

Романов Вадим Николаевич

О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ЯКОБИАНА

В статье дано решение проблемы якобиана для кольца многочленов над полем комплексных чисел, зависящих от двух параметров. На примерах показана связь взаимной однозначности отображения, задаваемого полиномами, и конечности якобиана. Определены условия справедливости критерия якобиана. Доказательство утверждения проводится методом индукции по степени полинома. Предложен способ обобщения утверждения на случай многочленов от многих переменных.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2016/9/23.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2016. № 9 (111). С. 85-89. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2016/9/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

Залежи газа были спрогнозированы сейсмическими исследованиями, проведенными трестом «Краснодар-нефтегеофизика» в 1954 году, а в 1955 году подтверждены колонковым бурением, проведенным ГПК управления «Краснодарнефть». Промышленная газоносность была установлена в IV горизонте меотических отложений (по номенклатуре Анастасиевско-Троицкого месторождения), размеры залежи составляли по длинной оси – 10 км, по короткой – 7 км, мощность меотического горизонта варьировалась от 69 м в северном крыле до 158 м в южном крыле. Первой скважиной, установившей промышленную газоносность, стала скважина № 1, пробуренная в марте 1956 года.

Славянское и Фрунзенское месторождения газа были переданы промыслу в июле 1958 года. К началу 1959 года на Славянской площади были пробурены 7 разведочных скважин, три из которых (№№ 1, 3, 5) дали газ, а остальные – воду. В дальнейшем, согласно технологической схеме разработки, для обеспечения добычи газа управлением планировалось пробурить еще 5 скважин и подключить их к единому пункту, который должен был играть роль групповой установки и газосборного пункта. К середине 1959 года Славянское месторождение газа было введено в промышленную разработку [Там же, л. 154-156].

За 8 лет, прошедших с момента бурения первой разведочной скважины на Анастасиевской площади до начала промышленной добычи нефти и газа, Славянский район превратился в центр нефтедобычи Краснодарского края, дававший 35% всей нефти Кубани. Освоение месторождений, сопровождавшееся активным дорожным и жилищным строительством, обусловило дальнейший рост экономики района, способствуя развитию смежных отраслей народного хозяйства, повышению уровня обеспеченности населения объектами социально-культурного и бытового назначения.

Список литературы

1. Архивный отдел администрации Славянского района (АОАСР). Ф. 164. Оп. 1.
2. АОАСР. Ф. 176. Оп. 1.
3. Немного истории // Заря Кубани. 1985. 25 июня.

DEVELOPMENT OF OIL-PRODUCING INDUSTRY IN SLAVYANSKY DISTRICT OF KRASNODAR TERRITORY. THE FIRST ATTEMPTS (1952-1960)

Reshmet Dmitrii Aleksandrovich
Kuban State University (Branch) in Slavyansk-on-Kuban
dreshmet@yandex.ru

The article is devoted to the history of the development and exploitation of Anastasievskaya-Troitsky oil and gas deposit – one of the largest deposits in the Kuban region. The author traces the history of the deposit development from the drilling of the first exploration well to the creation of exploiting oil-producing administration “Priazovneft” and the start of oil and gas commercial production in Slavyansky district. Particular attention is paid to the influence of oil-producing industry development rate on the social infrastructure of the district and on the creation of preconditions for conversion of Slavyanskaya Cossack village into a major industrial center of the western part of Krasnodar Territory.

Key words and phrases: Anastasievskaya-Troitsky oil and gas deposit; oil-producing administration “Priazovneft”; west-Anastasievskaya oil and gas deposit; Slavyansky gas deposit; oil production; Slavyansky district.

УДК 512

Физико-математические науки

В статье дано решение проблемы якобиана для кольца многочленов над полем комплексных чисел, зависящих от двух параметров. На примерах показана связь взаимной однозначности отображения, задаваемого полиномами, и конечности якобиана. Определены условия справедливости критерия якобиана. Доказательство утверждения проводится методом индукции по степени полинома. Предложен способ обобщения утверждения на случай многочленов от многих переменных.

Ключевые слова и фразы: алгебра; поле комплексных чисел; проблема якобиана; полином; автоморфизм кольца многочленов; функциональный определитель; гессиан.

