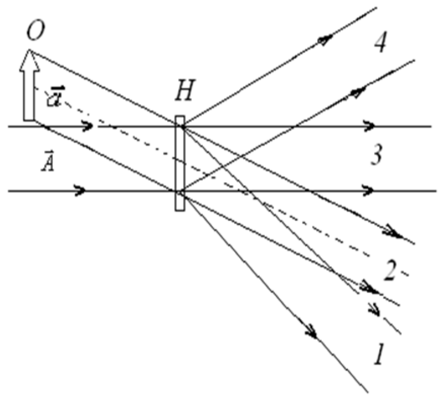

Рис. 2. *Схема восстановления интерферограммы прозрачного объекта в реальном времени*

В голографической интерферометрии реального времени наиболее целесообразным является использование интерферограмм, соответствующих проекционным изображениям, формируемым волнами 2 и 3, так как отпадает необходимость локализации полос на поверхности объекта и использования специальной оптики для наблюдения и регистрации интерферограмм. Эти особенности позволяют упростить и уменьшить габариты системы записи, съема и обработки интерферограмм прозрачных объектов в реальном времени.

Список литературы

1. **Исманов Ю. Х., Марипов А.** Алгоритм восстановления предметного поля из СВЧ-голограммы // Первая всесоюзная конференция по радиооптике: тезисы докладов. Фрунзе, 1981. С. 40-41.
2. **Maripov A., Ismanov Y.** The Talbot Effect (a Self-Imaging Phenomenon) in Holography // Journal of Optics. Paris, 1994. Vol. 25. № 1. P. 3-8.

RAINBOW HOLOGRAPHY IN INTERFEROMETRY

Ismanov Yusupzhan Khakimzhanovich, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor
Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture named after N. Isanov in Bishkek
i_yusupjan@mail.ru

The article discusses the possibility of using the method of slitless rainbow holography for the purposes of holographic interferometry. The author shows that the reconstruction of the rainbow hologram recorded by the slitless method with coherent radiation leads to the appearance of a number of effects that can be used both in real-time holographic interferometry and in double-exposure interferometry.

Key words and phrases: slitless rainbow holography; off-axis record; hologram; real-time interferometry; double exposure interferometry; phase object.

УДК 517.968
Физико-математические науки

Целью статьи являются нахождение достаточных условий единственности решения и построение регуляризирующего оператора по М. М. Лаврентьеву для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода применяются в различных прикладных задачах, в частности, в задачах сейсмологии. Чтобы достичь поставленной цели, автор сначала построил регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву для решения данного интегрального уравнения первого рода, а затем доказал теорему единственности, применив метод, предложенный И. Иманалиевым и А. Асановым.

Ключевые слова и фразы: линейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода; регуляризация по М. М. Лаврентьеву; единственность; достаточные условия; задачи сейсмологии.

Камбарова Айсалкын Даминовна
Ошский государственный университет, Кыргызстан
Aisalkyn.Kambarova@mail.ru

КЛАСС ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА НА ОСИ

Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\infty}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t), t\epsilon(-\infty,+\infty), \tag{1}$$

где $K(t,s)$ и $f(t)$ − заданные функции, $u(t)$ − неизвестная функция.

Различные аспекты интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода исследованы в работах [1-6]. В частности, в работе [4] доказаны теоремы единственности и построен регуляризирующий оператор для систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода на отрезке. В данной работе построен регуляризирующий оператор и доказана теорема единственности для решения уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать уравнение

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{t} K(t,s)v(s,\varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u_0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon -$ малый параметр,$u_0 = \lim_{t\to-\infty} u(t), u(t)$ −решение уравнения (1).

Введем обозначения:

1) Обозначим через $C(-\infty,+\infty)$ пространство всех функций $u(t)-$ непрерывных и ограниченных на $(-\infty,+\infty)$, $\|\cdot\|_C$ − норма в $C(-\infty,+\infty)$, т.е. для любого

$u(t)\epsilon C(-\infty,+\infty)$

$\|u(t)\|_C = \underset{t\epsilon(-\infty,\infty)}{Sup} |u(t)|.$

2) Через $L_1(-\infty,+\infty)$ обозначим пространство всех функций $u(t)$, таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|dt < \infty.$$

3) Обозначим через $C_0(-\infty,+\infty)$пространство всех функций $u(t)\epsilon C(-\infty,+\infty)$, таких, что $\lim_{t\to-\infty} u(t), = u_0\epsilon R$.

