Нургабыл Дуйсебек Нургабылулы, Канаткызы Зере

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВНУТРЕННИМ НАЧАЛЬНЫМ СКАЧКОМ

В настоящей работе рассматривается краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при производной. Описан алгоритм построения асимптотического разложения решения краевой задачи. Построено равномерное асимптотическое приближение решения сингулярно возмущенной краевой задачи с точностью до произвольного порядка при стремлении малого параметра к нулю. На основе асимптотики решения начальной задачи доказываются существование и единственность решения краевой задачи. Сформулирована вырожденная задача. При достаточно малых определена оценка разности между решениями возмущенной и невозмущенной задач. Исследовано явление внутреннего начального скачка.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2017/4-5/20.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2017. № 4-5 (118). С. 76-80. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2017/4-5/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

УДК 517.928.2
Физико-математические науки

В настоящей работе рассматривается краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при производной. Описан алгоритм построения асимптотического разложения решения краевой задачи. Построено равномерное асимптотическое приближение решения сингулярно возмущенной краевой задачи с точностью до произвольного порядка при стремлении малого параметра к нулю. На основе асимптотики решения начальной задачи доказываются существование и единственность решения краевой задачи. Сформулирована вырожденная задача. При достаточно малых $\varepsilon > 0$ *определена оценка разности между решениями возмущенной и невозмущенной задач. Исследовано явление внутреннего начального скачка.*

Ключевые слова и фразы: дифференциальные уравнения; краевые задачи; малый параметр; начальный скачок; асимптотическое разложение.

Нургабыл Дуйсебек Нургабылулы, д. ф.-м. н., профессор
Канаткызы Зере
Жетысуский государственный университет имени И. Жансугурова, Республика Казахстан
kebek.kz@mail.ru

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВНУТРЕННИМ НАЧАЛЬНЫМ СКАЧКОМ

Для довольно широкого класса сингулярно возмущенных задач были разработаны эффективные асимптотические методы, позволяющие строить равномерные приближения с любой точностью. В первую очередь здесь следует назвать метод М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [4], метод А. Б. Васильевой [2], метод М. И. Иманалиева [6]. Эти методы называют методами пограничных функций.

Каждый из указанных методов имеет определенную область применимости, успешно работает при решении одних задач и становится неприменимым при решении других задач. Например, при реализации идей метода пограничных функций в задачах с начальными скачками возникали и принципиальные трудности [3; 7].

Однако в приложениях встречаются краевые задачи, которые обладают несколько иными асимптотическими свойствами, а именно имеющие решение $y(t,\varepsilon)$, которое в пределе совершает скачок во внутренней точке $t^0 \in (0,1)$. В этом случае предельная функция $\bar{y}(t)$ для решения искомой задачи в точке $t^0 \in (0,1)$ имеет разрыв первого рода. Существование решения такого типа для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с краевыми условиями $y(0,\varepsilon) = \alpha, y(1,\varepsilon) = \beta$ были изучены в [5; 8; 9]. Существование такого явления для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с общими разделенными краевыми условиями было доказано в [1], где предполагается, что уравнение $A(t^0, y) = 0$ имеет единственное решение $y = a_0 \in \left(y_+(t^0), y_-(t^0)\right)$. Здесь $\bar{y} = y_+(t^0), t^0 < t \le 1, \bar{y} = y_-(t^0), 0 \le t < t^0$ – правые и левые ветви предельной функции $\bar{y}(t)$.

В данной работе такое ограничение на правую часть рассматриваемого уравнения не ставится.

Наша цель: разработать алгоритм исследования асимптотического поведения решений общих краевых задач, обладающих явлением внутреннего начального скачка.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dt^2} = A(t;y)\frac{dy}{dt} + B(t,y) \tag{1}$$

с общими разделенными краевыми условиями

$$\propto_{10} y(0,\varepsilon) + \propto_{11} \frac{dy(0,\varepsilon)}{dt} = \alpha, \beta_{10} y(1,\varepsilon) + \beta_{11}\frac{dy(1,\varepsilon)}{dt} = \beta. \tag{2}$$

Потребуем выполнения следующих условий:

1) Функции $A(t,y), B(t,y)$ *достаточное число раз дифференцируемы в области* G *пространства переменных* (t,y).

