Федотов Анатолий Александрович

ОБ УРАВНЕНИИ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОЙ ВИХРЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В статье рассматривается нелинейная задача о нестационарном обтекании бесконечно тонкого крыла безграничной идеальной несжимаемой жидкостью. Обтекание происходит с образованием поверхности тангенциального разрыва скорости жидкости, сходящей в поток с кромки стекания крыла. Крыло и поверхность тангенциального разрыва представляются, соответственно, несущей и свободной вихревой поверхностями. Показано, что определение скорости движения свободной вихревой поверхности, принятое в теории несущей поверхности, является достаточным условием для замыкания системы уравнений, описывающей нестационарное обтекание идеальной несжимаемой жидкостью бесконечно тонкого крыла конечного размаха.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2015/7/36.html

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2015. № 7 (97). C. 132-138. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2015/7/

5. **Субхангулов Р. Р.** Основные направления политики модернизации сельскохозяйственной отрасли России // Интеграция науки и бизнеса в агропромышленном комплексе: материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 70-летию Курганской ГСХА (24-25 апреля 2014 г.). Курган: Изд-во Курганской ГСХА, 2014. С. 301-304.
6. **Черногор И. А.** К вопросу о продовольственной безопасности России // Сборники конференций НИЦ «Социосфера». 2015. № 15. С. 51-54.
7. **Черногор И. А.** Продовольственная безопасность в России: экономическая и физическая доступность // Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире. 2014. Т. 2. № 8. С. 20-24.

ON THE ISSUE OF IMPROVING THE STRUCTURE OF AGRICULTURAL PRODUCTS MANUFACTURE AND SALE AT THE ENTERPRISE

Subkhangulov Rustem Raisovich
Ufa Law Institute of the Ministry of Internal Affairs of the Russian Federation
55671@rambler.ru

The article sets a task to determine the economic impact of the enterprise activity. The author models two scenarios of production development by the example of a typical enterprise of the Pre-Ural steppe zone of the Republic of Bashkortostan, the agricultural production cooperative named after Salavat of the municipal district of Meleuz district. The first scenario takes into account the criterion of optimization as the maximum amount of the compensation of fixed costs, and the second one takes into consideration maximum profit. The analysis of model matrixes solutions shows that the use of the optimization criterion “the maximum amount of the compensation of the fixed costs” in the organization is the most effective variant due to the optimal combination of the structure of production and sales.

Key words and phrases: competition; combination of industries; revenue; marginal income; agriculture.

УДК 532.5
Физико-математические науки

В статье рассматривается нелинейная задача о нестационарном обтекании бесконечно тонкого крыла безграничной идеальной несжимаемой жидкостью. Обтекание происходит с образованием поверхности тангенциального разрыва скорости жидкости, сходящей в поток с кромки стекания крыла. Крыло и поверхность тангенциального разрыва представляются, соответственно, несущей и свободной вихревой поверхностями. Показано, что определение скорости движения свободной вихревой поверхности, принятое в теории несущей поверхности, является достаточным условием для замыкания системы уравнений, описывающей нестационарное обтекание идеальной несжимаемой жидкостью бесконечно тонкого крыла конечного размаха.

Ключевые слова и фразы: крыло; поверхность тангенциального разрыва; несущая поверхность; свободная вихревая поверхность; поверхностный вектор вихря.

Федотов Анатолий Александрович, к. ф.-м. н., доцент
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
le-tail@list.ru

ОБ УРАВНЕНИИ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОЙ ВИХРЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ©

В [1-3; 6-8] на основе теории несущей поверхности исследуется нелинейная задача о нестационарном обтекании бесконечно тонкого крыла безграничной идеальной несжимаемой жидкостью. Обтекание происходит с образованием поверхности тангенциального разрыва скорости жидкости, сходящей в поток с кромки стекания крыла. Крыло и поверхность тангенциального разрыва представляются, соответственно, несущей и свободной вихревой поверхностями. В постановке задачи в [Там же] полагается, что свободная вихревая поверхность движется со скоростью, равной полусумме предельных значений скорости жидкости при подходе с разных сторон к свободной вихревой поверхности. В настоящей работе показывается, что указанное определение скорости движения свободной вихревой поверхности является достаточным условием для замыкания системы уравнений, описывающей нестационарное обтекание идеальной несжимаемой жидкостью бесконечно тонкого крыла конечного размаха.

