_n$ семейства η_y такие, что $V_1 \cap ... \cap V_n = \varnothing$. В силу условий 2 и 3 Определения 2 получаем, что $e_\varphi(V_1) \cap ... \cap e_\varphi(V_n) = \varnothing$ – противоречие. Таким образом, $\bigcap\{[V]_X : V \in \eta_y\} \neq \varnothing$ для любого $y \in Y$. Для каждой точки $y \in Y$ множество $\bigcap\{[V]_X : V \in \eta_y\}$ обозначим через Φ_y. Покажем, что $|\Phi_y| = 1$ для любого $y \in Y$. Допустим, что для некоторого $y \in Y$ существуют точки $x_1, x_2 \in \Phi_y$ такие, что $x_1 \neq x_2$. Рассмотрим окрестности Q'_{x_1} и Q''_{x_1} точки x_1 в X такие, что $x_2 \notin [Q'_{x_1}]_X$ и $[Q''_{x_1}]_X \subset Q'_{x_1}$. Ясно, что $Q'_{x_1} \cup (X \setminus [Q''_{x_1}]_X) = X$. В силу условия 4 Определения 2 точка y содержится либо в $e_\varphi(Q'_{x_1})$, либо в $e_\varphi(X \setminus \left[Q''_{x_1}\right]_X)$. Допустим, что $y \in e_\varphi(Q'_{x_1})$. Тогда $\Phi_y \subset [Q'_{x_1}]_X$ – противоречие. Если $y \in e_\varphi(X \setminus \left[Q''_{x_1}\right]_X)$, то $\Phi_y \cap Q''_{x_1} = \varnothing$ – противоречие. Таким образом, мы показали, что $|\Phi_y| = 1$ для любой точки $y \in Y$. Отображение, ставящее в соответствие каждой точке $y \in Y$ одноточечное множество Φ_y, обозначим через r. Очевидно, выполняется $r(x) = x$ для любой точки $x \in X$.

Покажем, что для любой точки $y \in Y$ и любого открытого подмножества U компакта X таких, что $\Phi_y \subset U$, выполняется $y \in e_\varphi(U)$. Допустим, что существуют точка $y' \in Y$ и открытое множество $U' \subset X$ такие, что $\Phi_{y'} \subset U'$, но $y' \notin e_\varphi(U')$. Выберем открытое подмножество V компакта X такое, что V содержит $\Phi_{y'}$ и $[V]_X \subset U'$. Тогда $y' \in e_\varphi(X \setminus [V]_X)$ и получаем противоречие с тем, что $\Phi_{y'} \notin X \setminus V$.

Переходим к доказательству непрерывности отображения r.

Пусть U – произвольное открытое подмножество бикомпакта X и y – произвольная точка множества $r^{-1}(U)$. Выберем окрестность $Q_{r(y)}$ точки $r(y)$ в X такую, что $[Q_{r(y)}]_X \subset U$. Покажем, что для любого $z \in e_\varphi(Q_{r(y)})$ точка $r(z)$ содержится в множестве $[Q_{r(y)}]_X$. Допустим, что существует точка $z' \in e_\varphi(Q_{r(y)})$ такая, что $r(z') \notin [Q_{r(y)}]_X$. Выберем окрестность $Q_{r(z')}$ точки $r(z')$ в X такую, что $Q_{r(y)} \cap Q_{r(z')} = \varnothing$. Тогда $e_\varphi(Q_{r(y)}) \cap e_\varphi(Q_{r(z')}) = \varnothing$, что противоречит тому, что $z' \in e_\varphi(Q_{r(z')})$. Таким образом, $e_\varphi(Q_{r(y)}) \subset r^{-1}(U)$. Так как мы рассматривали произвольную точку $y \in r^{-1}(U)$, то $r^{-1}(U)$ является открытым подмножеством пространства Y. Теорема доказана.

Аналогично Предложению 2 доказывается следующее предложение.

Предложение 3. Если существует r-регулярное вложение компакта X в тихоновский куб I^τ, то и всякое вложение X в любой компакт Z является r-регулярным.

Из Теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Для того, чтобы компакт X являлся абсолютным ретрактом необходимо и достаточно, чтобы любое вложение X в тихоновский куб I^τ было r-регулярным.

Через $C_+(X)$ обозначается множество неотрицательных непрерывных функций на пространстве X, через a_X – функция на X, тождественно равная a на X $[5]$.

Определение 3. Пусть $X \subset Y$. Отображение $\varphi : C_+(X) \to C_+(Y)$ называется d-регулярным оператором продолжения функций, если выполняются следующие условия:

1) $\varphi(f)|X = f$ для любой функции $f \in C_+(X)$;

2) $\varphi(a_X) = a_Y$;

3) $\varphi(\min\{f_1, f_2\}) = \min\{\varphi(f_1), \varphi(f_2)\}$ для любых $f_1, f_2 \in C_+(X)$.

