

Ковешников Евгений Валериевич

**"ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ" В КУРСАХ МАТЕМАТИКИ ВЫСШЕЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ**

В статье рассматривается методика преподавания "Элементов комбинаторики" бакалаврам-первокурсникам педагогических вузов, обучающимся по специальности "Математика", в ходе летней практики, а также в рамках основного курса математики для студентов-старшекурсников нематематических специальностей. Автор приводит небольшую подборку практических задач.

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2015/4/20.html](http://www.gramota.net/materials/1/2015/4/20.html)

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

**Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2015. № 4 (94). С. 88-91. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2015/4/](http://www.gramota.net/materials/1/2015/4/)

**© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)

8. Овсянникова Т. С., Шестаков А. А. Развитие региональных экономических исследований в трудах молодых ученых (к 10-летию научной деятельности профессора А. Н. Алексеева) // Альманах современной науки и образования. 2015. № 1 (91). С. 76-78.
9. План мероприятий («дорожная карта») «Изменения в отраслях социальной сферы, направленные на повышение эффективности здравоохранения» [Электронный ресурс]: Распоряжение Правительства РФ от 28 декабря 2012 г. № 2599-р. Доступ из СПС «Гарант».
10. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс]. URL: <http://www.gks.ru/> (дата обращения: 27.02.2015).
11. Флеров О. В. Корпоративное обучение английскому языку как способ повышения уровня коммуникативной компетенции сотрудников международных компаний. DOI: 10.7256/2409-8736.2015.2.14216 [Электронный ресурс] // Современное образование. 2015. № 2. URL: [http://e-notabene.ru/pp/article\\_14216.html](http://e-notabene.ru/pp/article_14216.html) (дата обращения: 27.02.2015).

## FEATURES OF HUMAN POTENTIAL DEVELOPMENT IN HEALTH CARE SYSTEM

Klyukina Ekaterina Olegovna

Moscow Witte University

katerina.enc@yandex.ru

The article defines the notion “human potential”, considers and analyzes the key indicators describing the human resources of health care in the megalopolis. The author emphasizes the problems of human potential development among health workers in Moscow region, and formulates the ways of improving the sector with the purpose of the effective reproduction of labour resources.

*Key words and phrases:* human potential; resources; health care; public policy; reformation of social sphere; management of medical organization.

УДК 37

Педагогические науки

*В статье рассматривается методика преподавания «Элементов комбинаторики» бакалаврам-первокурсникам педагогических вузов, обучающимся по специальности «Математика», в ходе летней практики, а также в рамках основного курса математики для студентов-старшекурсников нематематических специальностей. Автор приводит небольшую подборку практических задач.*

*Ключевые слова и фразы:* комбинаторика; правило суммы; правило произведения; размещения без повторений; размещения с повторениями; перестановки без повторений; перестановки с повторениями; сочетания без повторений; сочетания с повторениями.

Ковешников Евгений Валериевич

Дальневосточный федеральный университет

Yujin-k@list.ru

## «ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ» В КУРСАХ МАТЕМАТИКИ ВЫСШЕЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ<sup>©</sup>

Комбинаторика — одна из ветвей математики, занимающаяся исследованием различных комбинаций элементов множеств произвольной природы. Основные понятия этой науки, объединённые в курс, который мы условно назовём «Элементы комбинаторики», можно давать студентам различных педагогических специальностей: начальное образование, филологическое образование, естественнонаучное образование, историческое образование и, конечно же, физико-математическое. Студентам последней специальности исследования в этой области математики можно предлагать в качестве курсовой (решение поставленных задач, в том числе используя программирование на ЭВМ) и даже дипломной работы (разработка факультативного курса для старшеклассников с желательной апробацией в школе во время педагогической практики). Более того, изучение основ комбинаторики можно ввести в программу летней практики для студентов-первокурсников, обучающихся по программе «Математика», поскольку такая двухнедельная практика представляет собой, по сути, летнюю математическую школу. Познание основ комбинаторики станет хорошей пропедевтикой теории вероятностей, изучаемой студентами позже.

Для начала учащимся можно предложить очень простую задачу, отражающую смысл науки. Например, такую: *Таня, Оксана и Коля заходят в электричку и видят свободное трёхместное сидение. Сколькими способами они могут разместиться на нём?* Данную задачу можно решить элементарным перебором. Взяв первые буквы имён пассажиров, получим следующие комбинации их расположения: ТОК, ТКО, КОТ, КТО, ОТК, ОКТ. Всего 6.