1. Постановка задачи

Введем в рассмотрение неподвижную прямоугольную декартову систему координат x^1, x^2, x^3. Поток на бесконечности будем считать однородным с постоянным вектором скорости $\vec{V}_\infty$, параллельным оси x^1 и направленным в положительную сторону этой оси. Полагаем, что бесконечно тонкое крыло схематизирует собой реальное крыло, имеющее закругленную кромку, обтекающуюся без отрыва потока, и острую кромку, с которой в поток жидкости плавно стекает вихревой след, возникающий за крылом при его движении. Поэтому считаем, что кромка рассматриваемого бесконечно тонкого крыла состоит из кромки натекания L_s, обтекающейся без отрыва, на которую действует подсасывающая сила [4], и кромки стекания L_w, с которой в поток жидкости сходит поверхность тангенциального разрыва скорости жидкости, моделирующая вихревой след за реальным крылом (Рис. 1).

Обозначим крыло и поверхность тангенциального разрыва скорости жидкости через s и w, соответственно.

Пусть

$$x_s^k = f_s^k(a^1, a^2, t), \quad 0 \le a^1 \le 1, \quad -1 \le a^2 \le 1 \tag{1}$$

– уравнения движения крыла s, а

$$x_w^k = f_w^k(b^1, b^2, t), \quad b_0^1(t) \le b^1 \le 0, \quad -d \le b^2 \le d \tag{2}$$

– уравнения движения поверхности тангенциального разрыва скорости жидкости w. Здесь $k = 1, 2, 3$; t – время, отсчитываемое от начального нулевого момента $t = 0$; $b_0^1(t) = c \cdot t$; $c < 0$ и $d > 0$ – константы, выбираемые при параметризации поверхности w из удобства вычислений; a^1, a^2 и b^1, b^2 – лагранжевы координаты поверхностей s и w, соответственно. Передняя кромка $a^1 = 0$, $-1 \le a^2 \le 1$ является кромкой натекания L_s, задняя $a^1 = 1$, $-1 \le a^2 \le 1$ и боковая $0 \le a^1 \le 1$, $a^2 = \pm 1$ кромки составляют кромку стекания L_w (Рис. 1). Закон движения крыла (1) задан, а закон движения поверхности тангенциального разрыва (2) предстоит определить в процессе решения задачи.

Далее для лагранжевых координат поверхностей s и w будем использовать также обозначения a_σ^1 и a_σ^2, где индекс σ будет принимать два «значения» $\sigma = s$ и $\sigma = w$ такие, что

$a_s^1 = a^1$, $a_s^2 = a^2$, $a_w^1 = b^1$, $a_w^2 = b^2$; $p_\sigma \le a_\sigma^1 \le q_\sigma$;

$-l_\sigma \le a_\sigma^2 \le l_\sigma$; $p_s = 0$, $q_s = 1$, $l_s = 1$, $p_w = c \cdot t$, $q_w = 0$, $l_w = d$.

