УДК 101.1; 122/129; 501; 510

В данной статье предлагается к рассмотрению теоретико-множественное видение мира с философской точки зрения. Теоретико-множественный подход берет своё начало в математике и, как любая теория, развивается со временем. В связи с этим не исключено появление парадоксов, противоречий. Здесь, естественно, начинается спор. Поэтому целесообразно изучить философскую поддержку и критику теоретико-множественного подхода в современном естествознании.

Ключевые слова и фразы: философия; математика; естествознание; классическая теория множеств; теоретико-множественный подход; множество; интуиционизм; формализм.

Алексей Андреевич Сарумов
Кафедра математики, физики и методики обучения
Школа педагогики
Дальневосточный федеральный университет
a.sarumov@gmail.com

ФИЛОСОФСКАЯ ПОДДЕРЖКА И КРИТИКА ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОГО ПОДХОДА В СОВРЕМЕННОМ ЕСТЕСТВОЗНАНИИ[©]

История развития теории множеств в математике

Основой построения всей современной математики выступает теория множеств. Она основана на двух очень простых понятиях: на понятии множества и понятии элемента.

Множество – это одно из самых общих и важных математических понятий. Его ввел в математику немецкий ученый Георг Кантор. Определить понятие «множество» можно как совокупность объектов, которые обладают определенным свойством и объединены в единое целое. Соответственно, под множеством понимается любая совокупность объектов, которые по какой-либо причине необходимо сгруппировать вместе.

На данный момент существует достаточно вариантов определения понятия «множество». К примеру, Георг Кантор под множеством понимал соединение в некое целое M определённых хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться «элементами» множества M) [5, с. 173]. Другая формулировка принадлежит Бертрану Расселлу: «Множество есть совокупность различных элементов, мыслимая как единое целое» (http://ru.wikipedia.org/wiki/Множество).

До второй половины XIX века смысл понятия «множества» не рассматривался в качестве математического («множество книг на полке», «множество человеческих добродетелей» и т.д. – всё это просто бытовые обороты речи). Положение изменилось в то время, когда немецкий математик Георг Кантор выработал свою собственную программу стандартизации математики, в рамках которой любой математический объект должен был оказываться тем или иным «множеством». Например, натуральное число, по Кантору, необходимо рассматривать как множество, оно состоит из единственной части другого множества, которая называется «натуральным рядом», он, в свою очередь, сам представляет собой множество, которое удовлетворяет так называемым аксиомам Пеано [5]. Это полностью соответствовало умозрениям Кантора, который особенно называл свою программу не «теорией множеств», а *учением* о множествах.

Многие великие математики резко протестовали против программы Кантора. Особо выделился к ней своим негативным отношением Л. Кронекер. Он говорил, что математические объекты – это лишь натуральные числа и то, что к ним непосредственно сводится (известна его фраза о том, что «бог создал натуральные числа, а всё прочее – это дело рук человеческих» (http://ru.wikipedia.org/wiki/Множество)). Но всё же, другие математики, например, Г. Фреге и Д. Гильберт, поддержали Кантора в его намерениях перевести математику на теоретико-множественный язык.

Но впоследствии оказалось, что канторовская установка на неограниченный произвол при оперировании с множествами (который выражался им самим в принципе «сущность математики состоит в её свободе» (http://ru.wikipedia.org/wiki/Множество)) является изначально порочной. Это значит, что был обнаружен ряд теоретико-множественных антиномий: выяснилось то, что при использовании теоретико-множественных представлений некоторые утверждения могут быть доказаны вместе со своими отрицаниями (и потому, согласно правилам классической логики высказываний, может быть «доказано» абсолютно любое утверждение). Антиномии ознаменовали собой полный провал программы Кантора [Там же].

Б. Рассел в начале XX века, в то время, когда он изучал наивную теорию множеств, пришел к выводу, с тех пор известному как парадокс Рассела. Соответственно, была продемонстрирована несостоятельность наивной теории множеств и канторовской программы стандартизации математики, которая связана с ней.

После того, как антиномию Рассела обнаружили, часть математиков (например, Л. Э. Я. Брауэр и его школа) решила полностью отказаться от использования теоретико-множественных представлений. Другие математики, которые возглавлялись Д. Гильбертом, предприняли ряд попыток обосновать ту часть теоретико-множественных воззрений, которая казалась им менее ответственной за происхождение антиномий, на основе заведомо надёжной финитной математики. Для этого разработали различные аксиоматизации теории множеств.