2) Пусть задачи

$$A(t,y)\frac{dy}{dt} + B(t,y) = 0,\ \propto_{10} y(0) + \propto_{11}\frac{dy(0)}{dt} = \alpha, \tag{3}$$

$$A(t,y)\frac{dy}{dt} + B(t,y) = 0,\ \beta_{10} y(1) + \beta_{11}\frac{dy(1)}{dt} = \beta \tag{4}$$

на сегменте $0 \le t \le 1$ *соответственно имеют единственные решения* $y_+(t)$, $y_-(t)$, *причем*

$$A(t, y_+(t)) \le -\gamma < 0, t \in [0,1],\ A(t, y_-(t)) \ge \gamma > 0, t \in [0,1].$$

3) Пусть уравнение $T(t^0) \equiv \int_{y_-(t^0)}^{y_+(t^0)} A(t^0, y)dy = 0$ *относительно* t^0 *имеет единственное решение* $t^0 = t_0^0$ *и пусть* $0 < t_0^0 < 1$.

4) Пусть $T'(t^0) = B\big(t^0, y_-(t^0)\big) - B\big(t^0, y_+(t^0)\big) + \int_{y_-(t^0)}^{y_+(t^0)} A_t'(t^0, y)dy \neq 0$.

2. Построение асимптотики решения вспомогательной начальной задачи. С целью исследования асимптотического поведения и построения асимптотики решения задачи (1), (2) предварительно рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dt^2} = A(t, y)\frac{dy}{dt} + B(t, y), \tag{5}$$

$$y(t^0, \varepsilon) = a(\varepsilon), y'(t^0, \varepsilon) = \frac{C(\varepsilon)}{\varepsilon}, \tag{6}$$

где $a(\varepsilon), c(\varepsilon)$ представимы в виде

$$c(\varepsilon) = c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots, a(\varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1 + \cdots,$$

c_k, a_k – неизвестные параметры, которые определяются так, чтобы решение задачи (5), (6) удовлетворяло краевым условиям (2).

Произведем замену $\varepsilon \frac{dy}{dt} = z$. Тогда в новых переменных уравнение (5) с начальными условиями (6) можно записать в виде

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = A(t, y)z + \varepsilon B(t, y), \varepsilon \frac{dy}{dt} = z, \tag{7}$$

$$y(t^0, \varepsilon) = a(\varepsilon), z(t^0, \varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{8}$$

Решения задачи (7), (8) будем искать в виде следующей суммы:

$$y = y_\varepsilon(t) + u_\varepsilon(\tau), z = z_\varepsilon(t) + v_\varepsilon(\tau), \tau = \frac{t - t^0}{\varepsilon}, \tag{9}$$

где

$$y_\varepsilon(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \cdots, z_\varepsilon(t) = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \cdots. \tag{10}$$

$$u_\varepsilon(\tau) = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \cdots, v_\varepsilon(\tau) = v_0(\tau) + \varepsilon v_1(\tau) + \cdots, \tau = \frac{t - t^0}{\varepsilon}. \tag{11}$$

Подставим (9) с учетом (10), (11) в (2), (7), (8). Тогда, разлагая правые части в ряды по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную последовательность задач для определения коэффициентов $y_k(t), z_k(t)$, $u_k(\tau), v_k(\tau)$ разложений (9)-(11). Главные члены асимптотики определяются из задач:

$$z_0(t) \equiv 0, z_1(t) = -\frac{B(t, y_0)}{A(t, y_0)},$$

$$A(t, y_0)\frac{dy_0}{dt} + B(t, y_0) = 0,\ \propto_{10} y_0(0) + \propto_{11} \frac{dy_0(0)}{dt} = \alpha,$$

$$A(t, y_0)\frac{dy_0}{dt} + B(t, y_0) = 0,\ \beta_{10} y_0(1) + \beta_{11} \frac{dy_0(1)}{dt} = \beta,$$