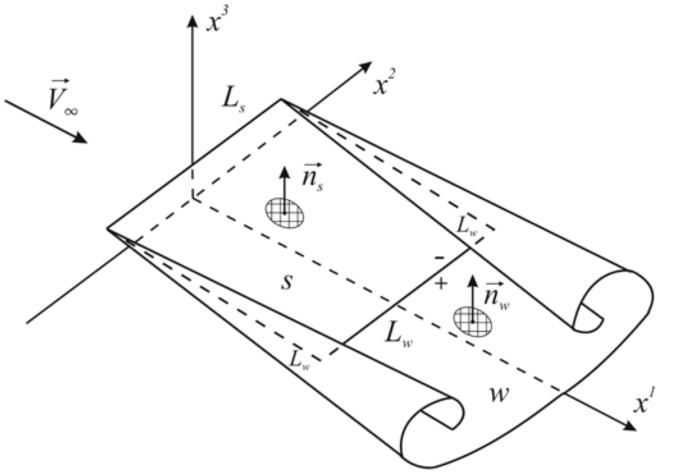

Рис. 1

Введем еще следующую систему обозначений. Пусть $\vec{r} = x^k \vec{e}_k$ – радиус-вектор точки наблюдения, где $\vec{e}_k$ – единичные векторы базиса декартовой системы координат x^1, x^2, x^3 (здесь и далее по повторяющемуся в произведениях индексу проводится суммирование); $r = |\vec{r}|$, $\vec{r}_\sigma = x_\sigma^k \vec{e}_k$ – радиусы-векторы произвольных точек крыла $s\ (\sigma = s)$ и поверхности тангенциального разрыва скорости жидкости $w\ (\sigma = w)$; $\vec{\mathfrak{z}}_{i\sigma} = \partial \vec{r}_\sigma / \partial a_\sigma^i$, $i = 1, 2$ – базисные векторы лагранжевой системы координат a_σ^1, a_σ^2; $\vec{n}_\sigma = (\vec{\mathfrak{z}}_{1\sigma} \times \vec{\mathfrak{z}}_{2\sigma}) / e_{12\sigma}$ – единичный вектор нормали к поверхности σ, где $e_{12\sigma} = |\vec{\mathfrak{z}}_{1\sigma} \times \vec{\mathfrak{z}}_{2\sigma}|$.

Предположим, что всюду вне поверхностей s и w движение жидкости потенциально. Тогда потенциал $\Phi(\vec{r}, t)$ скоростей возмущений, вызванных возмущающим действием крыла на однородный поток, всюду вне поверхностей s и w удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{r} \notin s \cup w, \tag{3}$$

где Δ – оператор Лапласа.

В соответствии с предположением о безотрывном обтекании поверхности крыла потребуем выполнение условия непротекания жидкости через поверхность крыла s

$$\left(\nabla \Phi + \vec{V}_\infty - \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial t} \right) \cdot \vec{n}_s = 0, \quad \vec{r} \in s. \tag{4}$$

Здесь $\vec{V}_\infty = V_\infty^k \vec{e}_k = V_\infty \vec{e}_1$; $\dfrac{\partial \vec{r}_s}{\partial t} = \dfrac{\partial f_s^k(a^1, a^2, t)}{\partial t}\vec{e}_k$ – скорость произвольной точки крыла.

При переходе через поверхность тангенциального разрыва скорости жидкости w должны соблюдаться динамическое условие непрерывности давления и кинематическое условие непрерывности нормальной составляющей скорости жидкости

$$p_+ = p_-, \quad \left[(\nabla\Phi)_+ - (\nabla\Phi)_-\right]\cdot \vec{n}_w = 0, \quad \vec{r} \in w, \tag{5}$$

где $p = p(\vec{r}, t)$. Индексами плюс и минус здесь и в дальнейшем обозначаются предельные значения функций при подходе к поверхности $\sigma = w$ $(\sigma = s)$ с нижней и верхней сторон соответственно, $\vec{n}_\sigma$ – единичный вектор нормали к верхней стороне поверхности σ.

Кроме того, на бесконечном удалении от крыла s и поверхности w возмущенное движение жидкости должно затухать,

$\lim \nabla\Phi = 0$, на бесконечности. (6)

На острых кромках крыла в любой момент времени должен выполняться постулат Жуковского-Чаплыгина о конечности скорости жидкости [Там же]. Выполнение этого условия обеспечивается фиксированием линии схода поверхности тангенциального разрыва скорости жидкости w на острых кромках крыла. Поскольку в точках кромки стекания L_w (как в точках, принадлежащих и поверхности крыла, и поверхности w) должны выполняться граничные условия (4) и (5), то из постулата Жуковского-Чаплыгина следует, что в точках кромки L_w имеют место следующие соотношения

$$p_+ = p_-, \quad \left(\nabla\Phi + \vec{V}_\infty - \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial t}\right)\cdot \vec{n}_s = 0, \quad \vec{r} \in L_w. \tag{7}$$

Заметим, что система уравнений (3)-(7) является нелинейной. Нелинейность системы связана с тем, что подвижная граница жидкости – поверхность тангенциального разрыва скорости жидкости (2) – заранее не известна, а подлежит определению в процессе решения задачи. При заданных начальных условиях задача состоит в нахождении потенциала возмущенных скоростей $\Phi(\vec{r}, t)$, удовлетворяющего граничным условиям (4)-(7).

Эффективным методом решения сформулированной задачи является метод интегро-дифференциальных уравнений [2; 3]. Задача о нахождении гармонической функции, удовлетворяющей граничным условиям (4)-(7), сводится к задаче об отыскании системы вихрей, индуцирующих искомое поле скоростей [2; 3; 6-8]. Крыло и поверхность тангенциального разрыва скорости жидкости будем рассматривать соответственно как несущую вихревую $(\sigma = s)$ и свободную вихревую $(\sigma = w)$ поверхности с векторами интенсивностей завихренностей [2]

$$\vec{\Omega}_\sigma = \vec{n}_\sigma \times (\vec{V}_- - \vec{V}_+), \tag{8}$$

где $\vec{V}$ – скорость жидкости.

