Пыркова Ольга Анатольевна

ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В статье рассматриваются два способа решения краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Первый опирается на теорему о сведении в этом случае краевой задачи к задаче Коши для уравнения первого порядка, доказательство которой предваряет решение. Второй использует непосредственное решение краевой задачи с последующим разложением решения по формуле Тейлора.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2016. № 2 (104). C. 106-115. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2016/2/

CIVIL PROTECTION OF MEDICAL SECRECY

Pavlov Aleksandr Vasil'evich
Syktyvkar Medical College named after I. P. Morozov
avpavlovsdp2@yandex.ru

The article deals with the issues of the civil protection of the medical secrecy (patient confidentiality) of a citizen including as components the civil protection of this intangible benefit, as well as the civil regulation of the relations arising because of medical secrecy. The author investigates the topicality of the formation of legal regimes on the protection of medical secrecy.

Key words and phrases: civil protection; medical secrecy; civil regulation; intangible benefit; legal regime; preventive measures.

УДК 517.927.21
Физико-математические науки

В статье рассматриваются два способа решения краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Первый опирается на теорему о сведении в этом случае краевой задачи к задаче Коши для уравнения первого порядка, доказательство которой предваряет решение. Второй использует непосредственное решение краевой задачи с последующим разложением решения по формуле Тейлора.

Ключевые слова и фразы: дифференциальные уравнения; краевая задача; задача Коши; малый параметр; пограничный слой; формула Тейлора.

Пыркова Ольга Анатольевна, к. физ.-мат. н., доцент
Московский физико-технический институт (государственный университет)
opyr@mail.ru

ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Памяти Валентины Михайловны Ипатовой посвящается

Рассмотрим краевую задачу для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 2-го порядка с малым параметром ε при старшей производной:

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + ay' + by = f(x), & \alpha < x < \beta, \\ y(\alpha) = \mathrm{A}, & y(\beta) = \mathrm{B}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon,\ a,\ b \in \mathrm{R}$, $f(x) \in C^1([\alpha,\ \beta])$, $\varepsilon \neq 0$, $a \neq 0$.

Обозначим через $y(x,\ \varepsilon)$ решение краевой задачи (1).

Рассмотрим две вспомогательные задачи Коши для предельного (невозмущенного) дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} ay_1' + by_1 = f(x), & \alpha < x < \beta, \\ y_1(\beta) = \mathrm{B} \end{cases} \tag{2}$$

и

$$\begin{cases} ay_2' + by_2 = f(x), & \alpha < x < \beta, \\ y_2(\alpha) = \mathrm{A}. \end{cases} \tag{3}$$

Решим сначала задачу (2):

○ Решение однородного уравнения имеет вид: $y_1(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$.

Решение неоднородного уравнения находим методом вариации постоянного, полагая $C = C(x)$.

Тогда $C'(x) = \frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}x} f(x)$, и, с учетом начального условия, имеем $C(x) = -\frac{1}{a}\int_x^\beta e^{\frac{b}{a}\xi} f(\xi)\,d\xi + \mathrm{B}e^{\frac{b}{a}\alpha}$.

Окончательно получаем $y_1(x) = \mathrm{B}e^{\frac{b}{a}(\beta - x)} - \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{a}\int_x^\beta e^{\frac{b}{a}\xi} f(\xi)\,d\xi.$ ●

Аналогично получаем решение задачи Коши (3): $y_2(x) = \mathrm{A}e^{-\frac{b}{a}(x-\alpha)} + \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{a}\int\limits_{\alpha}^{x} e^{\frac{b}{a}\xi} f(\xi)\,d\xi.$

Замечание. Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ имеют непрерывные вторые производные на промежутке $[\alpha,\ \beta]$ в случае непрерывной дифференцируемости на нем правой части уравнений $f(x)$, т.к. $y''_{1,2}(x) = \frac{f'(x) - by'_{1,2}(x)}{a}$.

Напомним некоторые определения.

Определение 1. Пусть функция $\rho(\varepsilon)$ определена на некотором промежутке $(0,\ \mathrm{E})$. Говорят, что $\rho(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ (ρ является «О» большим от ε) при $\varepsilon \to 0+0$, если $\exists \varepsilon_0 \in (0,\ \mathrm{E})$ и $\exists C_0 > 0$ такие, что $\forall \varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0)$ имеет место неравенство $|\rho(\varepsilon)| \le C_0\varepsilon$.

Определение 2. Пусть функция $\rho(\varepsilon)$ определена на некотором промежутке $(-\mathrm{E},\ 0)$. Говорят, что $\rho(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ (ρ является «О» большим от ε) при $\varepsilon \to 0-0$, если $\exists \varepsilon_0 \in (-\mathrm{E},\ 0)$ и $\exists C_0 > 0$ такие, что $\forall \varepsilon \in (\varepsilon_0,\ 0)$ имеет место неравенство $|\rho(\varepsilon)| \le C_0|\varepsilon|$.