$\|u(t)\|_C = \underset{t\epsilon(-\infty,\infty)}{Sup} |u(t)|.$

4) Через $L_{1,loc}(-\infty,+\infty)$обозначим пространство всех функций $u(t)$, таких, что для любого $T\epsilon(-\infty,+\infty)$

$$\int_{-\infty}^{T} |u(t)|dt < \infty.$$

5) Обозначим через $C_0^1(-\infty,+\infty)$ пространство всех функций $u(t)\epsilon C_0(-\infty,+\infty)$, таких, что для любых $t\epsilon(-\infty,+\infty)$

$|\ u'(t)| \leq M_0\, K(t,t),$

где M_0 −положительная постоянная, $K(t,t)\epsilon L_{1,loc}(-\infty,+\infty)$ и $K(t,t) \geq 0$ при всех $t\ \epsilon\ (-\infty,+\infty)$.

Предположим выполнение следующих условий:

a) $K(t,t) \geq 0$ при всех $t\ \epsilon\ (-\infty,+\infty)$,

$$\int_{-\infty}^{t} |K(t,s)|ds\epsilon C(-\infty,+\infty), K(t,t)\epsilon L_{1,loc}(-\infty;+\infty).$$

b) Для любых $t_1,t_2\epsilon(-\infty;+\infty)$

$$|K(t_1,s)-K(t_2,s)| \leq l(s)\left|\int_{t_1}^{t_2} K(s,s)ds\right|,$$

где $0\leq l(t)$при всех $t\ \epsilon\ (-\infty,+\infty)$, $l(t)\epsilon L_1(-\infty;+\infty)$.

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$v(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), имеем

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds + [u_0 - u(t)].$$

Отсюда, используя резольвенту $R(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}$ядра $\left[-\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)\right]$, имеем

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds + [u_0 - u(t)] + \tag{4}$$

$$+ \int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\varepsilon}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\tau}[K(\tau,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)dsd\tau - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[u_0 - u(\tau)]d\tau.$$

Применяя формулу Дирихле, уравнение (4) запишем в виде

$$\xi(t,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{t} H(t,s,\varepsilon)\xi(s,\varepsilon)ds + \varphi(t,\varepsilon), t\epsilon(-\infty,+\infty), \tag{5}$$

где

$$H(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(s,s)] + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(\tau,s)-K(s,s)]\,d\tau, (t,s)\epsilon G, \quad (6)$$

$$\varphi(t,\varepsilon) = u_0 - u(t) - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[u_0 - u(\tau)]d\tau. \quad (7)$$

G={(t,s):-∞<s≤t<+∞}, $t\epsilon(-\infty,+\infty)$.

Теорема. Пусть выполняются условия а), б) и $u(t)\epsilon C_0^1(-\infty,+\infty)$, где $u(t)-$ решение уравнения (1). Тогда решение $\nu(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon\to 0$ стремится к решению $u(t)$ уравнения (1). При этом справедлива оценка

$$\|\nu(t,\varepsilon)-u(t)\|_C \le M_1\varepsilon, \quad (8)$$

где $M_1 = M_0\exp\{\int_{-\infty}^{\infty} l(s)ds\}, |\ u'(t)| \le M_0\, K(t,t),\ t\epsilon(-\infty,+\infty)$.

Доказательство. Учитывая формулы

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}d\tau = 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau},$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}d\tau = 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)d\tau},$$

из (6) получим

$$H(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(s,s)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,s)-K(\tau,s)]d\tau. \quad (9)$$

Интегрируя по частям, из (7) имеем

$$\varphi(t,\varepsilon) = \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\ u'(\tau)d\tau, t\epsilon R. \quad (10)$$

Учитывая условие б), из (9) получим

$$|H(t,s,\varepsilon)| \le$$

$$\le l(s)[\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\ l(s)[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau]d\tau =$$

$$= l(s)[\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} + l(s)\int_s^t \left[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau\right]d_\tau\left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\right].$$

Отсюда, интегрируя по частям, имеем

$$|H(t,s,\varepsilon)| \le l(s)\int_s^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)d\tau = l(s)\left[1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\right].$$

Из последнего неравенства получим

$$|H(t,s,\varepsilon)| \le l(s), (t,s)\epsilon G = \{(t,s): -\infty < s \le t < +\infty\} \quad (11),$$

в силу $u(t)\epsilon C_0^1(-\infty,+\infty)$, из (10) имеем

$$|\varphi(t,\varepsilon)| \le \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\ u'(\tau)d\tau \le M_0\int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\ K(\tau,\tau)d\tau \le M_0\varepsilon.$$

Отсюда получим

$$\|\varphi(t,\varepsilon)\|_C \le M_0\varepsilon. \quad (12)$$

Учитывая (11) и (12), из (5) имеем

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \int_{-\infty}^t l(s)|\xi(s,\varepsilon)|ds + M_0\varepsilon, t\epsilon(-\infty,+\infty). \quad (13)$$

Применяя формулу Гронуолла-Белмана, из (13) имеем (8). Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия а), б) и существует $\delta\epsilon(-\infty,+\infty)$, такое, что $K(t,t)>0$ почти при всех $t\epsilon(-\infty,\delta)$.Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $C_0^1(-\infty,+\infty)$.