В фундамент комбинаторики положены два основных правила, которые студенты должны хорошо усвоить и уметь видеть в задачах. Это *правило суммы* и *правило произведения*. Без них дальше перебора вручную они не смогут уйти. Подвести к правилам суммы и произведения можно опять-таки через простую задачу. Например, такую: *мама отправила Васю в магазин купить чего-нибудь к чаю. В магазине есть 10 сортов печенья и 15 сортов конфет. Сколькими способами Вася может: а) совершить покупку только чего-то одного из сладкого, б) одного сорта печенья + одного сорта конфет?* Очевидно, что взять что-то одно Вася может  $10+15=25$  способами. Если в покупке должны быть и печенье, и конфеты, то рассуждаем так: на каждый сорт печенья приходится 15 сортов конфет, печенья – 10 видов, значит, всего получаем:  $10 \times 15 = 150$  способов купить пару «печенье + конфеты». После этого можно строго сформулировать правило суммы: *если объект A можно выбрать  $t$  способами, а объект B можно выбрать  $n$  способами, причём эти выборы не являются совместными, то объект A или B можно выбрать  $t+n$  способами*. И правило произведения: *если объект A можно выбрать  $t$  способами, и после каждого из этих выборов объект B можно выбрать  $n$  способами, то упорядоченную пару (A, B) можно выбрать  $t \times n$  способами*. Необходимо отметить, что эти два правила можно распространить на большее число объектов, не только на два.

*Примеры задач на правила суммы и произведения*

1. В клубе 600 человек. Председатель клуба задумал выдать всем членские билеты с трёхзначным номером, но такие, что они не содержат цифру 8 ни на одном месте в номере. Сколькими такими номерами билетов возможно и хватит ли их на всех?

2. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 30 фехтовальщиков каждое, нужно выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

3. Имеется 6 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

4. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»? А из слова «камзол»?

5. На ферме есть 20 овец и 24 свиньи (все разной упитанности). Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его ещё раз?

6. Сколькими способами можно указать на шахматной доске чёрный и белый квадраты, не лежащие на одной горизонтали и вертикали?

7. Сколькими способами можно составить патруль из двух дружинников, если есть 5 добровольцев?

8. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего нужно выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

9. Сколько есть чисел от 0 до 999999, в которых нет двух рядом стоящих одинаковых цифр?

10. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Надя берёт и яблоко, и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко, или если он взял апельсин?

После того как студенты хорошо усвоят путём решения конкретных задач эти правила, можно переходить к базовым формулам комбинаторики: размещениям и сочетаниям. Здесь учащимся пригодятся некоторые знания из теории множеств. Если речь идёт о нематематических специальностях, то таким студентам необходимо сначала объяснить, что мы называем множеством, его элементом, мощностью и как грамотно записать множество с помощью символов. Необходимо также объяснить, что есть *упорядоченный набор*, чем он отличается от множества и как его правильно записать.

Вначале расскажем о *размещениях без повторений*. Для наглядности будем считать, что имеем дело с множеством шариков разного цвета (массы, размеров). Нам позволено выбрать из этого множества определённое количество шариков, при этом порядок своего выбора необходимо фиксировать, выстраивая шарики в шеренгу, где у каждого своё место, а менять местами ничего нельзя. Такой набор будем называть размещением без повторений. Общее же количество этих наборов нам и предстоит вычислить. После уже под запись даётся строгое определение размещений без повторений. Прежде чем дать расчётную формулу (для студентов-математиков ещё и связанную с ней здесь и далее теорему), стоит привести простейшую задачу, решаемую перебором. Например, *из цифр 1, 2, 3 и 4 составить всевозможные трёхзначные числа так, чтобы цифры в них не повторялись*. Когда учащиеся решат задачу, выписав все варианты, можно дать формулу:  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ , где  $n$  – количество элементов в множестве,  $k$  – сколько элементов можно выбрать из

него. Если перед нами студенты-гуманитарии, не знакомые с понятием *факториала*, то сразу нужно объяснить, что:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ;  $1! = 0! = 1$ . Далее целесообразно задать вопрос: а если нам позволено выбрать из

