Боровиков Иван Федорович, Бескровный Дмитрий Вячеславович, Яковук Олег Анатольевич
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БИРАЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ПУЧКАМИ САМОСООТВЕТСТВЕННЫХ КОНИК В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

Геометрическое моделирование технических объектов целесообразно осуществлять на основе бирациональных преобразований. В качестве таких преобразований можно использовать нелинейные инволюции с однопараметрическими множествами (пучками) самосоответственных кривых второго порядка. Рассмотренный в статье способ может быть использован при конструировании технических кривых в достаточно широких пределах форм и характеристик, при разработке банка данных кривых, а также при моделировании поверхностей.
Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2016/10/1.html
Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2016. № 10 (112). C. 10-12. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2016/10/

УДК 514.1
Технические науки

Геометрическое моделирование технических объектов целесообразно осуществлять на основе бирациональных преобразований. В качестве таких преобразований можно использовать нелинейные инволюции с однопараметрическими множествами (пучками) самосоответственных кривых второго порядка. Рассмотренный в статье способ может быть использован при конструировании технических кривых в достаточно широких пределах форм и характеристик, при разработке банка данных кривых, а также при моделировании поверхностей.

Ключевые слова и фразы: бирациональные преобразования; самосоответсвенные кривые; однопараметрическое множество кривых; фундаментальные точки; порядок преобразования; пучки окружностей.

Боровиков Иван Федорович, к.т.н., доцент
Бескровный Дмитрий Вячеславович, к.т.н.
Яковук Олег Анатольевич, доцент
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
bif1986@mail.ru; beskdv@rambler.ru; olegyakovuk@yandex.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БИРАЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ПУЧКАМИ САМОСООТВЕТСТВЕННЫХ КОНИК В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

При геометрическом моделировании технических объектов появляется необходимость в базе данных кривых. Разработка такой базы является сложной задачей по причине большого многообразия кривых [3-5]. Ее решение возможно на основе рационального выбора способа получения кривых. Такой подход позволит на основе данных об аппарате конструирования получить кривую с заданными параметрами и свойствами. На наш взгляд, кривые целесообразно моделировать на основе бирациональных (кремоновых) преобразований [1-3]. Наиболее простыми преобразованиями с точки зрения их задания являются бирациональные преобразования с однопараметрическими множествами (пучками) самосоответственных кривых второго порядка (коник). В данной статье рассматриваются некоторые конструктивные вопросы таких преобразований.

Кривую второго порядка в общем случае можно однозначно определить пятью точками. Четыре точки F_1, F_2, F_3, F_4 задают однопараметрическое (бесчисленное) множество коник (пучок). Произвольная точка A_i на плоскости выделяет из пучка конкретную кривую a_i, которая некоторой прямой l_i, проходящей через точку A_i, пересекается еще в одной точке A_i', принимаемой за образ точки A_i в бирациональном преобразовании. Если точка A_i описывает некоторую прямую m, то A_i' опишет кривую m' – образ m в преобразовании T^n. Порядок n кривой m' является порядком преобразования. Если все прямые l_i проходят через некоторую точку S, то преобразование будет центральным. Можно прямые проводить таким образом, чтобы они не пересекались в одной точке. В этом случае на плоскости индуцируется нецентральное преобразование. Это возможно в случае, когда точка A_i соединяется с фокусом, центром кривой, либо прямая l_i является нормалью к a_i.

Для определения порядка n центрального преобразования T^n воспользуемся аналитическим методом. Пусть никакие три из четырех заданных базисных точек $F_1(x_1,\ y_1)$, $F_2(x_2,\ y_2)$, $F_3(x_3,\ y_3)$, $F_4(x_4,\ y_4)$ пучка кривых не лежат на одной прямой. В пучке содержатся две кривые, распадающиеся на пары прямых: $u_1u_2 = 0,\ u_3u_4 = 0$. Уравнение пучка коник имеет вид:

$$u_1u_2 + \lambda u_3u_4 = 0,$$

где λ – параметр пучка. При $\lambda = 0$ из пучка выделяется коника $u_1u_2 = 0$, при $\lambda = \infty$ – коника $u_3u_4 = 0$. Коника a_i, инцидентная точке A_i, имеет уравнение:

$$u_1u_2 + \lambda_i u_3u_4 = 0.$$

Прямая SA_i пересекает a_i в точке A_i'. Формулы преобразования:

$$x' = \frac{k_1x^3 + k_2yx^2 + k_3x^2 + k_4y^2 + k_5x + k_6y + k_7}{k_8xy^2 + k_9x^2y + k_{10}x^2 + k_{11}y^2 + k_{12}x + k_{13}y + k_{14}},$$

$$y' = \frac{k_{15}y^3 + k_{16}y^2x + k_{17}x^2 + k_{18}y^2 + k_{19}x + k_{20}y + k_{21}}{k_8xy^2 + k_9x^2y + k_{10}x^2 + k_{11}y^2 + k_{12}x + k_{13}y + k_{14}},$$

где $k_1, ...k_{21}$ – постоянные величины, определяемые координатами точек $F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4, S$.

Формулы преобразования показывают, что бирациональная нелинейная инволюция будет кубическим преобразованием. Это означает, что образом прямой является кубика, инцидентная точкам F_1, F_2, F_3, F_4, S. При этом точка S будет двойной точкой.

Вывод о порядке преобразования можно сделать на основе синтетических рассуждений. Геометрическим местом точек касания прямых пучка (S) с кониками пучка является инвариантная кривая q. Точки касания являются точками касания коники с первой полярой точки S относительно этой кривой. Первые поляры S относительно кривых пучка образуют однопараметрическое множество прямых, проективных пучку коник. Два проективных пучка образуют двойную кривую d, порядок которой равен трем. Следовательно, рассматриваемое преобразование будет инволюцией третьего порядка.

Точки F_1, F_2, F_3, F_4 являются простыми фундаментальными точками, которым соответствуют прямые, соединяющие эти точки с центром преобразования. Точка S – двукратная *F*-точка. Ей соответствует коника пучка, проходящая через S. Если прообраз проходит через одну или несколько фундаментальных точек, то кривая-образ распадается на кривые, соответствующие этим *F*-точкам, и некоторую кривую-остаток.

Коники пучка в преобразовании T^n являются самосоответственными. Образами точек этих кривых являются другие точки этих же кривых, то есть коники в T^n сами себе соответствуют. Универсальность рассматриваемого способа обуславливается разнообразием пучков коник. Наиболее просто использовать пучки окружностей: эллиптический (Рис. 1), параболический (Рис. 2), гиперболический (Рис. 3).