Отличительной особенностью аксиоматического подхода выступает отказ от лежащего в основе программы Кантора представления о реальном существовании множеств в некотором идеальном мире [2]. В рамках аксиоматических теорий множества «существуют» исключительно формальным образом, и их «свойства» могут существенно зависеть от выбора аксиоматики. Это всегда являлось мишенью для критики со стороны тех математиков, которые не соглашались (как на том настаивал Гильберт) признать математику лишённой всякого содержания игрой в символы. В частности, Н. Н. Лузин писал, что «мощность континуума, если только мыслить его как множество точек, есть единая некая реальность» (http://ru.wikipedia.org/wiki/Множество), место которой в ряду кардинальных чисел не может зависеть от того, признаётся ли в качестве аксиомы континуум-гипотеза или же её отрицание.

Сейчас наиболее распространённой аксиоматической теорией множеств является *ZFC* – теория Цермело-Френкеля с аксиомой выбора. Вопрос о непротиворечивости этой теории (а тем более, о существовании модели для неё) до сих пор не решен.

Философское осмысление теоретико-множественного подхода в науке

Говоря о классической теории множеств, мы говорим о математике, не осмысливая данную теорию с философской точки зрения. Основные открытия в логике были сделаны совсем недавно, и мы ещё в состоянии разделять глубокое волнение от этих поисков вслепую. Всплеск исследовательской активности в теории множеств усиливает энтузиазм. Тон сегодняшних философских дискуссий, однако, изменился. Может быть, математики полностью выложились в неистовых спорах прошлого, или их аудитория утомилась от полемики; как бы то ни было, сейчас принято формулировать свою точку зрения, но не пытаться тут же обращать слушателя в собственную веру.

Прежде в центре дискуссий находились многие проблемы, например, закон исключённого третьего. Хотя он и связан с вопросами теории множеств, к примеру, через использование непредикативных определений, сам по себе он не относится к теории множеств и здесь обсуждаться не будет. Не будем заниматься также всеми остальными проблемами законности применения исчисления предикатов, проблемами о природе формализации математики и чисто философскими вопросами, мало связанными со спецификой математического знания. В данном случае важнейшей проблемой представляется существование бесконечных совокупностей. Отношение к бесконечным множествам по традиции было критерием размежевания математиков. Знаменитые логические антиномии никогда не играли существенной роли в математике просто потому, что они не имели ничего общего с обычно используемыми рассуждениями. Никогда не рассматривались все мыслимые объекты универсума, длины описаний и т.п. Все эти трудности принадлежат, собственно, истории развития понятия формальной системы. Подобно этому, парадоксы Зенона совсем не производят на нас впечатления демонстрации существенных трудностей, ради чего они и были придуманы. В общем, можно считать, что многие из этих проблем исторически связаны с переходным периодом от классической философии к нынешней математике [Там же].

Без сомнения, в большинстве случаев бесконечными множествами можно пользоваться без особых опасений. Очевидно, всё равно, сказать ли, что некоторым свойством обладают все целые числа или все элементы множества целых чисел. Точно так же сказать, что n принадлежит множеству четных чисел, всё равно, что сказать «n чётное». То есть можем заменить использование некоторых множеств названием соответствующих свойств. Если бы это удавалось сделать всегда, у нас осталось бы мало оснований для беспокойства. В теории чисел, желая избежать апелляции к понятию произвольного множества целых чисел, мы можем формулировать принцип индукции отдельно для каждого свойства, которое можно выразить. Но большая сложность теории множеств, особенно её непредикативный характер, мешает просто представлять себе множества как стенограмму свойств. Всё-таки самые мощные и характерные аксиомы теории множеств – аксиомы степени и подстановки – описывают множества свойствами, а гёделевская теория конструктивных множеств показывает, что некоторую модель теории множеств можно получить, рассматривая вообще только множества, в некотором смысле отвечающие свойствам. То обстоятельство, что аксиома подстановки есть на самом деле бесконечная схема аксиом, в определённых отношениях является недостатком. Действительно, создаётся впечатление, что мы позволяем рассматривать лишь некоторые свойства, вместо того чтобы указать фундаментальное описание способов построения множеств. Безусловно, всё это связано с теоремой Гёделя о неполноте, согласно которой никакая конечно аксиоматизируемая система не может быть полной. Эта теорема является величайшим препятствием для любой попытки полностью понять природу бесконечных множеств. Одновременно, показывая, что высшие бесконечности отражаются в теории чисел, ибо позволяют нам доказывать недоказуемые без них утверждения, теорема Гёделя чрезвычайно затрудняет отстаивание той точки зрения, что высшие бесконечности можно попросту отвергнуть [7]. Привычка к теореме о неполноте не должна мешать наблюдать эту фундаментальную недостаточность всех формальных систем, которая имеет гораздо более далеко идущие последствия, чем независимость частных утверждений вроде гипотезы континуума. Именно это лежит в основе пессимистического мнения о том, что любое техническое достижение и в будущем не прольёт света на основные философские проблемы.