$$v_0^+(\tau) = \int\limits_{y_+(t^0)}^{y_+(t^0)+u_0^+(\tau)} A(t^0, y)dy,\ \ v_0^-(\tau) = \int\limits_{y_-(t^0)}^{y_-(t^0)+u_0^-(\tau)} A(t^0, y)dy,$$

$$\frac{du_0^+}{d\tau} = \int\limits_{y_+(t^0)}^{y_+(t^0)+u_0^+(\tau)} A(t^0, y)dy, u_0^+(0) = a_0 - y_+(t^0),$$

$$\frac{du_0^-}{d\tau} = \int\limits_{y_-(t^0)}^{y_-(t^0)+u_0^-(\tau)} A(t^0, y)dy, u_0^-(0) = a_0 - y_-(t^0).$$

Отсюда, получим формулы начальных скачков:

$$c_0 = -\int_{a_0}^{y_+(t^0)} A(t^0, y)dy = -\int_{a_0}^{y_-(t^0)} A(t^0, y)dy, \tag{12}$$

$$P_1(a_0) \equiv z_1^+(t^0) - z_1^-(t^0) + A\big(t^0, y_+(t^0)\big)y_1^+(t^0) - A\big(t^0, y_-(t^0)\big)y_1^-(t^0) +$$
$$+ \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial A(t^0, \tilde{y}_0^+(s))}{\partial t} v_0^+ s + B(t^0, \tilde{y}_0^+(s)) - B\big(t^0, y_+(t^0)\big)\right] ds - \tag{13}$$
$$- \int_0^{-\infty} \left[\frac{\partial A(t^0, \tilde{y}_0^-(s))}{\partial t} v_0^- s + B(t^0, \tilde{y}_0^-(s)) - B\big(t^0, y_-(t^0)\big)\right] ds.$$

Будем рассматривать (13) как уравнение относительно a_0.

5) Пусть уравнение $P_1(a_0) = 0$ имеет решение a_0, которое принадлежит интервалу $\big(y_-(t^0), y_+(t^0)\big)$.

Определив из (13) параметр a_0, мы в силу (12) определим c_0. На этом полностью закончено построение нулевого приближения разложения (9). Далее последовательно можно определить остальные приближения.

Параметр a_k определяется из следующего уравнения:

$$P_{k+1}(a_k) \equiv z_k^+(t^0) - z_k^-(t^0) - A(t^0, a_0)\big(y_k^+(t^0) - y_k^-(t^0)\big) + \tag{14}$$
$$+ \int_0^{-\infty} P_k^-(s)\, ds - \int_0^{+\infty} P_k^+(s)\, ds + \int_0^{-\infty} R_k^-(s, a_1)\, ds - \int_0^{+\infty} R_k^+(s, a_1)\, ds = 0.$$

Уравнение $P_{k+1}(a_k) = 0$ имеет решение относительно a_k и

$$\frac{\partial P_{k+1}(a_k)}{\partial a_k} = \frac{\partial P_1(a_0)}{\partial a_0} \neq 0.$$

Определив из (14) параметр a_k, мы из

$$c_k - A(t^0, a_0)a_k = z_k^-(t^0) - A(t^0, a_0)y_k^-(t^0) - \int_0^{-\infty} P_k^-(s)\, ds - \int_0^{-\infty} R_k^-(s)\, ds$$

определим c_k. На этом формальное разложение (9) решения начальной задачи (7), (8) построено, которое является и разложением задачи (5), (6).

3. Доказательство справедливости асимптотического разложения решения вспомогательной задачи. Из (9) с учетом (10), (11) образуем частичные суммы:

$$Y_N^+(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \left(y_k^+(t) + u_k^+\left(\frac{t-t^0}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$Z_N^+(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \left(z_k^+(t) + v_k^+\left(\frac{t-t^0}{\varepsilon}\right)\right) + \varepsilon^{N+1} z_{N+1}^+(t).$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1)-5). Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на сегменте $t^0 \le t \le 1$ пара (z, y) является единственным решением задачи (7), (8) (и решением задачи (5), (6)) и удовлетворяет оценке*