Доказательство. Пусть $u(t) \in C_0^1(-\infty, +\infty)$ является решением уравнения (1) при $f(t) = 0, t\epsilon(-\infty, +\infty)$. В этом случае сначала в силу условий a), б) доказываем, что $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$. В самом деле

$$\int_{-\infty}^{t} K(t,s)u(s)ds = 0, t\epsilon(-\infty, +\infty).$$

Отсюда имеем

$$\int_{-\infty}^{t} K(s,s)u(s)ds = -\int_{-\infty}^{t} [K(t,s) - K(s,s)]u(s)ds, t\epsilon(-\infty, \delta). \quad (14)$$

В силу условий a) и b), из (14) имеем

$$|u(t^*)| \int_{-\infty}^{t} K(s,s)ds = |\int_{-\infty}^{t} K(s,s)u(s)ds| \leq \int_{-\infty}^{t} l(s)[\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau]ds \ \|u(t)\|_C,$$

где $-\infty < t^* \leq t \leq \delta$.

Из последнего неравенства получим

$$|u(t^*)| \leq \|u(t)\|_C \int_{-\infty}^{t} l(s)ds, -\infty < t^* \leq t < +\infty.$$

Отсюда вытекает, что

$\lim_{t\to-\infty} | u(t^*) | = 0$.

Далее, в силу оценки (8), доказывается u(t)=0 при всех $t\epsilon(-\infty, +\infty)$.

Пример. Рассмотрим уравнения (1) и (2) при

$$K(t,s) = \frac{|s|}{(1+s^2)^2}\left[\frac{1}{1+s^2} + \int_{s}^{t} \frac{|s|}{(1+s^2)^3}ds\right], (t,s)\epsilon G. \quad (15)$$

В этом случае условия теоремы выполняются при

$$K(s,s) = \frac{|s|}{(1+s^2)^3}, l(s) = \frac{|s|}{(1+s^2)^2}, s\epsilon(-\infty, +\infty).$$

В самом деле, в силу (15), для любых $t_1, t_2\epsilon(-\infty, +\infty)$ имеем

$$K(t_1,s) - K(t_2,s) = \frac{|s|}{(1+s^2)^2}\int_{t_2}^{t_1} \frac{|s|}{(1+s^2)^3}ds.$$

Отсюда

$$|K(t_1,s) - K(t_2,s)| \leq l(s)\left|\int_{t_1}^{t_2} K(s,s)\,ds\right|.$$

Поэтому утверждения теоремы справедливы для уравнений (1) и (2), когда K(t,s) определяется по формуле (15).

Список литературы

1. **Асанов А., Иманалиев М. И.** О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Доклады АН СССР. 1991. Т. 317. № 1. С. 22-35.
2. **Асанов А., Иманалиев М. И.** О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Доклады АН СССР. 1989. Т. 309. № 5. С. 1052-1055.
3. **Асанов А., Иманалиев М. И.** О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Доклады РАН. 2007. Т. 415. № 1. С. 14-17.
4. **Денисов А. М.** О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1980. № 3. С. 49-52.
5. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
6. **Магницкий Н. А.** Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. Т. 19. № 4. С. 970-988.

CLASS OF LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND ON THE AXIS

Kambarova Aisalkyn Daminovna
Osh State University, Kyrgyzstan
Aisalkyn.Kambarova@mail.ru

The aims of the article are to find the sufficient conditions of the uniqueness of the solution and to construct a regularizing operator according to M. M. Lavrent'ev for linear Volterra integral equations of the first kind on the axis. Linear Volterra integral equations of the first kind are used in various applied problems, in particular in the problems of seismology. To achieve this goal, the author at first built regularizing operators according to M. M. Lavrent'ev for the solution of the integral equation of the first kind, and then proved the uniqueness theorem using the method proposed by I. Imanaliev and A. Asanov.

Key words and phrases: linear Volterra integral equations of the first kind; regularization according to M. M. Lavrent'ev; uniqueness; sufficient conditions; problems of seismology.