Определение 3. Пусть функция $u(x,\ \varepsilon)$ при $\alpha \le x \le \beta$ определена на некотором промежутке $(0,\ \mathrm{E})$. Говорят, что $u(x,\ \varepsilon) = O(\varepsilon)$ (u является «О» большим от ε) при $\varepsilon \to 0+0$, если $\exists \varepsilon_0 \in (0,\ \mathrm{E})$ и $\exists C_0 > 0$ такие, что $\forall \varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0)$ имеет место неравенство $\max\limits_{\alpha \le x \le \beta}|u(x,\ \varepsilon)| \le C_0\varepsilon$.

Определение 4. Пусть функция $u(x,\ \varepsilon)$ при $\alpha \le x \le \beta$ определена на некотором промежутке $(-\mathrm{E},\ 0)$. Говорят, что $u(x,\ \varepsilon) = O(\varepsilon)$ (u является «О» большим от ε) при $\varepsilon \to 0-0$, если $\exists \varepsilon_0 \in (-\mathrm{E},\ 0)$ и $\exists C_0 > 0$ такие, что $\forall \varepsilon \in (\varepsilon_0,\ 0)$ имеет место неравенство $\max\limits_{\alpha \le x \le \beta}|u(x,\ \varepsilon)| \le C_0|\varepsilon|$.

Определение 5. Пусть функция $g(\varepsilon)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\varepsilon = 0$: $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon^*}(0)$. Говорят, что $g(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ (g является «о» малым от ε) при $\varepsilon \to 0$, если для любого $c > 0$ найдется такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon_c}(0)$, что $\forall \varepsilon \in \overset{\circ}{U}_{\varepsilon_c}(0)$ имеет место неравенство $|g(\varepsilon)| < c \cdot \varepsilon$.

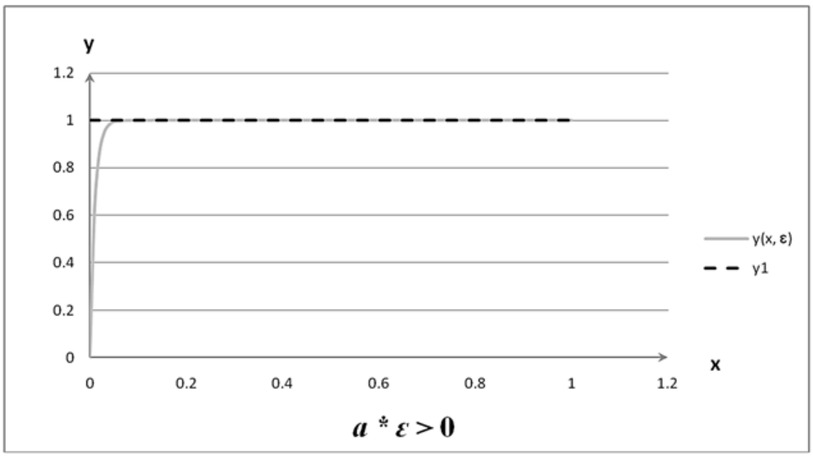
Иными словами, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$.

Замечание. Отметим, что Определения 3 и 4 содержат равномерную на $[\alpha,\ \beta]$ промежутке оценку.

Можно показать, что решение краевой задачи (1) существует и единственно при достаточно малых $|\varepsilon|$ [1].

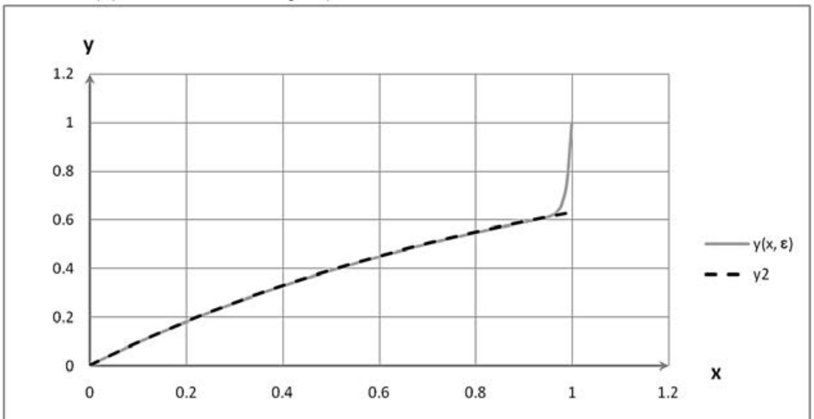
Причем, если $a \cdot \varepsilon > 0$, то в случае $a > 0$ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} y(x,\ \varepsilon) = y_1(x)$, а в случае $a < 0$ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0-0} y(x,\ \varepsilon) = y_1(x)$ при $x \in (\alpha,\ \beta]$.

Если $y_1(\alpha) \ne \mathrm{A}$, то на $(\alpha,\ \beta]$ имеет место неравномерная сходимость: вблизи левой границы $x = \alpha$ есть довольно тонкая полоса, в которой решения задач (1) и (3) сильно отличаются. В этой полосе решение задачи (1) сильно меняется: $|y'(x)|$ – сильно велико. Такие области – области сильного изменения решения, больших градиентов – называются **пограничным слоем** (погранслоем).