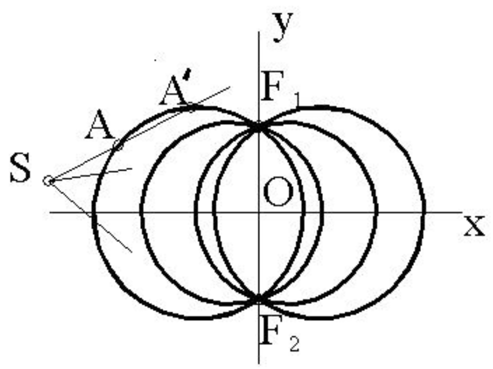

Рис. 1. *Эллиптический пучок самосоответственных окружностей*

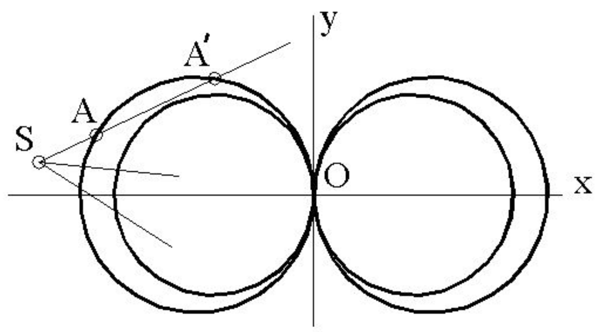

Рис. 2. *Инволюция в параболическом пучке окружностей*

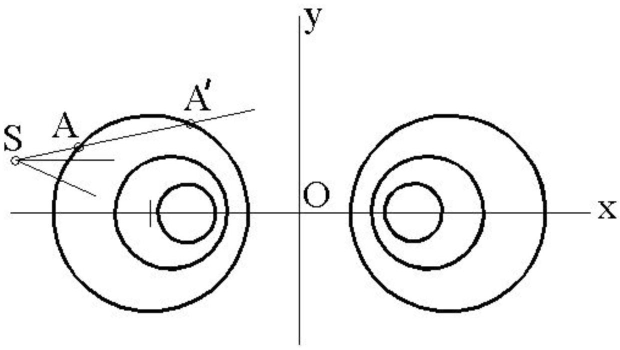

Рис. 3. *Гиперболический пучок самосоответственных окружностей*

В общем случае пучок окружностей с центрами на оси Ox описывается уравнением $x^2 + y^2 + 2\lambda x - a = 0$. Эллиптический пучок имеет две действительные различные базисные точки и одну пару мнимых сопряженных. В параболическом пучке – одна двукратная базисная точка и одна пара мнимых сопряженных точек. Гиперболический пучок имеет две пары мнимых сопряженных базисных точек. Формулы бирациональных преобразований с пучками самосоответственных окружностей имеют вид:

$$x' = \frac{(y_S^2 - a)x^2 + x_S^2 y^2 - 2x_S y_S xy + 2ax_S x - ax_S^2}{x^3 + y^2 x - 2x_S x^2 - 2y_S xy + (x_S^2 + y_S^2)x};$$

$$y' = (y_S x^3 - x_S y^3 - x_S x^2 y - y_S xy^2 - x_S y_S x^2 + x_S y_S y^2 + (x_S^2 + y_S^2 + a)xy - ay_S x$$
$$-ax_S y + ax_S y_S) / (x^3 + y^2 x - 2x_S x^2 - 2y_S xy + (x_S^2 + y_S^2)x).$$

Кроме рассмотренных случаев, можно использовать пучки концентрических окружностей, которые описываются уравнением $x^2 + y^2 = \lambda$ и имеют одну пару мнимых сопряженных двукратных базисных точек.

Кривые, получаемые на основе нелинейных инволюций с пучками самосоответственных кривых, инцидентны циклическим точкам плоскости и поэтому являются рациональными циркулярными кривыми. Они обладают хорошими аэро-гидродинамическими свойствами.

Рассмотренный подход можно использовать для конструирования технических поверхностей. Для этого пространство заполняется плоскостями пучка так, чтобы через произвольную точку проходила единственная плоскость. Кроме этого, в пространстве задаются кривые линии – носители базисных точек пучков самосоответственных кривых и центров преобразований, а также поверхность-прообраз, которая каждой плоскостью пучка пересекается по кривым-прообразам.

Предлагаемый в статье способ позволяет получать технические кривые в достаточно широких пределах форм и характеристик. Его можно положить в основу создания банка данных кривых и использовать в качестве базового метода геометрического моделирования технических форм.

Список литературы

1. **Боровиков И. Ф.** Конструирование сопрягающих гиперповерхностей на основе расслояемых преобразований: автореф. дисс. … к.т.н. М., 1985. 18 с.
2. **Боровиков И. Ф., Иванов Г. С.** Геометрические преобразования в инженерной геометрии // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2015. № 5. С. 334-347.
3. **Иванов Г. С.** Конструирование технических поверхностей (математическое моделирование на основе нелинейных преобразований). М.: Машиностроение, 1987. 192 с.
4. **Иванов Г. С.** Начертательная геометрия. М.: Изд-во МГУЛ, 2012. 340 с.
5. **Савелов А. А.** Плоские кривые. М.: Физматгиз, 1960. 293 с.

USE OF BIRATIONAL TRANSFORMATIONS WITH BEAMS OF SELF-CORRESPONDING CONICS IN GEOMETRIC MODELING OF CURVES AND SURFACES

Borovikov Ivan Fedorovich, Ph. D. in Technical Sciences, Associate Professor
Beskrovnyi Dmitrii Vyacheslavovich, Ph. D. in Technical Sciences
Yakovuk Oleg Anatol'evich, Associate Professor
Bauman Moscow State Technical University
bif1986@mail.ru; beskdv@rambler.ru; olegyakovuk@yandex.ru

Geometric modeling of technical objects is advantageously carried out on the basis of birational transformations. As such transformations one can use nonlinear involutions with one-parameter sets (beams) of self-corresponding curves of the second order. The method considered in the article can be used in designing technical curves within a wide range of shapes and characteristics, in designing curves data bank and in surfaces simulation.

Key words and phrases: birational transformations; self-corresponding curves; one-parameter set of curves; fundamental points; transformation order; beams of circles.