$$|y(t, \varepsilon) - Y_N^+| \le K \cdot \varepsilon^{N+1}, \tag{15}$$
$$|z(x, \varepsilon) - Z_N^+| \le K \cdot \left(\varepsilon^{N+2} + \varepsilon^{N+1} \cdot e^{-\frac{\bar{v}(t-t^0)}{\varepsilon}}\right).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1)-5). Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на сегменте $0 \le t \le t^0$ пара (z, y) является единственным решением задачи (7), (8) (и решением задачи (5), (6)) и удовлетворяет оценке*

$$|y(t, \varepsilon) - Y_N^-| \le K \cdot \varepsilon^{N+1}, \tag{16}$$
$$|z(x, \varepsilon) - Z_N^-| \le K \cdot \left(\varepsilon^{N+2} + \varepsilon^{N+1} \cdot e^{\frac{\bar{v}(t-t^0)}{\varepsilon}}\right).$$

Таким образом, на сегменте $0 \le \mathrm{t} \le 1$ пара (z, y) является единственным решением задачи (7), (8) (причем $y(t, a, c, \varepsilon)$ является решением задачи (5), (6)) и справедливы оценки (15), (16).

4. Асимптотика решения краевой задачи. Рассмотрим исходную краевую задачу (1), (2). Как уже было показано, $y(t, a, c, \varepsilon)$ является единственным решением вспомогательной задачи (5), (6).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1)-6). Тогда в некоторой малой окрестности точки (a_0, c_0) существует единственная точка $(a(\varepsilon), c(\varepsilon))$ такая, что решение $y(t, a, c, \varepsilon)$ задачи (5), (6) является единственным решением $y(t, \varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) и на отрезке $0 \le t \le 1$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеют место следующие оценки:*

$$y(t, a, c, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \left(y_k^-(t) + u_k^-\left(\frac{t-t^0}{\varepsilon}\right)\right) + O(\varepsilon^{N+1}), 0 \le t \le t^0, \tag{17}$$

$$y(t, a, c, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \left(y_k^+(t) + u_k^+\left(\frac{t-t^0}{\varepsilon}\right)\right) + O(\varepsilon^{N+1}), t^0 \le t \le 1.$$

Доказательство. Воспользуемся асимптотикой решения $y(t,a,c,\varepsilon), z(t,a,c,\varepsilon)$ вспомогательной задачи Коши (7), (8). Параметры $a(\varepsilon), c(\varepsilon)$ подберем так, чтобы $y(t,a,c,\varepsilon)$ удовлетворяло краевым условиям (2). Это приводит к следующей системе:

$$R_0(0,a,c,\varepsilon) = \propto_{10} y(0,a,c,\varepsilon) + \propto_{11} \frac{z(0,a,c,\varepsilon)}{\varepsilon} - \alpha = 0, \tag{18}$$

$$R_1(1,a,c,\varepsilon) = \beta_{10} y(1,a,c,\varepsilon) + \beta_{11} \frac{z(1,a,c,\varepsilon)}{\varepsilon} - \beta = 0.$$

Будем искать решение этой системы в виде следующих рядов:

$$c(\varepsilon) = c_0(\varepsilon) + \varepsilon c_1(\varepsilon) + \cdots, a(\varepsilon) = a_0(\varepsilon) + \varepsilon a_1(\varepsilon) + \cdots.$$

Для определения коэффициентов $c_k(\varepsilon), a_k(\varepsilon)$ подставим в (18) вместо точного решения $y(t,a,c,\varepsilon)$ его асимптотическое разложение (17). Так как все пограничные функции имеют экспоненциально убывающие оценки, то система (18) примет вид

$$\propto_{10} y_-(0) + \propto_{11} \frac{dy_-(0)}{dt} - \alpha + \varepsilon\left(\propto_{10} y_1^-(0) + \beta_{11} \frac{dy_1^-(0)}{dt}\right) + \cdots = O(\varepsilon),$$

$$\beta_{10} y_+(1) + \beta_{11} \frac{dy_+(1)}{dt} - \beta + \varepsilon\left(\beta_{10} y_1^+(1) + \beta_{11} \frac{dy_1^+(1)}{dt}\right) + \cdots = O(\varepsilon).$$