Теорема 3. Пусть X – компактное подпространство экстремально несвязного пространства Y [1; 13]. Следующие условия эквивалентны:

1) компакт X является ретрактом пространства Y;

2) существует d-регулярный оператор $\varphi : C_+(X) \to C_+(Y)$ продолжения функций;

3) вложение компакта X в пространство Y является d-регулярным.

Доказательство. Доказательство импликации $1 \Rightarrow 2$ тривиально. Докажем истинность $2 \Rightarrow 3$. Определим оператор e продолжения открытых множеств пространства X, положив

$$e(U) = \cup\left\{Y \setminus \varphi(f)^{-1}(0) : X \setminus f^{-1}(0) \subset U, f \in C_+(X)\right\}$$

для каждого открытого множества $U \subset X$. Непосредственная проверка показывает, что e является d-регулярным оператором продолжения открытых множеств. Доказательство импликации $3 \Rightarrow 1$ следует из Предложения 1 с учетом определения экстремально несвязного пространства.

Теорема 4. Пусть X – компакт, Y – метризуемый компакт, F – замкнутое подмножество X и $f : F \to Y$ – непрерывное отображение. Тогда существует всюду плотное подмножество S компакта X, содержащее F, и непрерывное отображение $g : S \to Y$ такое, что $g|F = f$.

Доказательство. Так как компакт Y – пространство Дугунджи, то отображение f является d-регулярным [7; 9]. Пусть $e:\tau_Y \to \tau_X$ – d-регулярный оператор продолжения открытых множеств со свойством 4), существование которого доказано в Предложении 1, и $\Im$ – счетная база пространства Y. Положим

$\Im' = \Im \cup \{Y \setminus [U] : U \in \Im\}$,

$\Im'' = \{U_1 \cap \cdots \cup U_n : U_1, ..., U_n \in \Im', n \in \mathrm{N}\}$ и

$S = \cap\{e(U) \cup e(V) : U, V \in \Im'' \text{ и } U \cup V = Y\}$.

Так как компакт X обладает свойством Бэра $[13]$, то пространство S всюду плотно в X. Очевидно, $F \subset S$. Теперь, для построения искомого непрерывного отображения $g:S \to Y$, достаточно реализовать схему доказательства Теоремы 1.

Список литературы

1. **Александров П. С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
2. **Борсук К.** Теория ретрактов. М.: Мир, 1971. 272 с.
3. **Дранишников А. Н.** Абсолютные экстензоры в размерности *n* и *n*-мягкие отображения // Успехи математических наук (УМН). 1984. Т. 39. Вып. 5. С. 55-96.
4. **Дранишников А. Н.** О теории продолжения отображений компактов // УМН. 1998. Т. 53. Вып. 5. С. 65-72.
5. **Пелчинский А.** Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения. М.: Мир, 1970. 144 с.
6. **Трухманов В. Б.** Подпрямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13. № 3. С. 209-221.
7. **Широков Л. В.** Внешняя характеристика пространств Дугунджи и $\aleph$-метризуемых бикомпактов // Доклады АН СССР. 1982. Т. 263. № 5. С. 1073-1077.
8. **Широков Л. В.** О некотором расширении класса диадических бикомпактов / деп. в ВИНИТИ 19 июня 1981 г. № 2945-81. Деп.
9. **Широков Л. В.** О продолжении непрерывных отображений и аппроксимативной связности // Проблемы современной науки. 2013. Вып. 9. С. 3-9.
10. **Широков Л. В.** О $AE(n)$-бикомпактах // Известия РАН. 1992. Т. 56. № 6. С. 1316-1327.
11. **Широков Л. В.** О $AE(n)$-бикомпактах и n-мягких отображениях // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 33. № 2. С. 151-156.
12. **Щепин Е. В.** Арифметика теории размерности // УМН. 1998. Т. 53. Вып. 5. С. 115-212.
13. **Engelking R.** General Topology. Warszawa: PWN, 1977. 626 p.
14. **Trukhmanov V. B.** On Subdirect Sums of Abelian Torsion-Free Groups of Rank 1 // Journal of Mathematical Sciences. 2008. Vol. 154. № 3. P. 422-429.

ABOUT SOME PROPERTIES OF *d*-REGULAR MAPPINGS

Shirokov Lev Vasil'evich, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor
Nizhni Novgorod State University named after N. I. Lobachevsky (Branch) in Arzamas
Shirokov1954@mail.ru

In this paper the author studies properties of *d*-regular mappings connected with the tasks of continuous mappings extension. Results described in this article are directly related to extension theory developed in A. N. Dranishnikov's, E. V. Shchepin's works. The solution of a number of problems put forward by extension theory in this paper organically supplements this theory giving it integrity and diversity. In particular, the article gives a characterization of absolute retracts in the language of topologies extension operators. The proof of the main results of this paper is based on the use of modern mathematical methods.

Key words and phrases: topological space; continuous mapping; Tychonov cube; compact; retract; extremely disconnected space.