множества все его элементы, то есть  $k=n$ ? Легко видеть, что тогда:  $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ . Для этого случая

придумали специальное обозначение:  $P_n$  – перестановка без повторений. На эту формулу стоит тут же привести занимательную задачу: *на перемене студенты отправились в буфет. Сколькими способами они могут встать в очередь, если в компании 10 человек?* Ответ очевиден:  $10!$ , но он ни о чём не говорит. Чтобы учащиеся прочувствовали всю мощь этого числа, нужно предложить им сделать нехитрый расчёт. Пусть на

одно построение студенты тратят 10 секунд, тогда только на то, чтобы перебрать все возможные варианты, им потребуется:  $3628800 \times 10 \text{ сек.} / 60 = 604800 \text{ мин.} / 60 = 10080 \text{ час.} / 24 = 420 \text{ суток}$ , а это – больше года!

*Примеры задач на размещения без повторений*

1. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну – на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

2. В соревнованиях участвуют 10 человек, каждый из которых получает свой номер. Победит тот, кого 3 судьи назовут хотя бы дважды. Во скольких случаях победитель будет определён?

3. Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 10 языков на любой другой из этих 10 языков?

4. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюда и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития, если каждый получает чашку, блюдо и ложку?

5. На званый вечер приглашены 5 мужчин и 5 женщин. Напротив каждого места на стол необходимо поставить табличку с именем того, кто будет на этом месте сидеть, но никакие два лица одного пола не должны сидеть рядом. Сколькими способами можно расставить таблички?

6. Сколько пятизначных чисел содержат все цифры 1, 2, 3, 4, 5? Сколько содержат все цифры 0, 2, 4, 6, 8?

7. Найдите сумму всех пятизначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, что в каждом числе ни одна цифра не повторяется.

8. В комиссию выбрали 10 человек. Из них нужно выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

9. Сколько нечётных и сколько чётных четырёхзначных чисел можно составить из цифр числа 3694, если каждую цифру нужно использовать один раз?

10. Сколькими способами 5 человек могут рассесться на одной скамье?

После этого можно перейти к размещениям с повторениями. Возвращаясь к множеству шариков, предположим теперь, что каждый из шариков мы можем выбрать не один, как до этого, а любое наперёд заданное количество раз (как файл, который можно многократно копировать). В остальном правила игры не меняются: упорядоченность наших выборов по-прежнему важна. Очевидно, что количество выбираемых шариков может в общем случае превысить мощность их множества. Именно этим и отличаются *размещения с повторениями*. После строго сформулированного определения можно предложить такую задачу: *из цифр 1 и 2 составить все возможные трёхзначные числа*. За решением задачи перебором следуют формула:  $A_n^k = n^k$  и проверка решения новой формулой.

*Перестановки с повторениями (заданного состава)* возникают тогда, когда требуется выбрать из  $n$  пронумерованных элементов  $k$ , причём 1-й выбираем  $k_1$  раз, 2-й выбираем  $k_2$  раз, ...,  $n$ -й выбираем  $k_n$  раз, где

$k = \sum_{i=1}^n k_i$ . Пример задачи: *составить всевозможные четырёхбуквенные комбинации из букв А и Б*. Расчётная формула:

$$P(k_1, \dots, k_n) = \frac{k!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!}.$$

*Примеры задач на размещения и перестановки с повторениями*

1. Сколько чисел, меньших миллиона, можно написать с помощью цифр: а) 8 и 9; б) 7, 8, 9; в) 0, 8, 9?

2. Сколько можно составить из 32 букв шестибуквенных слов, содержащих хотя бы один раз букву «а»?

3. В селении проживают 1000 жителей. Докажите, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы.

4. Сколькими способами может сдать ваша группа экзамен, если известно, что никто из студентов не получит неудовлетворительную оценку?

5. На перекрёстке стоят  $m$  светофоров. Сколько может быть дано сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния?

6. Сколькими способами можно расставить 10 карандашей разного цвета по двум стаканам?

7. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова наибольшая численность населения такого государства?

8. Сколько всего изображений может быть выведено на экран разрешением  $1280 \times 720$  пикс. в цветовой палитре RGB (красный, зелёный, синий, причём каждая составляющая цвета принимает значение от 0 до 255)?

9. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в словах: «параллелепипед», «Эйфьядлайёкюдль», «математика», «парабола», «Антананариву», «Эльгыгтыгын», «достопримечательность»?