Если же $a \cdot \varepsilon < 0$, то в случае $a < 0$ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} y(x, \varepsilon) = y_2(x)$, а в случае $a > 0$ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0-0} y(x, \varepsilon) = y_2(x)$ при $x \in [\alpha, \beta)$.

Если при этом $y_2(\beta) \neq \mathrm{B}$, то сходимость на $[\alpha, \beta)$ – неравномерная: вблизи $x = \beta$ возникает погранслой.



$a * \varepsilon < 0$

Покажем это [1; 2].

Теорема. Если $a > 0$, $\varepsilon > 0$ и $f(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha, \beta]$, то краевая задача (1) для достаточно малых ε имеет и притом единственное решение. Это решение $y(x, \varepsilon)$ представимо в виде

$$y(x, \varepsilon) = y_1(x) + (\mathrm{A} - y_1(\alpha)) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-\alpha)} + u(x, \varepsilon), \tag{4}$$

где $y_1(x)$ – решение задачи (2) и $u(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$.

План доказательства

1. Найдем ФСР (фундаментальную систему решений) дифференциального уравнения задачи (1).
2. Покажем, что $y(x, \varepsilon) - y_1(x) - v(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$, где $v(x, \varepsilon)$ – быстро меняющееся решение из ФСР дифференциального уравнения задачи (1). Покажем при этом, что решение задачи (1) существует и единственно.
3. Покажем, что $v(x, \varepsilon) - (\mathrm{A} - y_1(\alpha)) e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-\alpha)} = O(\varepsilon)$.

Доказательство

○ ① Рассмотрим однородное уравнение

$$\varepsilon y'' + a y' + b y = 0. \tag{5}$$

Его характеристическое уравнение $\varepsilon \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\varepsilon b}}{2\varepsilon}$.

При малых значениях ε воспользуемся разложением по формуле Тейлора и представим $\sqrt{a^2 - 4\varepsilon b}$ в виде

$$\sqrt{a^2 - 4\varepsilon b} = a\sqrt{1 - \frac{4\varepsilon b}{a}} = a\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4\varepsilon b}{a} + O(\varepsilon^2)\right) = a - 2\varepsilon b + O(\varepsilon^2).$$

Тогда

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4\varepsilon b}}{2\varepsilon} = \frac{-a + a - 2\varepsilon b + O(\varepsilon^2)}{2\varepsilon} = -b + O(\varepsilon), \tag{6}$$

$$\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4\varepsilon b}}{2\varepsilon} = \frac{-a - \left(a - 2\varepsilon b + O(\varepsilon^2)\right)}{2\varepsilon} = -\frac{a}{\varepsilon} + b + O(\varepsilon).$$

Общее решение (5) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

В качестве быстро меняющегося решения выбираем $v(x, \varepsilon) = C_2 e^{\lambda_2 x}$, которое является решением (5) при $C_1 = 0$. Полагая $C_2 = (\mathrm{A} - y_1(\alpha)) e^{-\alpha\lambda_2} = const$, получаем $v(x, \varepsilon) = (\mathrm{A} - y_1(\alpha)) e^{\lambda_2 (x-\alpha)}$. Отметим, что $v(\alpha) = (\mathrm{A} - y_1(\alpha))$. ❶

② Покажем теперь, что $y(x,\,\varepsilon)=y_1(x)+v(x,\,\varepsilon)+O(\varepsilon)$.

Для этого рассмотрим функцию $w(x,\,\varepsilon)=y(x,\,\varepsilon)-y_1(x)-v(x,\varepsilon)$.

Нам надо показать, что $w(x,\,\varepsilon)=O(\varepsilon)$.

Подставляя $y(x,\,\varepsilon)=y_1(x)+v(x,\varepsilon)+w(x,\,\varepsilon)$ в дифференциальное уравнение задачи (1), получаем $\varepsilon y_1''+\underline{\varepsilon v''}+\varepsilon w''+\underline{\underline{ay_1'}}+\underline{av'}+aw'+\underline{\underline{by_1}}+\underline{bv}+bw=\underline{\underline{f(x)}}$.

Учитывая теперь, что $v(x,\,\varepsilon)$ – решение (5), $y_1(x)$ – решение дифференциального уравнения задачи (2),

$w(\alpha,\,\varepsilon)=y(\alpha,\,\varepsilon)-y_1(\alpha)-v(\alpha,\varepsilon)=\,A-y_1(\alpha)-(\mathrm{A}-y_1(\alpha))=0$,

$w(\beta,\,\varepsilon)=y(\beta,\,\varepsilon)-y_1(\beta)-v(\beta,\varepsilon)=\,B-B-v(\beta,\varepsilon)=-v(\beta,\varepsilon)$,

для функции $w(x)$ получаем краевую задачу

$$\begin{cases}\varepsilon w''+aw'+bw=-\varepsilon y_1'', & \alpha<x<\beta,\\ w(\alpha)=0, & w(\beta)=-v(\beta).\end{cases}$$

Здесь $v(\beta)=(\mathrm{A}-y_1(\alpha))e^{\lambda_2(\beta-\alpha)}\approx(\mathrm{A}-y_1(\alpha))e^{\left(-\frac{a}{\varepsilon}+b\right)(\beta-\alpha)}\approx\tilde{C}e^{-\frac{a}{\varepsilon}(\beta-\alpha)}$, где $\tilde{C}=(\mathrm{A}-y_1(\alpha))e^{b(\beta-\alpha)}$.