Романов Вадим Николаевич, д.т.н., профессор
г. Санкт-Петербург
vromanvpi@mail.ru

О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ЯКОБИАНА

Проблема якобиана (критерий якобиана) состоит в доказательстве утверждения: *если дан гомоморфизм кольца многочленов над полем комплексных чисел, то он будет автоморфизмом тогда и только тогда, когда его якобиан является комплексным числом, отличным от нуля.* Докажем это утверждение для многочленов

от двух переменных (x, y) , а затем покажем, как обобщить его на случай многих переменных. Введем следующие обозначения. Обозначим $P_k(x, y)$ – полином степени k от x, y :

$$P_k(x, y) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} y + \dots + b_0 y^k + \dots + c_k, \quad (1)$$

где многоточие означает члены низших степеней. Полиномы, в которых присутствуют все степени переменных x, y , назовем полными, в противном случае – неполными. Последние рассматриваются как приведенные (усеченные) формы первых (см. примеры ниже). В дальнейшем изложении все полиномы, если не оговорено особо, считаются полными. Ясно, что любой полином степени n может быть получен с помощью операций суммирования и умножения некоторого числа линейных полиномов первой степени. Отображение $(u, v) \rightarrow (x, y)$ назовем прямым и обозначим его uv/xu , а обратное отображение $(x, y) \rightarrow (u, v)$ обозначим xu/uv . Имеем $u = P_n(x, y)$, $v = P'_n(x, y)$; $x = Q_n(u, v)$, $y = Q'_n(u, v)$. Функциональный определитель (якобиан) соответствующего отображения обозначается как $J_{k\ uv/xu}$ или $J_{k\ xy/uv}$, где индекс k относится к максимальной (формальной) степени полинома. Введем также якобианы высших порядков, которые позволяют исследовать структуру рассматриваемых полиномов. Они могут быть определены разными способами. Обозначим J_k^i – якобиан i -го порядка для полинома степени k ; $i = 1, 2, \dots, k$. Для линейного полинома P_1 (см. ниже) порядок якобиана указываться не будет, так как он может быть равен только единице. При прямом отображении для полиномов степени n якобиан первого порядка $J_n^1 = P_x P'_y - P_y P'_x$ соотносится с самим полиномом и состоит из его первых производных (индексы x, y обозначают частные производные по соответствующим переменным). Якобиан второго порядка образуется из исходного якобиана дифференцированием элементов первого столбца по x , а второго столбца – по y . Он соотносится с первой производной исходного полинома и состоит из вторых производных полинома и т.д.; якобиан J_n^n порядка n соотносится с производной порядка $(n-1)$ и состоит из производных порядка n . В соответствии с определением, якобиан первого порядка состоит из полиномов степени $(n-1)$, второго – из полиномов степени $(n-2)$ и т.д.; якобиан n -го порядка состоит из полиномов нулевого порядка, т.е. из чисел. В нашем случае равенство нулю якобиана первого порядка показывает, что при $x = y = 0$ либо коэффициенты при линейных членах обоих полиномов равны нулю, либо они пропорциональны; равенство нулю якобиана n -го порядка означает, что или коэффициенты при старших степенях обоих полиномов равны нулю, или они пропорциональны (при этом нарушается однозначность отображения). Более общо, если якобианы всех порядков, определенные разными способами, равны 0, то соответствующие зависимости, задаваемые полиномами, эквивалентны (тождественны) с точностью до постоянного множителя. Из якобианов можно образовать гессианы первого и высших порядков, учитывающие смешанные производные по переменным x, y , которые также определяются разными способами. Определим их следующим образом. Если в якобиане первого порядка для полиномов степени n продифференцировать элементы первой строки по x , а второй – по y , то получим гессиан первого порядка H_n^1 : $H_n^1 = P_{xx} P'_{yy} - P_{yx} P'_{xy}$. Аналогично гессиан второго порядка получается из якобиана второго порядка: $H_n^2 = P_{xxx} P'_{yyy} - P_{yyx} P'_{xxy}$ и т.д.; гессиан порядка $(n-1)$ получается из якобиана порядка $(n-1)$: $H_n^{n-1} = P_{x\dots x} P'_{y\dots y} - P_{y\dots yx} P'_{x\dots xy}$. Хотя в теории функций получено много результатов, наиболее важные из них относятся к теории функций одной переменной [2, с. 138-140]. Исследование особенностей алгебраических кривых (поверхностей) в общем случае связано со значительными трудностями (см., например, [3, с. 623-675]). Поэтому большое значение имеют критерии, позволяющие сделать заключение об однозначности отображений. Один из таких критериев связан с определением значения функционального определителя (якобиана). Поясним это примерами. В первом и втором примерах, ввиду очевидности, сразу рассматриваются приведенные формы полных полиномов соответствующей степени; в третьем примере указан способ приведения полного полинома.