Таким образом, решение $y(t,a,c,\varepsilon)$ удовлетворяет условию (1) с точностью $O(\varepsilon)$.
Рассмотрим теперь решение $y(t,a_0,c_0,\varepsilon)$ уравнения (1) с начальным условием

$$y(t^0,a_0,c_0,\varepsilon) = a_0, y'(t^0,a_0,c_0,\varepsilon) = \frac{c_0}{\varepsilon}. \tag{19}$$

Задача (1), (19) – того же типа, что (5), (6). Она удовлетворяет всем условиям Теорем 1, 2. Строим асимптотику для ее решения точно так же, как и для задачи (5), (6). Тогда, с учетом равенства:

$$R_0^0(0,a_0,c_0,\varepsilon) \equiv \propto_{10} y_-(0) + \propto_{11} z_1(0) = \alpha + O(\varepsilon), \tag{20}$$

$$R_1^0(1,a_0,c_0,\varepsilon) \equiv \beta_{10} y_-(0) + \beta_{11} z_1(0) = \beta + O(\varepsilon).$$

Таким образом, решение $y(t,a_0,c_0,\varepsilon)$ удовлетворяет краевым условиям (2) с точностью порядка $O(\varepsilon)$.

6) Пусть функциональный определитель системы (20) $\frac{D(R_0^0,R_1^0)}{D(a_0,c_0)} = \Delta_0 \neq 0.$

Докажем, что (18) разрешимо относительно $a(\varepsilon), c(\varepsilon)$. Для этого изучим поведение функций $\frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial c}, \frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial c}$. Производные $\frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}$ и $\frac{\partial y}{\partial c}, \frac{\partial z}{\partial c}$ определяются системой, в вариациях отвечающей (7):

$$\varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = A(t,y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left[A_y'(t,y) + \varepsilon B_y'(t,y)\right]\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right), \tag{21}$$
$$\varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Начальные условия для $\frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}$ получаются дифференцированием (8) по параметру a:

$$\frac{\partial z}{\partial a}(t = t^0) = 0, \frac{\partial y}{\partial a}(t = t^0) = 1. \tag{22}$$

$$\frac{\partial z}{\partial c}(t = t^0) = 1, \frac{\partial y}{\partial c}(t = t^0) = 0.$$

Строя асимптотику решения задачи (21), (22) так же, как и для решения задачи (7), (8), будем иметь:

$$\frac{D(R_0,R_1,\varepsilon)}{D(a,c)}(a = a_0, c = c_0) = \Delta_0 + O(\varepsilon) \neq 0. \tag{23}$$

В силу (23) в достаточно малой окрестности точки (a_0,c_0) найдется единственная точка $(\bar{a}(\varepsilon), \bar{c}(\varepsilon))$, для которой будут выполнены равенства

$$R_0(0,\bar{a},\bar{c},\varepsilon) = \propto_{10} y(0,\bar{a},\bar{c},\varepsilon) + \propto_{11} \frac{z(0,\bar{a},\bar{c},\varepsilon)}{\varepsilon} - \alpha = 0, \tag{24}$$

$$R_1(1,\bar{a},\bar{c},\varepsilon) = \beta_{10} y(1,\bar{a},\bar{c},\varepsilon) + \beta_{11} \frac{z(1,\bar{a},\bar{c},\varepsilon)}{\varepsilon} - \beta = 0,$$

причем

$$|\bar{c}(\varepsilon) - c_0| \leq K \cdot \varepsilon, |\bar{a}(\varepsilon) - a_0| \leq K \cdot \varepsilon.$$

Таким образом, существует единственное решение $y(t,\bar{a},\bar{c},\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2).

Докажем теперь оценки (17). Для этого рассмотрим решение уравнения (1) с начальными условиями

$$y(t^0, \tilde{a}, \tilde{c}, \varepsilon) = \tilde{a}, y'(t^0, \tilde{a}, \tilde{c}, \varepsilon) = \frac{\tilde{c}}{\varepsilon}, \tag{25}$$

где $\tilde{c}(\varepsilon) = c_0 + \varepsilon c_1 + \cdots + \varepsilon^N c_N, \tilde{a}(\varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1 + \cdots + \varepsilon^N a_N$.