Поскольку $\lim\limits_{\varepsilon\to0+0}\dfrac{e^{-\frac{a}{\varepsilon}(\beta-\alpha)}}{\varepsilon}=-\dfrac{1}{a}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^{a(\beta-\alpha)t}}=0\lim\limits_{x\to\infty}$, то $v(\beta)=o(\varepsilon)$.

Положим теперь $w(x,\,\varepsilon)=\varepsilon\cdot z(x,\,\varepsilon)$. Тогда

$$\begin{cases}\varepsilon z''+az'+bz=-y_1'', & \alpha<x<\beta,\\ z(\alpha)=0, & z(\beta)=z^*,\end{cases}$$

причем $z^*\xrightarrow[\varepsilon\to0+0]{}0$, т.к. $z^*=\dfrac{w(\beta)}{\varepsilon}=\dfrac{-v(\beta)}{\varepsilon}=\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$.

Т.к. однородное уравнение для $z(x,\,\varepsilon)$ имеет такой же вид, как (5), то $z_o=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$.

Решение неоднородного уравнения найдем методом вариации постоянных, положив $C_1=C_1(x)$ и $C_2=C_2(x)$. Подставляя $z=C_1(x)e^{\lambda_1x}+C_2(x)e^{\lambda_2x}$ в неоднородное дифференциальное уравнение для $z(x,\,\varepsilon)$ и полагая $C_1'(x)e^{\lambda_1x}+C_2'(x)e^{\lambda_2x}=0$, для $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ получаем систему

$$\begin{cases}C_1'e^{\lambda_1x}+C_2'e^{\lambda_2x}=0,\\ \lambda_1C_1'e^{\lambda_1x}+\lambda_2C_2'e^{\lambda_2x}=-\dfrac{1}{\varepsilon}y_1'',\end{cases}$$

из которой находим

$$C_1'(x)=\mu e^{-\lambda_1x}y_1'',\ C_2'(x)=-\mu e^{-\lambda_2x}y_1''. \tag{7}$$

Здесь для краткости записи введено обозначение $\mu=\dfrac{1}{\varepsilon(\lambda_2-\lambda_1)}$. Отметим, что

$$\mu=\frac{1}{\varepsilon\left(-\dfrac{a}{\varepsilon}+2b+O(\varepsilon)\right)}\xrightarrow[\varepsilon\to0+0]{}-\frac{1}{a}. \tag{8}$$

Интегрируя (7), получаем

$$C_1(x)=c_1+\mu\int\limits_\alpha^x e^{-\lambda_1\xi}y_1''(\xi)\,d\xi,\ C_2(x)=c_2-\mu\int\limits_\alpha^x e^{-\lambda_2\xi}y_1''(\xi)\,d\xi,$$

и решение неоднородного уравнения принимает вид

$$z=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}+\mu e^{\lambda_1x}\int\limits_\alpha^x e^{-\lambda_1\xi}y_1''(\xi)\,d\xi-\mu e^{\lambda_2x}\int\limits_\alpha^x e^{-\lambda_2\xi}y_1''(\xi)\,d\xi.$$

Произвольные постоянные c_1 и c_2 находим из граничных условий:

$$\begin{cases}c_1+c_2=0,\\ c_1e^{\lambda_1\beta}+c_2e^{\lambda_2\beta}=z^*-\mu\int\limits_\alpha^\beta e^{\lambda_1(\beta-\xi)}y_1''(\xi)\,d\xi+\mu\int\limits_\alpha^\beta e^{\lambda_2(\beta-\xi)}y_1''(\xi)\,d\xi.\end{cases}$$

Так как определитель основной матрицы этой системы невырожден $\forall\varepsilon>0$, то:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\lambda_1\beta} & e^{\lambda_2\beta}\end{vmatrix}=e^{\lambda_2\beta}-e^{\lambda_1\beta}=e^{\lambda_1\beta}\left(e^{(\lambda_2-\lambda_1)\beta}-1\right)\neq 0,$$

и, кроме того, в силу (6)

$$e^{(\lambda_2-\lambda_1)\beta}=e^{-\frac{a}{\varepsilon}\beta+\frac{2b}{a}\beta+O(\varepsilon)}=e^{-\frac{a}{\varepsilon}\beta}e^{\frac{2b}{a}\beta+O(\varepsilon)}\xrightarrow[\varepsilon\to 0+0]{}0,$$

т.е. $\Delta\xrightarrow[\varepsilon\to 0+0]{}-e^{\lambda_1\beta}\neq 0$, то произвольные постоянные c_1 и c_2, а, следовательно, и функция $z(x,\varepsilon)$ определяются единственным образом.

Таким образом, краевая задача (1) для достаточно малых ε имеет и притом единственное решение.