Введем следующее определение. Назовем поверхностным вектором вихря в точке (a_σ^1, a_σ^2) вихревой поверхности σ вектор

$$\vec{\gamma}_\sigma(a_\sigma^1, a_\sigma^1, t) = e_{12\sigma}\cdot \vec{\Omega}_\sigma(a_\sigma^1, a_\sigma^1, t). \tag{9}$$

Несущая вихревая поверхность или, короче, несущая поверхность определяется как система непрерывно распределенных по поверхности крыла поверхностных вихрей, жестко связанных с крылом. Уравнениями движения несущей поверхности являются уравнения движения крыла (1). На несущей поверхности существует перепад давления. Система поверхностных вихрей, вмороженная в поверхность тангенциального разрыва скорости жидкости, движущаяся по закону (2), который предстоит определить в процессе решения задачи, называется свободной вихревой поверхностью. На свободной вихревой поверхности, как на поверхности тангенциального разрыва скорости жидкости, давление и нормальная составляющая скорости жидкости непрерывны.

Далее все величины, которые до сих пор характеризовали крыло и поверхность тангенциального разрыва скорости жидкости, будем считать величинами несущей и свободной вихревой поверхностей, соответственно.

2. Уравнение движения свободной вихревой поверхности. Уравнение изменения поверхностных вихрей свободной вихревой поверхности

Получим уравнение для определения закона движения свободной вихревой поверхности и уравнение изменения поверхностных вихрей свободной вихревой поверхности. Поскольку речь будет идти только о свободной вихревой поверхности, индекс w в обозначениях величин будем опускать. Будем пользоваться двумя группами индексов: i, j, k и α, β. Индексы первой группы будут меняться от 1 до 3, а индексы второй группы будут принимать значения 1 и 2.

Введем в рассмотрение подвижную криволинейную систему координат b^1, b^2, b^3, связанную со свободной вихревой поверхностью w так, что в этой системе координат $b^3 = 0$ является уравнением поверхности w и при $b^3 = 0$ координаты b^1 и b^2 являются лагранжевыми координатами поверхности w. Имеем

$x^k = x^k(b^1, b^2, b^3, t), \quad k = 1, 2, 3;$

$$\vec{r}\left(x^1(b^1,b^2,b^3,t),x^2(b^1,b^2,b^3,t),x^3(b^1,b^2,b^3,t)\right)=$$
$$x^k(b^1,b^2,b^3,t)\cdot \mathrm{\vec{e}}_k=\vec{r}(b^1,b^2,b^3,t); \tag{10}$$
$$\vec{\mathfrak{э}}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial b^i},\ g_{ij}=(\vec{\mathfrak{э}}_i\cdot\vec{\mathfrak{э}}_j),\ \vec{\mathfrak{э}}^i=g^{ij}\vec{\mathfrak{э}}_j,\ \ i,j=1,2,3;\ e_{12}=\left|\vec{\mathfrak{э}}_1\times\vec{\mathfrak{э}}_2\right|,$$

где $\vec{\mathfrak{э}}_i$ и $\vec{\mathfrak{э}}^i$ – соответственно ковариантные и контравариантные векторы базиса криволинейной системы координат; g_{ij} и g^{ij} – соответственно ковариантные и контравариантные компоненты фундаментального метрического тензора g [5].

Координатные линии $(b^1=const,\ b^2=const)$ криволинейной системы b^1,b^2,b^3 вводятся так, чтобы выполнялось равенство

$$\vec{\mathfrak{э}}_3=\frac{\partial\vec{r}(b^1,b^2,b^3,t)}{\partial b^3}=\vec{\mathfrak{э}}_1\times\vec{\mathfrak{э}}_2, \tag{11}$$

т.е. указанные координатные линии выбираются перпендикулярными поверхностям $b^3=const$. Для дальнейшего отметим, что ортогональность базисного вектора $\vec{\mathfrak{э}}_3$ базисным векторам $\vec{\mathfrak{э}}_1$ и $\vec{\mathfrak{э}}_2$ означает равенство нулю компонент $g_{\alpha 3}$ и $g_{3\alpha}$ метрического тензора g.