Пример 1. Рассмотрим отображение, задаваемое системой уравнений

$$u = x^2 \quad (1a)$$

$$v = x^2 + 1, \quad (1б)$$

где x – рациональный параметр. Пара значений u, v геометрически соответствует координатам точки на плоскости, зависящим от параметра. Якобиан прямого отображения сводится к первой производной и равен $J_{u/x} = J_{v/x} = 2x$; гессиан прямого отображения сводится ко второй производной и равен $H_{u/x} = 2$. Якобиан обратного отображения, как легко найти, равен $J_{x/u} = J_{x/v} = 1/J_{u/x}$; гессиан $H_{x/u} = -H_{u/x}/J_{u/x}^3$. Видно, что одна и та же точка получается при равных и противоположных по знаку значениях параметра, и зависимости не являются взаимно однозначными, хотя якобиан, вообще говоря, отличен от 0. Связано это с тем, что значение $x = 0$ является особой точкой, соответствующей двойному нулю, при переходе через которую якобиан меняет знак при изменении знака параметра. Кроме того, имеется соотношение $u/(v-1) = 1$, т.е. зависимости по существу эквивалентны. В этом случае условия, необходимые для применения принципа якобиана, не выполняются. Однако, в соответствии с теоремой Люрота [1, с. 259], можно сделать зависимости

однозначными, используя дробно-линейную подстановку. Положим в данном случае $x^2 = t$, что делает зависимости однозначными для всех t . Эта замена является простейшим, хотя и не единственным, частным случаем дробно-линейной подстановки с параметрами $(1, 0; 0, 1)$. При этом якобиан отображений $u \leftrightarrow t$, $v \leftrightarrow t$ и якобиан перехода $x \rightarrow t$ отличны от 0, так как новые зависимости не содержат кратных нулей.

Пример 2. Рассмотрим отображение, задаваемое системой уравнений

$$u = ax^2 + b$$

$$v = cy^2 + d,$$

где a, b, c, d – комплексные числа; x, y – комплексные параметры. Геометрически каждое уравнение задает кривую (окружность). Якобиан прямого отображения равен $J_{uv/xy} = 4acxy$, гессиан $H_{uv/xy} = 4ac$. Якобиан обратного отображения, как легко убедиться расчетом, $J_{xy/uv} = 1/J_{uv/xy}$, гессиан $H_{xy/uv} = H_{uv/xy} / J_{uv/xy}^3$. Видно, что зависимости не являются взаимно однозначными, хотя якобиан, вообще говоря, отличен от нуля, так как имеется особая точка $x = y = 0$. Однако замена переменных $x^2 \rightarrow t$, $y^2 \rightarrow q$ приводит к взаимно однозначной зависимости, при этом якобиан отображения $(u, v) \leftrightarrow (t, q)$ и якобиан преобразования $(x, y) \rightarrow (t, q)$ отличны от 0.