А так как функция $z(x,\varepsilon)$ непрерывна по x на $[\alpha,\beta]$, и имеет место (8), то найдется постоянная $\hat{C}>0$ такая, что при достаточно малом ε_0 для $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ и $\forall x\in[\alpha,\beta]$ имеет место $\max\limits_{\alpha\le x\le\beta}|z(x,\varepsilon)|\le\hat{C}$, т.е. действительно $w(x,\varepsilon)=\varepsilon\cdot z(x,\varepsilon)=O(\varepsilon)$. ❷

③ Осталось показать, что

$$v(x,\varepsilon)=(\mathrm{A}-y_1(\alpha))e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-\alpha)}+O(\varepsilon),$$

т.е. решение (1) представимо в заявленном виде. Напомним, что $\mathrm{A}-y_1(\alpha)=const$.

Для этого рассмотрим функцию $q(x,\varepsilon)=\dfrac{e^{\lambda_2(x-\alpha)}-e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-\alpha)}}{\varepsilon}=\dfrac{e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-\alpha)}}{\varepsilon}\left(e^{(b+O(\varepsilon))(x-\alpha)}-1\right)=\dfrac{x-\alpha}{\varepsilon}e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-\alpha)}\dfrac{\left(e^{(b+O(\varepsilon))(x-\alpha)}-1\right)}{x-\alpha}$.

Т.к. $\dfrac{x-\alpha}{\varepsilon}e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-\alpha)}=te^{-at}=\dfrac{t}{e^{at}}$ при замене $\dfrac{x-\alpha}{\varepsilon}=t$ $\left(t\in\left[0,\dfrac{\beta-\alpha}{\varepsilon}\right]\right)$, а функция $\phi(t)=\dfrac{t}{e^{at}}$ достигает максимума при $t=\dfrac{1}{a}$ равного $\dfrac{1}{ae}$, то $\phi(t)\le\dfrac{1}{ae}$.

Кроме того, функция $\psi(\tau)=\dfrac{\left(e^{(b+O(\varepsilon))\tau}-1\right)}{\tau}=\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(b+O(\varepsilon))^n\tau^n}{n!}}{\tau}$, $\tau=x-\alpha\in[0,\beta-\alpha]$, непрерывная на $(0,\beta-\alpha]$, имеет особенность при $\tau=0$.

Т.к. $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(b+O(\varepsilon))^n\tau^n}{n!}\right|\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|b+O(\varepsilon)|^n\tau^n}{n!}\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(|b|+|O(\varepsilon)|)^n\tau^n}{n!}\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(|b|+1)^n\tau^n}{n!}$ при достаточно малом ε, то $|\psi(\tau)|\le\dfrac{\left(e^{D\tau}-1\right)}{\tau}=\Psi(\tau)$, где $D=|b|+1$. Функция $\Psi(\tau)$ непрерывна при $\tau\in[0,\beta-\alpha]$ в силу того, что $\lim\limits_{\tau\to 0}\Psi(\tau)=\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{\left(e^{B\tau}-1\right)}{\tau}=\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{B\tau+o(\tau)}{\tau}=B$, и, следовательно, достигает на отрезке $[0,\beta-\alpha]$ своего максимума и минимума. Обозначим $M=\max\limits_{0\le\tau\le\beta-\alpha}\left|\dfrac{\left(e^{B\tau}-1\right)}{\tau}\right|$, тогда $|\psi(\tau)|\le|\Psi(\tau)|\le M$.

Таким образом существует постоянная $\tilde{C}\ge\dfrac{M}{ae}$ такая, что $|q(x,\varepsilon)|=\left|\dfrac{e^{\lambda_2(x-\alpha)}-e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-\alpha)}}{\varepsilon}\right|\le\tilde{C}$ при достаточно малом ε_0 для $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ и $\forall x\in[\alpha,\beta]$, т.е. получаем, что $e^{\lambda_2(x-\alpha)}-e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-\alpha)}=O(\varepsilon)$, а, следовательно, и $v(x,\varepsilon)-(\mathrm{A}-y_1(\alpha))e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-\alpha)}=(\mathrm{A}-y_1(\alpha))\left(e^{\lambda_2(x-\alpha)}-e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-\alpha)}\right)=O(\varepsilon)$.❸

Теорема доказана.●

Следствие. Если $a\cdot\varepsilon<0$ и $f(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha,\beta]$, то краевая задача (1) для достаточно малых ε имеет и притом единственное решение. Это решение $y(x,\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0+0]{} y_2(x)$, где $y_2(x)$ – решение задачи (3).

Доказательство

○ Случай $a\cdot\varepsilon<0$ сводится к рассмотренному выше с помощью замены x на $-x$.●

Пример. Найти $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} y(x,\varepsilon)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0-0} y(x,\varepsilon)$, где $y(x,\varepsilon)$ – решение краевой задачи

$\varepsilon y''+y'+y=f(x)$, $0\le x\le 1$, $y(0)=0$, $y(1)=1$

в случае

а) $f(x)=1+x$,

б) $f(x)=1$.