Введем обозначения

$$\tilde{\vec{V}}(b^1,b^2,b^3,t)=\frac{\partial\vec{r}(b^1,b^2,b^3,t)}{\partial t},$$
$$\vec{r}_0(b^1,b^2,t)=\vec{r}(b^1,b^2,0,t),\ \vec{V}_0(b^1,b^2,t)=\tilde{\vec{V}}(b^1,b^2,0,t), \tag{12}$$

где $\tilde{\vec{V}}(b^1,b^2,b^3,t)$ – поле скоростей, связанное с системой координат b^1,b^2,b^3; $\vec{r}_0(b^1,b^2,t)$ и $\vec{V}_0(b^1,b^2,t)$ – соответственно, радиус-вектор и скорость произвольной точки свободной вихревой поверхности.

Запишем выражение для поверхностного вектора вихря (9) в виде

$$\vec{\gamma}(b^1,b^2,t)=\left[[\vec{\mathfrak{э}}_1\times\vec{\mathfrak{э}}_2]\times\vec{W}\right], \tag{13}$$

где $\vec{W}=\vec{V}_- - \vec{V}_+$, причем $\vec{W}=W^i\vec{\mathfrak{э}}_i=W_j\vec{\mathfrak{э}}^j$, $W^i=V^i_- - V^i_+$, $W_j=V_{-j}-V_{+j}$. Здесь V^i_-, V^i_+, W^i и V_{-j}, V_{+j}, W_j – соответственно, контравариантные и ковариантные компоненты предельных значений векторов скорости жидкости $\vec{V}_-$ и $\vec{V}_+$ и скорости $\vec{W}$. Поскольку на поверхности w нормальные составляющие к поверхности w скорости жидкости непрерывны, то $W^3=0$, а так как $W_3=g_{3i}W^i=g_{3\alpha}W^\alpha$, то и $W_3=0$ (вспомним, что $g_{3\alpha}\equiv 0$). Таким образом, можем написать, что $\vec{W}=W^\alpha\vec{\mathfrak{э}}_\alpha=W_\beta\vec{\mathfrak{э}}^\beta$.

По определению свободной вихревой поверхности поверхностные вихри $\vec{\gamma}$ вморожены в поверхность w. Это значит, что движение вихревой линии на поверхности w и линии поверхности w, с которой вихревая линия совпадала в некоторый момент времени, происходит по одному и тому же закону. Бесконечно малый элемент $d\vec{r}_0$ поверхности w, совпадающий в данный момент времени с элементом вихревой линии $\varepsilon\vec{\gamma}$ ($d\vec{r}_0=\varepsilon\vec{\gamma}$, ε – малая постоянная величина), движется в соответствии с уравнением [Там же]

$$\frac{d(d\vec{r}_0)}{dt}=\left(d\vec{r}_0\cdot\nabla\right)\vec{V}_0. \tag{14}$$

Из условия вмороженности поверхностных вихрей $\vec{\gamma}$ и уравнения (14) следует, что вектор $\vec{\gamma}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt}=\left(\vec{\gamma}\cdot\nabla\right)\vec{V}_0. \tag{15}$$

Запишем уравнение (15) в криволинейной системе координат b^1,b^2,b^3:

$$\frac{\partial\gamma^\alpha}{\partial t}\vec{\mathfrak{э}}_\alpha+\gamma^\alpha\frac{\partial\vec{\mathfrak{э}}_\alpha}{\partial t}=\gamma^\alpha\frac{\partial\vec{V}_0}{\partial b^\alpha}. \tag{16}$$

Поскольку

$$\frac{\partial\vec{\mathfrak{э}}_\alpha}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{r}_0}{\partial b^\alpha}\right)=\frac{\partial\vec{V}_0}{\partial b^\alpha}, \tag{17}$$

то из (16) следует, что

$$\frac{\partial\gamma^\alpha}{\partial t}\vec{\mathfrak{э}}_\alpha=0,$$

или

$$\frac{\partial \gamma^{\alpha}}{\partial t} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{18}$$