Рядовому математику, который хочет лишь увериться в том, что его дело стоит не на песке, самым оптимальным способом избежать трудности может показаться программа Гильберта. С данной точки зрения, математика – это формальная игра, в которой следует заботиться лишь о непротиворечивости. С течением времени, когда операционный подход распространился на другие области, скажем, физику, привлекательность этой позиции, возможно, увеличилась. Можно работать лишь с непосредственно данными объектами, а в математике к таким относятся, скорее, формальные языки, чем бесконечные множества. Действительно, программа формализации Гильберта по-прежнему остаётся единственной вполне точной (мы не говорим правильной) точкой зрения в этих вопросах. Вот наглядный пример того, как само по себе течение времени мало повлияло на появление новых и оригинальных концепций в основаниях. Но, конечно, формализму присущи свои трудности, и прежде чем вернуться к нему, мы рассмотрим его главную альтернативу, точку зрения, которую можно назвать платонизмом или реализмом.

Сторонник реалистической философии полностью принимает ценности традиционной математики. Все вопросы наподобие гипотезы континуума допускают положительный или отрицательный ответ в реальном мире безотносительно к их независимости от той или иной системы аксиом. Вероятно, большинство математиков предпочли бы эту точку зрения. В ней начинают сомневаться лишь после осознания некоторых трудностей теории множеств. Если эти трудности особенно смущают математика, он спешит под прикрытие формализма, предпочитая, однако, в спокойное время обретаться где-то между двух миров, наслаждаясь лучшим, что есть в обоих. Главное преимущество реализма состоит в том, что он избавляет от необходимости обосновывать аксиомы теории множеств. Нет нужды устанавливать их непротиворечивость и, что кажется столь же важным, нет нужды объяснять, почему именно эти аксиомы оказались настолько успешными и достойными специального внимания. Поэтому самая большая слабость формализма состоит в невозможности объяснить, почему аксиомы теории множеств, предположительно не отражающие никакой реальности, способны доказывать арифметические утверждения, не доказуемые с помощью более финитистских средств. Слабость, которую должен будет признать любой реалист, состоит в неспособности объяснить нескончаемую последовательность новых аксиом вроде высших аксиом бесконечности. Безусловно, самый закоренелый реалист содрогнётся, рассматривая кардиналы достаточно недостижимого типа. А есть ещё аксиомы, как аксиома об измеримом кардинале, которые сильнее всех предложенных аксиом бесконечности и относительно которых, по-видимому, нет ни малейших интуитивно убедительных свидетельств в пользу принятия или отвержения. Недавние результаты о независимости также бросают вызов реалистической позиции. Хотя некоторые чувствуют, что какая-то интуитивно приемлемая аксиома сможет, в конце концов, разрешить проблему континуума и подобные ей вопросы; нет ни малейшей надежды на такой исход для аксиомы об измеримом кардинале, которую ревностные теоретико-множественники, вероятно, вынуждены будут признать в качестве аксиомы, ни к чему не сводимой. Однако даже в этом отношении позиция реалистов завиднее, чем формалистов, потому что для последних существуют даже неразрешимые теоретико-числовые предложения, скажем, *Consis* (*ZF*). Оптимистическая точка зрения реалиста может состоять в том, что утверждение *Consis* (*ZF* + измеримый кардинал) как-нибудь сведётся к вопросу о непротиворечивости достаточно сильных предложений того же типа, что аксиомы бесконечности. Самая оптимистическая точка зрения заключается в надежде, что любой вопрос теории чисел решается с помощью подходящей аксиомы бесконечности [Там же].