I способ (с использованием теоремы)

○ Так как в нашей задаче $a=1$, то, согласно теореме, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} y(x,\varepsilon)=y_1(x)$, где $y_1(x)$ – решение задачи Коши $y'+y=f(x)$, $0\le x\le 1$, $y(1)=1$, а $\lim\limits_{\varepsilon\to 0-0} y(x,\varepsilon)=y_2(x)$, где $y_2(x)$ – решение задачи Коши $y'+y=f(x)$, $0\le x\le 1$, $y(0)=0$.

а)

1. Найдем общее решение уравнения $y'+y=1+x$.

Решим сначала однородное уравнение $y'+y=0$.

Характеристическое уравнение $\lambda+1=0$.

Его корень $\lambda=-1$.

Ему соответствует решение $y(x)=e^{-x}$.

Общее решение однородного уравнения: $y(x)=Ce^{-x}$.

2. Частное решение неоднородного уравнения

В нашем случае $f(x)=1+x=P_m(x)e^{\gamma x}$ – квазиполином, где $P_m(x)=P_1(x)=1+x$, $\gamma=0$.

Поиск частного решения проводим методом неопределенных коэффициентов, т.е. частное решение ищем в виде $y_ч=a+bx$.

Подставляя $y_ч=a+bx$ в исходное дифференциальное неоднородное уравнение, получаем

$b+a+bx=1+x$.

Приравнивая коэффициенты при степенях x, имеем

$x^0:\quad a+b=1,$

$x^1:\quad b=1.$

Это дает $a=0$, $b=1$ и $y_ч=x$.

3. Общее решение неоднородного уравнения

$y=Ce^{-x}+x$

4. Найдем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} y(x,\varepsilon)$, решив задачу Коши $y'+y=1+x$, $0\le x\le 1$, $y(1)=1$. Из НУ (начального условия):

$y(1)=Ce^{-1}+1=1$, следовательно: $C=0$ и $y(x)=x.$

Таким образом $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} y(x,\varepsilon)=x$.

5. Найдем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0-0} y(x,\varepsilon)$, решив задачу Коши $y'+y=1+x$, $0\le x\le 1$, $y(0)=0$. Из НУ:

$y(0)=Ce^{0}+0=0$, следовательно: $C=0$ и $y(x)=x.$

Таким образом $\lim\limits_{\varepsilon\to 0-0} y(x,\varepsilon)=x$.

б)

1. Найдем общее решение уравнения $y'+y=1$.

Решим сначала однородное уравнение $y'+y=0$.

Характеристическое уравнение $\lambda+1=0$.

Его корень $\lambda=-1$.

Ему соответствует решение $y(x)=e^{-x}$.

Общее решение однородного уравнения: $y(x)=Ce^{-x}$.

2. Частное решение неоднородного уравнения

В нашем случае $f(x)=1=P_m(x)e^{\gamma x}$ – квазиполином, где $P_m(x)=P_0(x)=1$, $\gamma=0$.

Поиск частного решения проводим методом неопределенных коэффициентов, т.е. частное решение ищем в виде $y_ч=a$.

Подставляя $y_ч=a$ в исходное дифференциальное неоднородное уравнение, получаем

$0+a=1$.

Откуда имеем $a=1$ и $y_ч=1$.

3. Общее решение неоднородного уравнения

$y=Ce^{-x}+1$.

4. Найдем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} y(x,\varepsilon)$, решив задачу Коши $y'+y=1$, $0\le x\le 1$, $y(1)=1$. Из НУ (начального условия):

$y(1)=Ce^{-1}+1=1$, следовательно: $C=0$ и $y(x)=1$.

Таким образом $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} y(x,\varepsilon)=1$.

5. Найдем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0-0} y(x,\varepsilon)$, решив задачу Коши $y'+y=1+x$, $0\le x\le 1$, $y(0)=0$. Из НУ:

$y(0)=Ce^{0}+1=0$, следовательно: $C=-1$ и $y(x)=1-e^{-x}$.

Таким образом $\lim\limits_{\varepsilon\to 0-0} y(x,\varepsilon)=1-e^{-x}$.

II способ («в лоб»)

а)

○ Исходное уравнение – неоднородное.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$\varepsilon y''+y'+y=0$.

Составляем характеристическое уравнение: $\varepsilon\lambda^2+\lambda+1=0$.

Его корни: $\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}$.

Им соответствуют частные решения $y_{1,2}=\exp\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}x\right)$.

Общее решение однородного уравнения:

$$y_o=C_1\exp\left(\frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}x\right)+C_2\exp\left(\frac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}x\right).$$

2. Частное решение неоднородного уравнения

В нашем случае $f(x)=1+x=P_m(x)e^{\gamma x}$ – квазиполином, где $P_m(x)=P_1(x)=1+x$, $\gamma=0$.

Поиск частного решения проводим методом неопределенных коэффициентов, т.е. частное решение ищем в виде $y_ч=a+bx$.

Подставляя $y_ч=a+bx$ в исходное дифференциальное неоднородное уравнение, получаем

$\varepsilon\cdot 0+b+a+bx=1+x$.

Приравнивая коэффициенты при степенях x, имеем

$x^0:\quad a+b=1,$

$x^1:\quad b=1.$

Это дает $a=0$, $b=1$ и $y_ч=x$.

