УДК 511
Физико-математические науки

В статье анализируется проблема представления четного числа в виде суммы двух нечетных слагаемых. На этой основе методом индукции дается доказательство бинарной гипотезы Гольдбаха. Приведена геометрическая интерпретация полученного результата. Сформулированы следствия, вытекающие из справедливости бинарной гипотезы.

Ключевые слова и фразы: теория чисел; натуральные числа; представление четного числа в виде суммы двух нечетных чисел; бинарная гипотеза Гольдбаха.

Романов Вадим Николаевич, д.т.н., профессор
г. Санкт-Петербург
vromanvpi@mail.ru

СПОСОБ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА БИНАРНОЙ ГИПОТЕЗЫ ГОЛЬДБАХА

Любое натуральное число допускает тривиальное представление в виде суммы единиц. Объединяя (группируя) единицы разными способами, можно получить все остальные представления [2, с. 142; 3, с. 96]. Рассмотрим четные числа и их представления в виде суммы двух нечетных чисел. Для произвольного четного числа p тривиальное представление имеет вид $p = 1 + 1 + \ldots + 1$ (p единиц). Пусть для определенности p делится на 4, тогда его представление в виде суммы двух нечетных чисел можно записать в виде цепочки равенств:

$$p=\left[1+(p-1)\right]=\left[3+(p-3)\right]=...=\left[(p/2-1)+(p/2+1)\right], \qquad (1)$$

где $p/2$ – центр представления (четное число). Слагаемые в квадратных скобках мы назовем сопряженными числами. Первое слагаемое находится слева от центра, а второе – справа от центра. Если p не делится на 4, то его представление имеет вид:

$$p=\left[1+(p-1)\right]=\left[3+(p-3)\right]=...=\left[(p/2-2)+(p/2+2)\right]=\left[p/2+p/2\right], \qquad (2)$$

где $p/2$ – центр (нечетное число). Для числа $p + 2$ представление записывается в виде:

$$p+2=\left[1+(p+1)\right]=\left[3+(p-1)\right]=...=\left[(p/2-1)+(p/2+3)\right]=\left[(p/2+1)+(p/2+1)\right], \qquad (3)$$

где $(p/2 + 1)$ – центр (нечетное число). Допустимые комбинации окончаний сопряженных чисел и порядок их следования полностью определяются окончанием представляемого четного числа. Число пар зависит от четности центра. Для каждого окончания имеется два случая: центр – четное число или нечетное число. Например, если p оканчивается на 0 и делится на 4 (центр – четное число), то допустимыми комбинациями окончаний являются (по направлению к центру) 1-9; 3-7; 5-5; 7-3; 9-1, и далее окончания повторяются (первое окончание соответствует числам слева от центра, а второе – числам справа от центра). Количество пар сопряженных чисел равно $p/4$. Если учитываются только простые сопряженные числа, то комбинацию 5-5 можно сразу исключить. Если число p оканчивается на 0, но не делится на 4 (центр – нечетное число), то допустимые комбинации окончаний останутся такими же, но число пар увеличится на 1. Для числа $p + 2$, оканчивающегося на 2, допустимыми комбинациями окончаний являются (по направлению к центру) 1-1; 3-9; 5(число)-7; 7-5; 9-3, и далее окончания повторяются. Количество пар сопряженных чисел равно $p/4 + 1$. Если учитываются только простые сопряженные числа, то комбинацию 7-5 можно сразу исключить. Рассмотрим, что происходит, когда p возрастает. С увеличением четного числа p количество сопряженных пар и количество простых чисел, участвующих в представлении четного числа, возрастают. Из (1) видно, что начальные простые числа 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и т.д. входят во все представления для достаточно больших p, и их число возрастает с ростом p. Имеется асимметрия в распределении простых чисел слева и справа от центра, которая зависит от двух процессов. Количество простых чисел слева от центра увеличивается (не убывает) за счет перехода чисел справа налево. Поэтому количество простых чисел справа от центра может убывать (не возрастает), но не сильно. Оно компенсируется за счет появления новых простых чисел и не обращается в 0 при увеличении p. По мере увеличения p между этими процессами устанавливается динамическое равновесие, которое определяет асимметрию распределения простых чисел и зависит от порядка величины числа p. Простые числа имеются регулярно как слева, так и справа от центра. Появление пар простых сопряженных чисел зависит, главным образом, от общего числа простых чисел, меньших p, и в определенной степени от неравномерности их распределения слева и справа от центра. Так как простых чисел бесконечно много, то пары простых сопряженных чисел регулярно появляются (имеются) и не могут полностью исчезнуть при увеличении числа p. В противном случае после некоторого p не оказалось бы простых чисел, что невозможно (см. ниже). Докажем бинарную гипотезу методом индукции. Мы собираемся доказать следующее утверждение: любое четное число не меньшее 6 допускает представление в виде суммы двух простых чисел. Справедливость гипотезы можно проверить для любого конечного четного числа; например, $6 = (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 3 + 3$; $8 = (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 3 + 5$ и т.д. Предположим, что для чисел $n \le p$ бинарная гипотеза верна, а для $n > p$