10. Сколькими способами можно расставить на полке 5 книг по квантовой механике, 3 книги по термодинамике и 2 книги по астрономии, если по каждому предмету книги одинаковые?

*Сочетания без повторений.* Чтобы объяснить их смысл, вновь вернёмся к нашему множеству шариков. Как и в самом первом случае, нам разрешается выбрать из него некоторое количество шаров, не превышающее

мощность множества. Но теперь упорядочивать выбранные шары не нужно. Таким образом, две *разные* выборки отличаются *только составом*, а не порядком следования. После сформулированного определения можно предложить учащимся *составить из элементов множества  $\{1,2,3,4,5\}$  всевозможные сочетания по три*. Проверяем задачу формулой:  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Сравнивая последнюю с формулой для размещений без

повторений, можно подтолкнуть учащихся к самостоятельному её доказательству. Хорошим примером, подчёркивающим родство этих понятий, послужит задача: *сколькими способами из спортивного клуба, насчитывающего 20 членов, можно составить команду из четырёх человек для а) перетягивания каната; б) эстафеты 100+200+400+800?* Из соображений здравого смысла и физических возможностей спортсменов в первом случае будут сочетания, а во втором – размещения без повторений.

*Примеры задач на сочетания без повторений*

1. Труппа состоит из 10 артистов. Сколькими способами можно выбирать из неё в течение двух вечеров по 6 человек для участия в спектаклях так, чтобы эти составы не совпадали друг с другом?

2. Из состава конференции, на которой присутствуют 52 человека, нужно избрать президиум в составе 5 человек и делегацию в составе 3 человек. Сколькими способами может быть произведен выбор, если члены президиума могут войти в состав делегации? А если члены президиума не могут войти в состав делегации?

3. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, нужно выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это может быть сделано?

4. У Миши 6 друзей, и ежедневно он приглашает к себе в гости троих из них так, что компания ни разу не повторяется. Сколькими способами он может это сделать?

5. Имеются ёлочные игрушки 50 видов. Сколькими способами можно выбрать 40 из них (все игрушки должны быть разными)?

6. Даны натуральные числа от 1 до 30. Сколькими способами можно выбрать из них три числа так, чтобы их сумма была чётной?

7. Сколькими способами можно назначить отряд из 5 казаков, если у атамана в подчинении сотня?

*Сочетания с повторениями* также имеют нечто общее, но уже с размещениями с повторениями, нет лишь упорядоченности выбора. Пример задачи на ручной перебор: *составить всевозможные трёхбуквенные сочетания из букв А и Б*. Расчётная формула:  $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ .

*Примеры задач на сочетания с повторениями*

1. Сколько существует треугольников, у которых длина каждой стороны принимает одно из значений: 4, 5, 6, 7?

2. В книжном магазине продаются открытки 15 видов. Сколькими способами можно взять набор из 7 открыток, если открыток каждого вида не менее 7?

3. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длины их рёбер выражаются любым целым числом от 1 до 10?

Необходимо научить студентов при определении метода решения той или иной комбинаторной задачи задавать себе три главных вопроса: «Важен ли порядок следования?», «Повторяются ли элементы?», «Совместны или несовместны выборы в задаче, если их несколько?». Выше была приведена база курса. Её можно и нужно расширять, добавив, например, формулу включений и исключений, задачи на размещение по кругу и пр. Всё зависит от количества часов, специальности и реальных возможностей студентов.

#### Список литературы

1. Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика. М.: ФИМА; МЦНМО, 2006. 400 с.

#### “ELEMENTS OF COMBINATORICS” IN MATHEMATICS COURSES OF HIGHER PEDAGOGICAL SCHOOL

Koveshnikov Evgenii Valerievich  
Far Eastern Federal University  
Yujin-k@list.ru

The article considers the methodology of teaching “Elements of Combinatorics” to the first-year bachelors of pedagogical higher education establishments of the specialty “Mathematics” during summer practice, and as a part of the basic Mathematics course for the senior students of non-mathematical specialties. The author presents a small selection of practical tasks.

*Key words and phrases:* Combinatorics; rule of sum; rule of product; arrangements without repetitions; arrangements with repetitions; permutations without repetitions; permutations with repetitions; combinations without repetitions; combinations with repetitions.