3. Общее решение неоднородного уравнения

$$y=C_1\exp\left(\frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}x\right)+C_2\exp\left(\frac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}x\right)+x.$$

4. Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 из граничных условий получаем систему:

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ C_1\exp\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)+C_2\exp\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)+1=1.\end{cases}$$

Т.к. $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \exp\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) & \exp\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)\end{pmatrix} \neq 0$, то $C_1 = C_2 = 0$, и $y = x$ не зависит от ε.●

б)

○ Исходное уравнение – неоднородное.

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$\varepsilon y'' + y' + y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение: $\varepsilon\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Его корни: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}$.

Им соответствуют частные решения $y_{1,2} = \exp\left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}x\right)$.

Общее решение однородного уравнения:

$$y_o = C_1 \exp\left(\frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}x\right).$$

2. Частное решение неоднородного уравнения

В нашем случае $f(x) = 1 = P_m(x)e^{\gamma x}$ – квазиполином, где $P_m(x) = P_0(x) = 1$, $\gamma = 0$.

Поиск частного решения проводим методом неопределенных коэффициентов, т.е. частное решение ищем в виде $y_ч = a$.

Подставляя $y_ч = a$ в исходное дифференциальное неоднородное уравнение, получаем

$\varepsilon \cdot 0 + 0 + a = 1$.

Откуда имеем $a = 1$ и $y_ч = 1$.

3. Общее решение неоднородного уравнения

$$y = C_1 \exp\left(\frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}x\right) + 1 .$$

4. Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 из граничных условий получаем систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 0, \\ C_1 \exp\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) + C_2 \exp\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) + 1 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ C_1 \exp\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) + C_2 \exp\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) = 0. \end{cases}$$

Т.к. $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \exp\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) & \exp\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)\end{pmatrix} \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$C_1 = \frac{-\exp\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)}{\exp\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) - \exp\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)} \text{ и } C_2 = \frac{\exp\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)}{\exp\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) - \exp\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)}.$$

Общее решение неоднородного уравнения принимает вид:

$$y = \frac{-\exp\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)}{\exp\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) - \exp\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)} \exp\left(\frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}x\right) +$$
$$+ \frac{\exp\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)}{\exp\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) - \exp\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)} \exp\left(\frac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}x\right) + 1 .$$

5. При $\varepsilon \to 0 \pm 0$ воспользуемся разложением по формуле Тейлора $\sqrt{1-4\varepsilon} = 1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon)$:

$$y = \frac{-\exp\left(\frac{-1-\left(1-2\varepsilon+o(\varepsilon)\right)}{2\varepsilon}\right)}{\exp\left(\frac{-1-\left(1-2\varepsilon+o(\varepsilon)\right)}{2\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{-1+\left(1-2\varepsilon+o(\varepsilon)\right)}{2\varepsilon}\right)} \exp\left(\frac{-1+\left(1-2\varepsilon+o(\varepsilon)\right)}{2\varepsilon} x\right) +$$

$$+ \frac{\exp\left(\frac{-1+\left(1-2\varepsilon+o(\varepsilon)\right)}{2\varepsilon}\right)}{\exp\left(\frac{-1-\left(1-2\varepsilon+o(\varepsilon)\right)}{2\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{-1+\left(1-2\varepsilon+o(\varepsilon)\right)}{2\varepsilon}\right)} \exp\left(\frac{-1-\left(1-2\varepsilon+o(\varepsilon)\right)}{2\varepsilon} x\right) + 1 =$$

$$= \frac{-\exp\left(\frac{-2+2\varepsilon+o(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)}{\exp\left(\frac{-2+2\varepsilon+o(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{-2\varepsilon+o(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)} \exp\left(\frac{-2\varepsilon+o(\varepsilon)}{2\varepsilon} x\right) +$$

$$+ \frac{\exp\left(\frac{-2\varepsilon+o(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)}{\exp\left(\frac{-2+2\varepsilon+o(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{-2\varepsilon+o(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)} \exp\left(\frac{-2+2\varepsilon+o(\varepsilon)}{2\varepsilon} x\right) + 1 =$$

$$= \frac{-\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}+2+o(1)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}+2+o(1)\right) - \exp\left(-1+o(1)\right)} \exp\left(\left(-1+o(1)\right)x\right) +$$

$$+ \frac{\exp\left(-1+o(1)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}+2+o(1)\right) - \exp\left(-1+o(1)\right)} \exp\left(\left(-\frac{1}{\varepsilon}+2+o(1)\right)x\right) + 1 =$$

$$\approx \frac{-\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) - e^{-3}} e^{-x} + \frac{e^{-3}}{\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) - e^{-3}} \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{(2x)} + 1.$$

6. При $\varepsilon \to 0+0$ и $0 < x \le 1$ имеем $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0$. Откуда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} y(x, \varepsilon) = 1$.