Исторически математика словно не склонна терпеть неразрешимые предложения. Такое предложение может быть возведено в ранг аксиомы и стать широко принятым после многократного употребления. Такова в общих чертах судьба аксиомы выбора. Присоединяюсь к мнению, что это безличный и весьма конструктивный оппортунизм. Но, тем не менее, вера в ценность и важность математики не должна полностью изглаживать из нашего сознания честную оценку беспокоящих проблем. В случае с гипотезой континуума эта тенденция может, хотя и с малым вероятием, привести теорию множеств к разделению на несколько ветвей в зависимости от принятой мощности континуума. Несколько цинично можно сказать, что оппортунизм решает философские проблемы так, чтобы развитие математики давало заработок возможно большему числу математиков. В научном сообществе достаточно долго занимались вопросами независимости в теории множеств. Потрясающий эффект состоит в том, что большая лёгкость в обращении с этими вопросами привела к большей вере в «реальность» математических объектов теории множеств. Было бы поистине печально, если бы эта волна успеха закончилась полным пренебрежением к философским проблемам гипотезы континуума и смежных вопросов математики. Конечно, хорошая математика красива, в то время как философские дискуссии по большей части бесплодны и, конечно, некрасивы.

Философская поддержка и критика теоретико-множественного подхода в науке

Тесная связь между теорией множеств и философией математики породила много вопросов о природе противоречий и аксиоматизации этой теории. Во взглядах на то, как можно было бы удовлетворительно обосновать теорию множеств, имеются большие расхождения. Но большинство математиков продолжают с успехом применять понятия, методы и результаты этой теории в большинстве разделов математики и твердо верят в то, что усилия по устранению противоречий приведут к ее реабилитации. Эта позиция отнюдь не исключает готовности интерпретировать теорию множеств совсем не так, как это обычно делается, что соответствует, очевидно, существующей потребности в пересмотре интерпретации логики и математики вообще [3].

Главным критическим направлением, который обсуждал теоретико-множественный подход, был интуиционизм, представляющий математику в целом как науку об умозаключениях. С точки зрения интуиционизма, основным критерием истинности математических суждений является интуитивная убедительность возможности построения мысленного эксперимента, связываемого с этим суждением. Поэтому в интуиционистской математике отвергается теоретико-множественный подход к определению математических понятий, а также некоторые способы рассуждения, принятые в классической логике.

Зарождение интуиционизма можно проследить еще в античной математике, а позднее в высказываниях таких ученых, как К. Гаусс, Л. Кронекер, А. Пуанкаре, А. Лебег, Э. Борель. Начиная с 1904 г., в ряде статей выступил с развернутой критикой некоторых концепций классической математики Л. Э. Я. Брауэр [Там же]. В основе этой критики лежит обсуждение статуса существования в математике: в каком смысле следует считать установленным существование актуально заданного бесконечного множества и могут ли быть построены в виде потенциально осуществимой конструкции такие объекты исследования, как неизмеримое множество действительных чисел, нигде не дифференцируемая функция? Естественно предположить, что можно построить произвольное натуральное число в виде последовательного ряда однородных предметов, например, ряда параллельных черточек. В рамках такой же идеализации можно допустить, что, построив некоторое натуральное число, можно построить затем и следующее, добавив к уже построенному еще одну черточку. Но, встает вопрос о том, с какого рода построением связано множество всех действительных чисел или множество всех натуральных чисел как единый объект исследования. Современные физические воззрения также как будто не дают оснований полагать, что в окружающем нас мире актуально существуют бесконечные множества объектов. Есть серьезные основания считать, что объекты, существование которых устанавливается без использования абстракции актуальной бесконечности, а лишь в рамках гораздо более скромной абстракции потенциальной осуществимости, имеют более непосредственное отношение к реальной действительности. Однако при обычной теоретико-множественной трактовке не делается никакого различия между объектами, существование которых можно подтвердить с помощью некоторого потенциально осуществимого построения, и абстрактными теоретико-множественными объектами исследования. Способы установления свойств обоих типов объектов в классической математике основаны на законах логики, возникших в результате экстраполяции законов, верных для конечных совокупностей, на бесконечные множества. В области бесконечного эти законы не ориентированы на эффективное построение объектов, существование которых утверждается. Фактически такое положение дел приводит к появлению в математике так называемых «теорем чистого существования», в которых утверждается существование некоторых объектов и в то же время не указывается никакого способа отыскания этих объектов. Такова, например, известная теорема классического анализа, утверждающая, что всякая непрерывная действительная функция, заданная на замкнутом ограниченном множестве, имеет максимум. Обычное доказательство этой теоремы не дает никаких указаний на метод построения искомого максимума. Это обстоятельство может и не смущать теоретико-множественно настроенного математика: он может считать, что максимум «есть» у всякой функции рассматриваемого класса, независимо от того, можно его отыскать в каждом частном случае или нет, «есть» как объект некоторого воображаемого мира. Однако такой подход не удовлетворяет, если принять во внимание возможности субъекта-исследователя. Имеется ли способ отыскания максимума, и, если этот способ не указан, то в каком-то смысле верно, что максимум существует у всякой функции рассматриваемого класса? Известно, сколь трудной является задача поиска экстремума у функций даже весьма узкого класса (многочлены с рациональными коэффициентами от нескольких переменных), и, что существенно, указанная теорема нисколько не помогает в решении этой задачи. Заметим, что описанная выше критика классической математики не связана непосредственно с антиномиями теории множеств. Появление антиномий можно рассматривать как дополнительный довод в пользу неудовлетворительности теоретико-множественного подхода, но критика относится и к таким разделам математики, где антиномий не возникает.