Пример 3. Пусть отображение задается системой уравнений

$$u = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + \dots + a_6$$

$$v = b_1x^2 + b_2y^2 + b_3xy + \dots + b_6,$$

где многоточие означает члены, линейные по x и y . В общем случае полиномы в правой части обоих уравнений представляются в виде взвешенной суммы квадратов обеих переменных и суммы их смешанных произведений. Сумма квадратов представима в виде квадрата. Выполняя замены переменных, полиномы можно представить в виде линейных функций вида $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + \dots + a_6 \rightarrow At + Bq + C$; $b_1x^2 + b_2y^2 + b_3xy + \dots + b_6 \rightarrow A't + B'q + C'$, где переменная t соответствует квадратичной составляющей, а q – смешанному произведению; A, B, C, A', B', C' – комплексные постоянные. Чтобы избежать громоздких вычислений, рассмотрим упрощенную модель, учитывающую квадратичные слагаемые и свободный член в каждом уравнении, что не уменьшает общности, как следует из сказанного выше. Геометрически каждое уравнение задает поверхность. Якобиан прямого отображения равен $J_{uv/xy} = 4(a_1b_2 - a_2b_1)xy$. Гессиан равен $H_{uv/xy} = 4a_1b_2$. Якобиан обратного отображения, как легко проверить вычислением, равен $J_{xy/uv} = 1/J_{uv/xy}$, гессиан $H_{xy/uv} = H_{uv/xy} / J_{uv/xy}^3$. Как и в предыдущих примерах, зависимости не являются взаимно однозначными, хотя якобиан, вообще говоря, отличен от нуля, так как имеется особая точка $x = y = 0$. Однако замена переменных $x^2 \rightarrow t$, $y^2 \rightarrow q$ приводит к взаимно-однозначной зависимости, при этом якобиан отображения $(u, v) \leftrightarrow (t, q)$, а также якобиан преобразования $(x, y) \rightarrow (t, q)$ отличны от 0. Из примеров следует вывод, что взаимно однозначное отображение достигается, если существует замена переменных, позволяющая представить все точки многообразия, задаваемого исходной системой уравнений двух переменных, линейными полиномами (прямыми) таким образом, чтобы каждой точке многообразия соответствовала одна и только одна точка на прямой. А это, в свою очередь, и означает, что якобиан отображения будет комплексным числом, отличным от нуля. Теперь перейдем к доказательству основного утверждения. Оно проводится методом индукции по степени полинома.

Шаг 1. Покажем справедливость утверждения для $n = 1$, т.е. в случае линейных полиномов. Запишем

$$u(x, y) \equiv P_1(x, y) = ax + by + e, \quad (2a)$$

$$v(x, y) \equiv P_1'(x, y) = cx + dy + f. \quad (2б)$$

Для однозначной разрешимости уравнений естественными являются предположения: $a, b, e \neq 0$; $c, d, f \neq 0$; пары чисел (a, c) , (b, d) , (e, f) – взаимно простые. Функциональный определитель (якобиан) при отображении $(u, v) \rightarrow (x, y)$ имеет вид $J_{1uv/xy} = ad - bc$. При сделанных выше предположениях он равен некоторому комплексному числу, отличному от 0. Рассмотрим обратное отображение $(x, y) \rightarrow (u, v)$. В этом случае, как легко видеть,

$$x(u, v) = ((e - u)d - b(f - v)) / J_{1uv/xy}, \quad (3a)$$

$$y(u, v) = ((f - v)a - c(e - u)) / (-J_{1uv/xy}), \quad (3б)$$

т.е. x, y являются линейными полиномами от u, v .

Функциональный определитель перехода (отображения) $(x, y) \rightarrow (u, v)$ имеет вид

$$J_{1xy/uv} = ad(ad - bc)^2 - bc(ad - bc)^2 = 1 / J_{1uv/xy}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что о взаимной однозначности отображения в ту и в другую сторону можно судить по конечности якобиана (одно следует из другого). Так как при этом $u(x, y)$, $v(x, y)$, $x(u, v)$, $y(u, v)$ являются линейными полиномами, то имеет место изоморфизм отображения $(u, v) \cong (x, y)$, не выводящий из кольца, т.е. автоморфизм.

Шаг 2. Предположим, что для $u(x, y) = P_n(x, y)$, $v(x, y) = P'_n(x, y)$ утверждение справедливо. Докажем, что оно является верным и для полиномов степени $n + 1$: $u(x, y) = P_{n+1}(x, y)$, $v(x, y) = P'_{n+1}(x, y)$. Используя введенные выше обозначения, представим правые части в виде $P_{n+1} = P_n \cdot P_1$, $P'_{n+1} = P'_n \cdot P'_1$ (здесь и далее для сокращения записи переменные не указываются). Так как кольцо полиномов рассматривается как целостное кольцо без делителей нуля, то P_{n+1} может обращаться в нуль, только если хотя бы один из сомножителей равен нулю (и аналогично – P'_{n+1}). Предполагается также, что P_{n+1} и P'_{n+1} не имеют кратных нулей, поэтому сомножители в правых частях взаимно простые. Функциональный определитель (якобиан) отображения $(u, v) \rightarrow (x, y)$ равен

$$J_{n+1uv/xy} = (P_n \cdot P_1)_x (P'_n \cdot P'_1)_y - (P_n \cdot P_1)_y (P'_n \cdot P'_1)_x, \quad (5)$$

где индексы x , y означают частные производные по соответствующим переменным. После ряда простых преобразований якобиан приводится к виду

$$J_{n+1uv/xy} = J_{n uv/xy} \cdot P_1 \cdot P'_1 + J_{1 uv/xy} \cdot P_n \cdot P'_n, \quad (6)$$