Если учесть (20)-(24), то нетрудно видеть, что решение $y(t, \tilde{a}, \tilde{c}, \varepsilon)$ при $t = 0$ и $t = 1$ удовлетворяет условиям (2) с точностью порядка $O(\varepsilon^{N+1})$:

$$\propto_{10} y(0, \tilde{a}, \tilde{c}, \varepsilon) + \propto_{11} \frac{dy(0, \tilde{a}, \tilde{c}, \varepsilon)}{dt} - \alpha = R_0(0, \tilde{a}, \tilde{c}, \varepsilon) - R_0(0, \bar{a}, \bar{c}, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}),$$

$$\beta_{10} y(1, \tilde{a}, \tilde{c}, \varepsilon) + \beta_{11} \frac{dy(1, \tilde{a}, \tilde{c}, \varepsilon)}{dt} - \beta = R_0(1, \tilde{a}, \tilde{c}, \varepsilon) - R_0(1, \bar{a}, \bar{c}, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Отсюда находим, что

$$|\tilde{c}(\varepsilon) - \bar{c}| \le K\varepsilon^{N+1}, |\tilde{a}(\varepsilon) - \bar{a}| \le K\varepsilon^{N+1}.$$

Теперь из Теоремы 1 непосредственно следуют неравенства (17). Теорема 3 доказана. Из Теоремы 3 следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t, \varepsilon) = y_-(t), 0 \le t < t^0, \lim_{\varepsilon \to 0} y(t, \varepsilon) = y_+(t), t^0 < t \le 1.$$

Таким образом, задача (1), (2) обладает явлением внутреннего начального скачка.

Список источников

1. **Биядилов Н. Б.** Сингулярно возмущенное квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка с внутренним начальным скачком // Известия Академии наук Казахской ССР. Серия физико-математических наук. 1990. № 5. С. 42-49.
2. **Васильева А. Б.** Асимптотика решений некоторых краевых задач для квазилинейных уравнений с малым параметром при старшей производной // Доклады Академии наук СССР. 1958. Т. 123. № 4. С. 583-586.
3. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 132. № 6. С. 1242-1245.
4. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3-122.
5. **Галахов М. А.** Решения дифференциальных уравнений с малым параметром, имеющие в переделе разрыв // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9. № 1. С. 96-107.
6. **Иманалиев М. И.** Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям: в 2-х т. Фрунзе: Илим, 1962. Т. 2. С. 21-39.
7. **Касымов К. А.** Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // Успехи математических наук. 1962. Т. 17. № 5. С. 187-188.
8. **Касымов К. А., Нургабылов Д. Н.** Асимптотическое разложение решения краевой задачи с внутренним начальным скачком // Материалы II Всесоюзной конференции по асимптотическим методам: в 2-х т. Алма-Ата: Наука, 1979. Т. 1. С. 97-99.
9. **Яркин А. Н.** Краевые задачи для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющие решения, близкие к разрывным: автореф. дисс. … к. ф.-м. н.: 01.01.02. М.: МГУ, 1977. 7 с.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH THE INTERNAL INITIAL JUMP

Nurgabyl Duisebek Nurgabyluly, Doctor in Physical-Mathematical Sciences, Professor
Kanatkyzy Zere
Zhetysu State University named after I. Zhansugurov, The Republic of Kazakhstan
kebek.kz@mail.ru

In the paper the authors consider the boundary-value problem for the second-order linear differential equation with the small parameter at the derivative. An algorithm for constructing the asymptotic expansion of the solution of the boundary-value problem is described. Uniform asymptotic approximation of the solution of the singularly perturbed boundary-value problem is constructed accurate within random order as the small parameter tends to zero. On the basis of asymptotics of the solution of the initial problem, existence and uniqueness of the solution of the boundary-value problem are proved. A degenerate problem is formulated. In case of sufficiently small $\varepsilon > 0$ the authors find difference estimate between solutions of perturbed and unperturbed problems. The phenomenon of the internal initial jump is investigated.

Key words and phrases: differential equations; boundary-value problems; small parameter; initial jump; asymptotic expansion.