она не верна. Рассмотрим множество четных чисел вида $10m$, где $m = 1,2,3,....$. Пусть p – такое число, и пусть для определенности p делится на 4; тогда $p+10$ не делится на 4, а $p+20$ делится на 4 и т.д. Представление числа $p+10$ в сокращенной записи имеет вид:

$$p+10 = (1,p+9) = (3,p+7) = ... = (p/2+3,p/2+7) = (p/2+5,p/2+5), \tag{4}$$

где в круглых скобках даны пары сопряженных чисел. Рассмотрим, при каких условиях бинарная гипотеза не будет верна для некоторого четного числа. Это произойдет при выполнении одного из двух условий (А) или (Б).

(А) В представлении четного числа справа от центра вообще нет простых чисел.

(Б) Простые числа справа от центра имеются, но они образуют сопряженные пары только с составными числами.

Покажем, что эти условия не имеют места. Рассмотрим число $p+10$. Сравним представления чисел p и $p+10$. В нашем случае центр представления числа p равен $p/2$ (четное число), центр представления числа $p+10$ равен $p/2+5$ (нечетное число). Количество сопряженных пар в представлении числа p равно $p/4$, а в представлении числа $p+10$ равно $p/4+3$. После перехода от p к $p+10$ количество простых чисел не уменьшается. Слева от центра в представлении числа $p+10$ появляются три новых числа $p/2+1$, $p/2+3$ и $p/2+5$. Числа $p/2+1$ и $p/2+3$ появляются за счет перехода справа от центра в представлении числа p налево от центра в представлении числа $p+10$. Число $p/2+5$ появляется за счет изменения четности центра. Остальные числа слева от центра в представлении $p+10$ те же самые, что и в представлении p. Выясним, какие из этих новых чисел являются простыми. Число $p/2+5$ является составным, так как оно делится на 5. Числа $p/2+1$ и $p/2+3$ могут быть простыми или составными (см. ниже). Справа от центра в представлении числа $p+10$ появляются пять новых чисел $p+9$, $p+7$, $p+5$, $p+3$ и $p+1$, а остальные числа – те же, что и в представлении числа p; они сдвигаются (увеличиваются) на 10 по отношению к числам в представлении числа p. Выясним, какие из этих новых чисел являются простыми. Число $p+5$ является составным, так как оно делится на 5. Числа $p+7$ и $p+3$ не могут быть простыми. В противном случае бинарная гипотеза будет верной для всех чисел $p+10m$, в представлении которых пары $(10m-7,p+7)$ и $(10m-3,p+3)$ являются парами простых сопряженных чисел; в частности, бинарная гипотеза будет верна для числа $p+10$, что противоречит нашему предположению (см. выше). Числа $p+1$ и $p+9$ не могут быть простыми. В противном случае бинарная гипотеза будет верной для всех чисел $p+10m$, в представлении которых пары $(10m-1,p+1)$ и $(10m-9,p+9)$ являются парами простых сопряженных чисел; в частности, бинарная гипотеза будет верна для числа $p+20$, что противоречит нашему предположению (см. выше). Мы должны рассмотреть специальный случай, когда числа $p/2+1$ и/или $p/2+3$ являются единственными простыми числами справа от центра в распределении числа p (см. выше). Из предшествующего анализа, который справедлив для произвольных двух соседних четных чисел, оканчивающихся на 0 (с одинаковыми окончаниями), следует, что в этом случае числа $p/2+3$ и/или $p/2+1$ будут единственными простыми числами справа от центра в представлении всех четных чисел в интервале $\left[p/2+10, p\right]$. Так как бинарная гипотеза по предположению верна для всех четных чисел $n \le p$, то числа $p/2+3$ и/или $p/2+1$ должны образовать пары простых сопряженных чисел в представлении всех четных чисел в интервале $\left[p/2+10, p\right]$. Пусть q – произвольное число из этого интервала (p – достаточно большое число). В представлении числа q должны быть пары простых сопряженных чисел вида $(\alpha, p/2+3)$ и $(\beta, p/2+1)$, где α и β – простые числа. Очевидно, что $\alpha + p/2+3 = \beta + p/2+1 = q$ и $\beta - \alpha = 2$. Положим $q = p/2+120$, тогда $\alpha = 117$, $\beta = 119$. Но 117 и 119 не являются простыми числами. Получили противоречие. Отметим, что число $p/2+120$ является наименьшим числом такого рода; имеются и другие числа этого вида, например $q = p/2+190$ ($\alpha = 187$, $\beta = 189$); $q = p/2+210$ ($\alpha = 207$, $\beta = 209$); $q = p/2+220$ ($\alpha = 217$, $\beta = 219$) и т.д. Здесь α и β не являются простыми числами. Поэтому бинарная гипотеза не является верной для чисел $p/2+120$, $p/2+190$, $p/2+210$, $p/2+220$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, числа $p/2+3$ и $p/2+1$ не являются единственными простыми числами справа от центра в представлении числа p; значит, справа от центра в представлении числа p имеются и другие простые числа, поэтому они имеются также справа от центра в представлении числа $p+10$, причем те же самые, что и в представлении числа p. Таким образом, из нашего анализа, который справедлив *mutatis mutandis* для произвольных двух соседних четных чисел, оканчивающихся на 0 (с идентичными окончаниями), следует, что условие (А) не имеет места для числа $p+10$ и чисел, следующих за ним (см. ниже). Рассмотрим теперь условие (Б).