Преобразуем выражение (13) для вектора $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{э}_1 + \gamma^2 \vec{э}_2 = \left[[\vec{э}_1 \times \vec{э}_2] \times \vec{W} \right] = -\left[\vec{W} \times [\vec{э}_1 \times \vec{э}_2] \right] =$$

$$= -\vec{э}_1 \left(\vec{W} \cdot \vec{э}_2 \right) + \vec{э}_2 \left(\vec{W} \cdot \vec{э}_1 \right) = -\vec{э}_1 W^{\alpha} \left(\vec{э}_{\alpha} \cdot \vec{э}_2 \right) + \vec{э}_2 W^{\alpha} \left(\vec{э}_{\alpha} \cdot \vec{э}_1 \right) =$$

$$= -W^{\alpha} g_{\alpha 2} \vec{э}_1 + W^{\alpha} g_{\alpha 1} \vec{э}_2 = -W_2 \vec{э}_1 + W_1 \vec{э}_2,$$

т.е. $\gamma^1 = -W_2$, $\gamma^2 = W_1$. В соответствии с уравнением (18) имеем

$$\frac{\partial W_{\alpha}(b^1, b^2, t)}{\partial t} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{19}$$

Так как

$$W_{\alpha} = g_{\alpha\beta} W^{\beta},$$

то

$$\frac{\partial W_{\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} W^{\beta} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial W^{\beta}}{\partial t}. \tag{20}$$

Вычислим $\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}$:

$$g_{\alpha\beta} = \vec{э}_{\alpha} \cdot \vec{э}_{\beta},$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{э}_{\alpha}}{\partial t} \vec{э}_{\beta} + \vec{э}_{\alpha} \frac{\partial \vec{э}_{\beta}}{\partial t}. \tag{21}$$

В силу соотношений (17) выражение (21) переписывается в виде

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{V}_0}{\partial b^{\alpha}} \vec{э}_{\beta} + \vec{э}_{\alpha} \frac{\partial \vec{V}_0}{\partial b^{\beta}} = \nabla_{\alpha} V_0^k (\vec{э}_k \cdot \vec{э}_{\beta}) + \nabla_{\beta} V_0^k (\vec{э}_k \cdot \vec{э}_{\alpha}) =$$

$$= \nabla_{\alpha} V_0^k g_{k\beta} + \nabla_{\beta} V_0^k g_{k\alpha} = \nabla_{\alpha} V_{0\beta} + \nabla_{\beta} V_{0\alpha}, \tag{22}$$

где $\nabla_{\alpha} V_0^k, \nabla_{\beta} V_0^k$ и $\nabla_{\alpha} V_{0\beta}, \nabla_{\beta} V_{0\alpha}$ – соответственно, ковариантная производная контравариантных и ковариантных компонент вектора $\vec{V}_0$ [Там же].

Для того чтобы вычислить $\dfrac{\partial W^{\beta}}{\partial t}$, рассмотрим уравнение движения идеальной несжимаемой жидкости, в которой всюду вне поверхности w $\operatorname{rot} \vec{V} = 0$,

$$\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right)_{x^k} = -\nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \nabla p, \tag{23}$$

где V – модуль скорости жидкости $\vec{V} : V = |\vec{V}|$; $\left(\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right)_{x^k}$ – производная по времени от скорости жидкости $\vec{V}$ при фиксированных декартовых координатах x^k (локальная производная).

Запишем уравнения движения жидкости в нашей криволинейной системе координат b^1, b^2, b^3. При этом учтем, что

$$\vec{V}\left(x^1(b^1, b^2, b^3, t), x^2(b^1, b^2, b^3, t), x^3(b^1, b^2, b^3, t) \right) = \vec{V}(b^1, b^2, b^3, t),$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{V}(b^1, b^2, b^3, t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right)_{x^k} + \left(\frac{\partial x^i}{\partial t} \right)_{b^k} \cdot \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^i} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right)_{x^k} + \left(\tilde{\vec{V}} \cdot \nabla \right) \vec{V}.$$

Уравнение (23) в криволинейной системе координат b^1, b^2, b^3 запишется в виде

$$\frac{\partial V^i}{\partial t} \vec{э}_i + V^i \frac{\partial \vec{э}_i}{\partial t} = -g^{ik} \nabla_k \left(\frac{V^2}{2} \right) \vec{э}_i - \frac{1}{\rho} g^{ik} \nabla_k p \vec{э}_i + \tilde{V}^k \nabla_k V^i \vec{э}_i. \tag{24}$$

Умножим уравнение (24) скалярно на $\vec{э}^j$ и просуммируем по j:

$$\frac{\partial V^j}{\partial t} + V^i \left(\vec{э}^j \cdot \frac{\partial \vec{э}_i}{\partial t} \right) = -g^{jk} \nabla_k \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} g^{jk} \nabla_k p + \tilde{V}^k \nabla_k V^j. \tag{25}$$