где $P_1 = u_1(x, y)$, $P'_1 = v_1(x, y)$, $P_n = u_n(x, y)$, $P'_n = v_n(x, y)$; индексы у переменных u , v соответствуют степени полинома. Так как кольцо полиномов не содержит делителей нуля, то якобиан (6) может равняться 0 только в двух случаях: 1) если оба слагаемые равны 0, или 2) они равны и противоположны по знаку. В первом случае один из сомножителей в каждом слагаемом должен обращаться в 0, что возможно при следующих условиях: а) $J_{n uv/xy} = J_{1 uv/xy} = 0$; б) $J_{n uv/xy} = 0$ и одновременно P_n и/или P'_n равны 0; в) $J_{1 uv/xy} = 0$ и одновременно P_1 и/или P'_1 равны 0; г) P_1 и/или P'_1 равны 0 и одновременно P_n и/или P'_n равны 0. Условие а) не выполняется, так как по предположению $J_{n uv/xy} \neq 0$, кроме того, из анализа на Шаге 1 следует, что $J_{1 uv/xy} \neq 0$, в противном случае нарушается однозначность отображения. Аналогично условия б) и в) не выполняются. Условие г) также не может быть выполнено, так как нарушается однозначность отображения ввиду того, что задача становится неопределенной. Например, равенство $P_{xx} = P_n = 0$ или $P_{ny} = P_n = 0$ может иметь место только в кратных нулях, чего мы не предполагаем. Отметим, что P_n и P'_n (так же как P_1 и P'_1) не могут одновременно равняться нулю, так как это соответствует вырожденному случаю и потере однозначности отображения. Второй случай не реализуется, так как задача теряет смысл. Действительно, в этом случае имеем $J_n / J_1 = -u_n v_n / u_1 v_1$, что невозможно без потери однозначности. Рассмотрим обратное отображение. Так как мы остаемся в кольце полиномов, то используем те же обозначения, что и при прямом отображении, так как это не создает путаницы. Якобиан запишется в виде

$$J_{n+1xy/uv} = J_{n xy/uv} \cdot P_1 \cdot P'_1 + J_{1 xy/uv} \cdot P_n \cdot P'_n, \quad (7)$$

где $P_1 = x_1(u, v)$, $P'_1 = y_1(u, v)$, $P_n = x_n(u, v)$, $P'_n = y_n(u, v)$; индексы у переменных x , y соответствуют степени полинома. Исследование возможностей проводится так же, как для прямого отображения, и выводы получаются аналогичными. Теперь проведем само доказательство. Если отображение является взаимно однозначным, то из соотношений (6), (7) и проведенного выше анализа сразу следует, что якобиан является комплексным числом, отличным от 0. В противном случае однозначность нарушается, и приходим к противоречию. Пусть теперь якобиан является комплексным числом, отличным от 0. Тогда из (6), (7) следует, что хотя бы одно из слагаемых отлично от 0. Но J_n , J_1 – комплексные числа, отличные от 0, для которых зависимости однозначны (по предположению и анализу на Шаге 1). Полиномы P_1 , P'_1 , P_n , P'_n – также однозначные функции. Поэтому и P_{n+1} , P'_{n+1} являются однозначными функциями при отображении в обе стороны. Тем самым утверждение доказано. Отметим, что индукционный переход может быть доказан вторым способом на основе рассмотренных выше примеров и их обсуждения. Действительно, предположим, что P_n и P'_n допускают представление линейными полиномами. Тогда P_{n+1} и P'_{n+1} являются полиномами степени не выше второй, и из Примера 3 следует, что они допускают представление линейными (аддитивными) полиномами, а соответствующее отображение является взаимно однозначным в обе стороны, т.е. имеет место изоморфизм в кольце полиномов (автоморфизм). Таким образом, из предыдущего анализа можно доказать по индукции, что полный полином от двух переменных любой