Предположим, что оно имеет место. Будем увеличивать число p последовательно на 10. Через $[p/10]$ шагов произойдет полная замена (перемещение) чисел справа от центра представления числа p; все они окажутся слева от центра в представлении числа $p+10[p/10]$. Поэтому из предшествующего анализа, который справедлив *mutatis mutandis* для произвольных двух соседних четных чисел, оканчивающихся на 0 (с идентичными окончаниями), следует, что не окажется ни одного простого числа справа от центра в представлении числа $p+10[p/10]$ и следующих за ним чисел. С другой стороны количество простых чисел должно расти с увеличением p. Пришли к противоречию. Следовательно, условие (Б) не может быть выполнено, и пары простых сопряженных чисел регулярно появляются (имеют место) при увеличении числа p. Чтобы это лучше понять, используем очевидную геометрическую аналогию. Представим число p в виде отрезка длины p на числовой оси, а простые числа – точками на этом отрезке. Точки имеются как слева, так и справа от середины отрезка. При этом некоторым точкам слева соответствуют точки справа, такие, что сумма расстояний двух точек от начала отрезка равна длине отрезка. Эти точки отвечают сопряженным парам простых чисел. Будем последовательно увеличивать длину отрезка на 10, 20 и т.д. единиц; середина отрезка также смещается вправо на 5, 10 и т.д. единиц соответственно. Если условия (А) или (Б) имеют место, то при достижении «критической» длины все точки окажутся в левой половине отрезка, а справа не появится ни одной точки, что абсурдно, так как простых чисел бесконечно много. Итак, гипотеза доказана для всех чисел вида $10m$. Вообще говоря, возможны два заключения в соответствии с формальной логикой: бинарная гипотеза верна для всех четных чисел, больших, чем p, или она верна только для некоторых четных чисел, больших, чем p. Но второе заключение не может быть принято в силу недостаточности основания, как это следует из нашего предшествующего анализа. Для полного доказательства гипотезы следует рассмотреть четные числа с другими окончаниями: 2, 4, 6 и 8. Ход доказательства *mutatis mutandis* и выводы для четных чисел с другими окончаниями остаются такими же, как в случае чисел, оканчивающихся на 0. Рассмотрим, например, числа с окончанием 2. Пусть p – такое число, и пусть для определенности p делится на 4; тогда $p+10$ не делится на 4, а $p+20$ делится на 4 и т.д., как выше для чисел, оканчивающихся на 0. Следует учитывать два фактора. Во-первых, изменяются комбинации допустимых окончаний и порядок их следования. Во-вторых, четные числа, не оканчивающиеся на 0, не делятся нацело на 10, поэтому $p/10$ не является целым числом, и имеется остаток. Рассмотрим первый фактор. Для четных чисел, оканчивающихся на 2, пары окончаний имеют вид 1-1, 3-9 и т.