7. При $\varepsilon \to 0-0$ имеем $\lim\limits_{\varepsilon \to 0-0} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0-0} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 0$.

$$y(x, \varepsilon) \approx \frac{-\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) - e^{-3}} e^{-x} + \frac{e^{-3}}{\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) - e^{-3}} \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{(2x)} + 1 =$$

$$\approx \frac{-1}{1 - e^{-3}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} e^{-x} + \frac{e^{-3}}{1 - e^{-3}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \exp\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) e^{(2x)} + 1.$$

И т.к. при $0 \le x < 1$ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0-0} \exp\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) = 0$, то $\lim\limits_{\varepsilon \to 0-0} y(x, \varepsilon) = 1 - e^{-x}$.

Результат решения не зависит от способа нахождения ответа. Однако первый способ решения дает, помимо выигрыша во времени, повышение общей математической культуры. Во втором способе решения делается акцент на навыки интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка, разложения по формуле Тейлора. Эти навыки не остаются без внимания при доказательстве теоремы о малом параметре при старшей производной. Кроме того, перед ее доказательством вводится понятие пограничного слоя [3].

Представляется разумным использовать первый способ решения как заставляющий задуматься не только об алгоритме решения, но и о рамках его применимости.

Список литературы

1. **Абрамов А. А., Ульянова В. И.** Об одном методе решения уравнения типа бигармонического с сингулярно входящим малым параметром // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1992. Т. 32. № 4. С. 567-575.
2. **Диесперов В. Н.** Дифференциальные и разностные уравнения: учебно-методическое пособие. М.: Физтех-Полиграф, 2007. 58 с.
3. **Пыркова О. А.** Способ решения математической задачи в зависимости от целей обучения // XXIII Международная конференция. Математика. Компьютер. Образование. Биофизика сложных систем. Молекулярное моделирование. Системная биология: симпозиум с международным участием: тезисы. В. 23 / под ред. Г. Ю. Ризниченко и А. Б. Рубина. М. – Ижевск, 2016.

DEPENDENCE OF SOLUTIONS OF THE SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION ON THE SMALL PARAMETER AT THE HIGHEST DERIVATIVE

Pyrkova Ol'ga Anatol'evna, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor
Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
opyr@mail.ru

This article discusses two ways of the solution of the boundary value problem for the ordinary second-order linear differential equation with the small parameter at the highest derivative. The first one is based on the theorem on the reduction of the boundary value problem in this case to Cauchy problem for the first-order equation, the proof of which forestalls the solution. The second one uses the direct solution of the boundary value problem followed by the expansion of the solution by Taylor’s formula.

Key words and phrases: differential equations; boundary value problem; Cauchy problem; small parameter; boundary layer; Taylor’s formula.

УДК 316.443
Социологические науки

В статье исследуются понятие социальной стратификации и вытекающие из неё общественные проблемы. В их число входят такие явления как разделение населения посредством формирования престижных и непрестижных районов проживания, межотраслевая или межпрофессиональная стратификация, дифференциация оплаты труда. Анализируя данные явления, автор показывает их потенциальную опасность для общества. Социальная мобильность рассматривается в качестве одного из способов предотвращения социальных конфликтов.

Ключевые слова и фразы: социальная стратификация; дифференциация; социальный конфликт; фрустрация; неравенство; ресурсы; социальная мобильность.

Сметанко Полина Петровна
Дальневосточный федеральный университет
psmetanko@bk.ru

КОНФЛИКТ КАК НЕГАТИВНОЕ ПОСЛЕДСТВИЕ СОЦИАЛЬНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ

Социальная стратификация присуща каждому без исключения обществу. Она может выражаться в различных формах, быть более или менее заметной, но её содержание всегда остаётся неизменным [7, с. 303]. Хотя люди не равны по многим критериям вообще, но социальной стратификацией называется лишь то неравенство, при котором имеет место неодинаковая доступность ресурсов, при условии, что эти ресурсы ограничены. Соответственно, определённые группы людей не имеют доступа к ресурсам, которые позволили бы им раскрыть весь свой потенциал. Последствиями этого могут быть различные конфликты фрустрированных масс людей против тех, у кого эти ресурсы в избытке [9, с. 10].

В этой связи актуальным является выяснение того, в каких формах социальная стратификация выражается и к каким социальным проблемам для общества может привести.

Первым негативным характеризующим социальную стратификацию фактором является разделение населения по принципу проживания. Происходит это посредством формирования различных районов городского пространства, в которых концентрируется богатое население, население со средним достатком и бедные. Цены на жильё, инфраструктура, современность построек, экономическое благополучие определяют престижность районов. Формирование пригородов для элиты способствует отделению и дистанцированию бедных районов [2, с. 121].

Таким образом, городское пространство создает неравные возможности для участия горожан в трудовой деятельности, реализации потребностей и интересов. Следствием этого является фрустрация бедных слоёв населения, их неудовлетворённость своей жизнью и формирование негативных настроений по отношению к классам, занимающим выгодное положение [Там же, с. 122-123].

Также при вынужденной концентрации бедного населения на определенной территории люди не имеют возможности выйти из этого пространства, переменив условия своего проживания, в силу отсутствия финансового потенциала. Таким образом, пространство становится замкнутым, и в нём формируется определенная