Умножим теперь уравнение (25) на $g_{\alpha j}$ и снова просуммируем по j:

$$g_{\alpha j}\frac{\partial V^j}{\partial t}+V^i\left(\vec{э}_\alpha\cdot\frac{\partial\vec{э}_i}{\partial t}\right)=-\nabla_\alpha\left(\frac{V^2}{2}\right)-\frac{1}{\rho}\nabla_\alpha p+\tilde{V}^k\nabla_k V_\alpha. \tag{26}$$

В силу того, что

$$\frac{\partial\vec{э}_i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vec{r}}{\partial b^i}=\frac{\partial}{\partial b^i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}=\frac{\partial\tilde{\vec{V}}}{\partial b^i}=\nabla_i\tilde{V}^k\vec{э}_k,$$

$$\vec{э}_\alpha\cdot\frac{\partial\vec{э}_i}{\partial t}=\nabla_i\tilde{V}^k\vec{э}_k\cdot\vec{э}_\alpha=g_{\alpha k}\nabla_i\tilde{V}^k=\nabla_i\tilde{V}_\alpha$$

и

$\nabla_k V_\alpha=\nabla_\alpha V_k$ (т.к. $\operatorname{rot}\vec{V}=0$),

то

$$g_{\alpha j}\frac{\partial V^j}{\partial t}+V^i\nabla_i\tilde{V}_\alpha=-\nabla_\alpha\left(\frac{V^2}{2}\right)-\frac{1}{\rho}\nabla_\alpha p+\tilde{V}^k\nabla_\alpha V_k. \tag{27}$$

Теперь вычтем из уравнения, которое получается в пределе из уравнения (27) при подходе к поверхности $b^3=0$ со стороны нормали $\vec{n}$, аналогичное уравнение, получающееся из (27) при подходе к поверхности $b^3=0$ с противоположной стороны нормали. Получим

$$g_{\alpha j}\frac{\partial W^j}{\partial t}+W^\beta\nabla_\beta V_{0\alpha}+W^3\left((\nabla_3\tilde{V}_\alpha)_- -(\nabla_3\tilde{V}_\alpha)_+\right)=$$

$$=-\nabla_\alpha\left(\frac{V_-^2-V_+^2}{2}\right)-\frac{1}{\rho}\nabla_\alpha(p_- -p_+)+V_0^k\nabla_\alpha W_k. \tag{28}$$

Учитывая, что $W^3=0,\ W_3=0,\ p_-=p_+$,

$$\frac{V_-^2-V_+^2}{2}=\left(\frac{V_{-\beta}+V_{+\beta}}{2}\cdot W^\beta\right),\ V_0^\beta\nabla_\alpha W_\beta=V_{0\beta}\nabla_\alpha W^\beta,$$

и заменяя в (28) индексы $j,\ k$ на индекс β, уравнение (28) переписывается в виде

$$g_{\alpha\beta}\frac{\partial W^\beta}{\partial t}=-W^\beta\nabla_\beta V_{0\alpha}-\nabla_\alpha\left(\frac{V_{-\beta}+V_{+\beta}}{2}\cdot W^\beta\right)+V_{0\beta}\nabla_\alpha W^\beta. \tag{29}$$

Подставляя выражения (22) и (29) в (20), получаем

$$\frac{\partial W_\alpha}{\partial t}=W^\beta\nabla_\alpha V_{0\beta}+V_{0\beta}\nabla_\alpha W^\beta-\nabla_\alpha\left(\frac{V_{-\beta}+V_{+\beta}}{2}\cdot W^\beta\right),$$

т.е. $$\frac{\partial W_\alpha}{\partial t}=\nabla_\alpha\left[\left(V_{0\beta}-\frac{V_{-\beta}+V_{+\beta}}{2}\right)\cdot W^\beta\right]. \tag{30}$$

Следовательно, для того чтобы при движении свободной вихревой поверхности удовлетворялись уравнения (18), достаточно в уравнениях (30) считать, что

$$V_{0\beta}=\frac{V_{-\beta}+V_{+\beta}}{2},\ \beta=1,2. \tag{31}$$

Вспоминая, что нормальная составляющая скорости точки поверхности тангенциального разрыва равняется нормальной составляющей скорости жидкости с разных сторон поверхности тангенциального разрыва [Там же], из (31) следует, что достаточным условием вмороженности поверхностных вихрей в поверхность тангенциального разрыва скорости жидкости является равенство

$$\vec{V}_0=\frac{\vec{V}_-+\vec{V}_+}{2}. \tag{32}$$

При этом поверхностные вихри удовлетворяют уравнению

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt}=\left(\vec{\gamma}\cdot\nabla\right)\vec{V}_0 \tag{33}$$