д. (см. выше). Для четных чисел, оканчивающихся на 4, пары окончаний и порядок их следования имеют вид 1-3, 3-1, 5(число)-9, 7-7, 9-5, 1-3 и т.д. Если учитывать только простые числа, то пару 9-5 можно исключить. Для четных чисел, оканчивающихся на 6, пары окончаний и порядок их следования имеют вид 1-5 (можно исключить), 3-3, 5(число)-1, 7-9, 9-7, 1-5 и т.д. Для четных чисел, оканчивающихся на 8, пары окончаний и порядок их следования имеют вид 1-7, 3-5 (можно исключить), 5(число)-3, 7-1, 9-9, 1-7 и т.д. Рассмотрим второй фактор. Для чисел, оканчивающихся на 2, остаток равен 2 и т.д., для чисел, оканчивающихся на 8, остаток равен 8. В этом случае числа, расположенные справа от центра представления числа p, не перемещаются полностью налево через $[p/10]$ шагов; одно или два из этих чисел останутся справа от центра представления числа $p+10[p/10]$. Однако они не могут быть простыми, как следует из предшествующего анализа. Действительно, если p оканчивается на 2 или 4, то одно число $p-1$ остается справа от центра представления числа $p+10[p/10]$. Число $p-1$ не может быть простым. В противном случае бинарная гипотеза будет верна для всех чисел вида $p+10m$, в представлении которых пара $(10m+1, p-1)$ является парой простых сопряженных чисел; в частности, бинарная гипотеза будет верна для $p+10$, что противоречит нашему предположению (см. выше). Если p оканчивается на 6, то два числа $p-1$ и $p-3$ остаются справа от центра представления числа $p+10[p/10]$. Число $p-1$ является составным, так как оно делится на 5. Число $p-3$ не может быть простым. В противном случае бинарная гипотеза будет верна для всех чисел вида $p+10m$, в представлении которых пара $(10m+3, p-3)$ является парой простых сопряженных чисел; в частности, бинарная гипотеза будет верна для $p+10$, что противоречит нашему предположению (см. выше). Если p оканчивается на 8, то два числа $p-1$ и $p-3$ остаются справа от центра представления числа $p+10[p/10]$. Число $p-3$ является составным, так как оно делится на 5. Число $p-1$ не может быть простым, так как это противоречит нашему предположению о бинарной гипотезе (см. выше). Следовательно, оценки $[p/10]$ и $p+10[p/10]$, а также выводы, полученные выше для чисел, оканчивающихся на 0, остаются верными для четных чисел с другими окончаниями. Таким образом, бинарная гипотеза доказана для всех четных чисел. Отсюда мы сразу получаем два следствия. *Следствие 1.* Всегда имеются простые числа в интервале $[n, 2n]$, где n – произвольное натуральное число. Отсюда следует, что имеются простые числа между последовательными степенями числа 2, т.е. 2^k и 2^{k+1} (где k – натуральное число). *Следствие 2.* Верна гипотеза Лежандра, т.е. всегда имеется простое число между n^2 и $(n+1)^2$, где n – произвольное натуральное число. Справедливость гипотезы Лежандра может быть легко доказана индукцией из бинарной гипотезы [1, с. 65].