конечной степени, не имеющий кратных (двойных) нулей, путем замены переменных допускает представление в виде линейного (аддитивного) полинома, поскольку выполняется цепочка рекуррентных соотношений

$$P_{n+1} = P_i \cdot P_k = \dots = P_n \cdot P_1 = P_2 = P_1, \quad (8)$$

где $i > k, i + k = n + 1, n = 2, 3, \dots$; последние два равенства получаются заменой переменных; множители в правой части взаимно простые. А отсюда сразу следует справедливость исходного утверждения о связи значения якобиана и взаимной однозначности отображений. Покажем, как обобщить результаты на случай многих переменных. Пусть полином зависит от m переменных. Примеры 1-3 и выводы из них остаются справедливыми с изменениями, учитывающими число переменных. В примерах 1, 2 изменения тривиальные, остановимся на примере 3. Здесь увеличивается число уравнений и число переменных в каждом из них до m . Квадратный полином опять может быть представлен линейным (аддитивным) полиномом. Для случая двух переменных это показано выше. В общем случае нетрудно подсчитать, что при переходе от m переменных к $m + 1$ число смешанных (парных) произведений в квадратичном полиноме увеличивается на m . Поэтому при каждом увеличении числа переменных в линейный полином добавляется новый член q_{m+1} , соответствующий в исходном полиноме с переменными x_i выражению вида (коэффициенты везде опущены)

$$x_{m+1} \sum_{i=1}^m x_i \rightarrow z_{m+1}^2 \rightarrow q_{m+1}, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots, \text{ а знак } \rightarrow \text{ означает замену переменных. Рассмотрим изменения}$$

в самом доказательстве. На Шаге 1 имеем теперь систему из m уравнений, каждое из которых содержит линейный полином от m переменных. Предполагается, что коэффициенты полиномов все отличны от 0, и для каждой пары полиномов они взаимно простые. При этих условиях конечные результаты и выводы, полученные для двух переменных на Шаге 1, остаются справедливыми. Доказательство исходного утверждения проводится индукцией по числу переменных. Предполагается, как и ранее, что полиномы не имеют кратных (двойных) нулей. Для произвольного (полного) полинома степени $n + 1$ от двух переменных утверждение доказано выше. Предположим, что оно справедливо для полинома от m переменных, и докажем, что оно выполняется для полинома от $m + 1$ переменных. Разложим якобиан прямого отображения по элементам столбца $m + 1$ (аналогичное разложение выполняется и для якобиана обратного отображения). Он выражается через взвешенную знакопеременную сумму якобианов, зависящих только от m переменных, в которой весами являются производные $m + 1$ полиномов, задающих отображение, по переменной с номером $m + 1$. При сделанных предположениях якобиан от $m + 1$ переменных будет не равным нулю числом (явное выражение для якобиана не приводится из-за громоздкости). Дальнейший ход доказательства такой же, как в случае двух переменных. Второй способ доказательства основан на приведении полиномов, задающих отображение, от $m + 1$ переменных (путем замены переменных) к линейному полиному (с разными весами) от $m + 1$ переменных. Заметим, что соотношение (8) не зависит от числа переменных. Поэтому можно записать исходный полином в виде произведения полиномов, а затем, выполняя последовательно замену переменных, представить его в виде линейного полинома. Так, для полинома третьей степени имеем разложения (для показателей степени) $3 = 2 + 1 \rightarrow 1 + 1 \rightarrow 1$; для полинома четвертой степени: $4 = (3 + 1) = 2 + 2 \rightarrow 1 + 1 \rightarrow 1$ и т.д. (стрелки соответствуют замене переменных; в скобках дано альтернативное разложение). Так как, по доказанному выше, квадратичный полином от любого числа переменных может быть приведен к линейному виду, то достаточно представить исходный полином в виде произведения квадратичных и линейных полиномов. При этом из всех возможных разложений выбирается наиболее короткая цепочка, ведущая к цели.

Список литературы

1. Верден ван дер Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.
2. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 618 с.
3. Пуанкаре А. Избранные труды. М.: Наука, 1972. Т. 2. Топология. 999 с.

ON THE SOLUTION OF JACOBIAN PROBLEM

Romanov Vadim Nikolaevich, Doctor in Technical Sciences, Professor
Saint Petersburg
vromanvpi@mail.ru

The article gives a solution of Jacobian problem for the ring of polynomials over the field of complex numbers depending on two parameters. Examples show relationship between mutual one-oneness of mapping determined by polynomials and Jacobian finiteness. The paper identifies the conditions of the validity of Jacobian criterion. The statement proving is carried out with the induction method on the basis of the degree of the polynomial. The author suggests a way to generalize the statement in case of polynomials in several variables.

Key words and phrases: algebra; field of complex numbers; Jacobian problem; polynomial; polynomial ring automorphism; functional determinant; Hessian.