или

$$\frac{\partial\gamma^\alpha}{\partial t}=0,\quad \alpha=1,2.$$

Таким образом, окончательно получаем, что в идеальной несжимаемой жидкости с полем скоростей $\vec{V}$ уравнение

$$\frac{\partial\vec{r}_0(b^1,b^2,t)}{\partial t}=\frac{\vec{V}_-+\vec{V}_+}{2}$$

и уравнение (33) являются, соответственно, уравнением движения свободной вихревой поверхности и уравнением изменения поверхностных вихрей свободной вихревой поверхности.

Заключение. Из выражения (30) следует, что вектором скорости произвольной точки свободной вихревой поверхности можно назвать любой вектор $\vec{V}_0$ с нормальной составляющей, равной нормальной составляющей скорости жидкости с разных сторон свободной вихревой поверхности, и касательные составляющие которого обращают в ноль правую часть выражения (30). В частности, скорость произвольной точки свободной вихревой поверхности можно определять как скорость, которая дается формулой (32). Такое определение скорости произвольной точки свободной вихревой поверхности и принято в теории несущей поверхности [1-3].

Список литературы

1. **Белоцерковский С. М., Ништ М. И.** Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.
2. **Зайцев А. А.** Теория несущей поверхности: математическая модель, численный метод, расчет машущего полета. М.: Наука, 1995. 160 с.
3. **Крылов Д. А., Сидняев Н. И., Федотов А. А.** Обтекание колеблющегося крыла потоком идеальной несжимаемой жидкости // Труды МГТУ им. Н. Э. Баумана. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. № 608. С. 74-92.
4. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
5. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 1. 536 с.; Т. 2. 576 с.
6. **Федотов А. А.** Исследование вихревой структуры за колеблющимся крылом // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XIX». Воронеж: ВГУ, 2008. С. 213-214.
7. **Федотов А. А.** Расчет вихревой структуры за крылом, работающим в режиме создания силы тяги // Альманах современной науки и образования. 2008. № 7 (14). С. 225-229.
8. **Федотов А. А.** Структура вихревого следа за крылом, работающим в режиме нормального трепещущего полета // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 1990. № 3. С. 42-46.

ABOUT THE EQUATION OF MOTION OF FREE VORTEX SURFACE IN IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID

Fedotov Anatolii Aleksandrovich, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor
Bauman Moscow State Technical University
le-tail@list.ru

The article examines a nonlinear problem about the unsteady flow of the infinitely thin wing by ideal incompressible fluid. The flow takes place with the formation of the surface of the tangential discontinuity of fluid speed descending to the stream from the edge of the wing motion. The wing and the surface of tangential discontinuity are represented, respectively, as a lifting surface and free vortex sheath. It is shown that the velocity definition of free vortex sheath accepted in the theory of lifting surface is a sufficient condition for the closure of equations system describing the unsteady flow by ideal incompressible fluid of the infinitely thin wing of final amplitude.

Key words and phrases: wing; surface of tangential discontinuity; lifting surface; free vortex sheath; surface vortex vector.

УДК 004.75
Технические науки

В статье рассматривается дистанционный метод создания моделей принятия решений для использования на портативных устройствах с наличием канала передачи данных. Делегирование вычислений для построения моделей позволяет получить выгоду на портативных устройствах, такую как экономия времени, вычислительных ресурсов и энергозатрат, при незначительных системных ограничениях. Проведены теоретические и практические сравнения с методом локальных вычислений и методом облачного распознавания данных.

Ключевые слова и фразы: машинное обучение; модель принятия решений; PMML; распределенные вычисления; облачные вычисления; мобильное устройство.

Ходорченко Антон Андреевич
Новосибирский государственный университет
anton.khodorchenko@gmail.com

МОБИЛЬНЫЕ РЕШАЮЩИЕ ПРАВИЛА С МАШИННЫМ ОБУЧЕНИЕМ В ОБЛАКЕ©

Рост производительности современных ПК и портативных устройств, таких как смартфоны, дает возможность использовать методы машинного обучения для решения практически любой задачи с целью