Список литературы

1. **Романов В. Н.** Исследование фундаментальных проблем теории чисел. СПб.: Астерион, 2015. 91 с.
2. **Романов В. Н.** О проблеме представления положительного числа в виде суммы натуральных слагаемых // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2013. № 3 (70). С. 140-146.
3. **Романов В. Н.** О решении бинарной проблемы Гольдбаха // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2014. № 12 (90). С. 95-100.

A WAY TO PROVE GOLDBACH BINARY HYPOTHESIS

Romanov Vadim Nikolaevich, Doctor in Technical Sciences, Professor
Saint-Petersburg
vromanvpi@mail.ru

The article analyzes the problem of representing an even number as a sum of two odd summands. On this basis the author gives the proof of Goldbach binary hypothesis with the method of induction. The paper shows geometric interpretation of the obtained result. Consequences of validity of the binary hypothesis are formulated.

Key words and phrases: theory of numbers; natural numbers; representation of even number as sum of two odd numbers; Goldbach binary hypothesis.

УДК 371
Педагогические науки

В статье представлены результаты изучения готовности учителей начальной школы к реализации новых образовательных стандартов: рассматриваются позиция, процессуальные аспекты деятельности учителей, результаты их работы, связанные с внедрением федеральных государственных образовательных стандартов второго поколения; дается анализ испытываемых педагогами затруднений; выявлены объективные и субъективные факторы их недостаточной подготовленности к такого рода деятельности.

Ключевые слова и фразы: новые образовательные стандарты; задачи образования; модернизация образования; личностные универсальные учебные действия; готовность к реализации стандартов образования.

Ушатикова Ирина Игоревна, к. пед. н.
Елабужский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета
irina.ushatikova@yandex.ru

НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА: УСПЕХИ И ПРОБЛЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СТАНДАРТОВ ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ

В настоящее время в условиях перехода общеобразовательной школы на новые федеральные государственные образовательные стандарты (ФГОС) в той или иной степени происходит обновление всех компонентов образовательного процесса, в том числе и современного урока.

Обновление концептуальных подходов к формированию ФГОС повлекло за собой постановку перед современной школой следующих задач:

- развитие личности ребёнка, т.е. достижение им личностных результатов;
- развитие метапредметных умений, вооружающих обучающихся системным подходом к изучению учебных предметов, а также окружающего мира;
- достижение непосредственных предметных результатов, т.е. результатов изучения конкретной темы урока [2].

На текущий момент времени учителя начальных классов объективно обладают самым богатым опытом в реализации ФГОС. Программы начальной школы уже претерпели кардинальные изменения в связи с возникшей необходимостью формирования у обучающихся метапредметных умений – комплекса универсальных учебных действий (УУД): личностных, познавательных, регулятивных, коммуникативных.

Реализуя ФГОС начального общего образования (ФГОС НОО), передовые учителя активно используют развивающий потенциал содержания каждого из преподаваемых в начальной школе предметов, современные технологии, нестандартные формы уроков; создают авторские программы, делятся находками на педагогических конкурсах, на страницах своих сайтов и статей. Всё это – действия наиболее прогрессивной части современного учительства. Но, как показывает статистика, успех преобразований, происходящих в практике работы массовой школы, не так однозначен.

Нами была предпринята попытка экспериментального исследования, целью которого стало выяснение вопроса: насколько учителя начальных классов, работающие в обычной массовой школе, готовы к реализации стандартов нового поколения как основного ориентира модернизации процесса обучения? В анонимном опросе