Описанная критика теоретико-множественного подхода к математике исторически привела к возникновению двух путей преодоления трудностей в обосновании математики – интуиционизма Л. Э. Я. Брауэра и формализма Д. Гильберта. Обе концепции, развиваясь, оказывают в настоящее время значительное влияние друг на друга. Так, при обосновании непротиворечивости формальных теорий необходимо уточнить приемы содержательных умозаключений в метаматематике, что делается обычно в рамках тех или иных интуиционистских концепций. С другой стороны, именно с помощью формализации метода удалось получить ряд важнейших результатов о логике интуиционизма [4].

Список литературы

1. **Александров П. С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Главная редакция физико-математической литературы Издательства «Наука», 1977. 368 с.
2. **Архангельский А. В.** Канторовская теория множеств. М.: Изд-во МГУ, 1988. 112 с.
3. **Вейль Г.** О философии математики / пер. с нем.; предисл. С. А. Яновской; вступ. ст. А. П. Юшкевича. Изд-е 2-е, стереотипное. М.: КомКнига, 2005. 128 с.
4. **Гуссерль Э.** Философия как строгая наука. Новочеркасск: Сагуна, 1994. 752 с.
5. **Кантор Г.** Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. 430 с.
6. **Медведев Ф. А.** Развитие теории множеств в XIX в. М.: Наука, 1965. 232 с.
7. **Серпинский В.** О теории множества. М.: Просвещение, 1966. 62 с.
8. **Философский энциклопедический словарь** / гл. ред. Л. Ф. Ильичев, П. Н. Федосеев, С. М. Ковалев, В. Г. Панов. М.: Советская энциклопедия, 1983. 840 с.
9. **Френкель А., Бар-Хиллел И.** Основания теории множеств. М.: Мир, 1966. 555 с.

PHILOSOPHICAL APPROVAL AND CRITICISM OF SET-THEORETICAL APPROACH IN MODERN NATURAL SCIENCE

Aleksei Andreevich Sarumov
Department of Mathematics, Physics and Teaching Technique
School of Pedagogy
Far-Eastern Federal University
a.sarumov@gmail.com

The author proposes to consider the set-theoretical view of the world from philosophical positions. The set-theoretical approach originates in mathematics and, like any theory, develops over time. In this regard, it is entirely possible that paradoxes and contradictions appear, and it is natural that the dispute begins. In this connection it is advisable to study the philosophical approval and criticism of the set-theoretical approach to modern natural science.

Key words and phrases: philosophy; mathematics; natural science; classical theory of sets; set-theoretical approach; set; intuitionism; formalism.

УДК 572

Статья раскрывает содержание понятия «технологии власти» в современном обществе. Основное внимание в работе автор уделяет рассмотрению способов организации социального бытия и осмыслению феномена «современные технологии власти» как фактора устойчивого развития общества, что предполагает философско-культурологический анализ технологий власти, условий осуществления их функций и методов, важных для их понимания.

Ключевые слова и фразы: власть; управление; технологии власти; современные технологии власти; консциентальные войны; трансформация власти; социодинамика культуры.

Екатерина Владимировна Староверова
Кафедра культурологии, философии и социологии
Казанский государственный университет культуры и искусств
staroverovaev@mail.ru

ТЕХНОЛОГИИ ВЛАСТИ В СОВРЕМЕННОМ ОБЩЕСТВЕ©

В данной статье ставится цель оценить роль технологий власти, раскрыть их взаимосвязь с бытием человеческого общества, показать предпосылки появления деструктивных технологий, а также определить перспективы их развития и выявить их культурное основание в современном мире для перерождения политической власти в общественное самоуправление.

В современном мире технологии власти активно используются в различных областях человеческой деятельности. В этой области существует множество определений, но все они практически относятся к сфере производства материальных объектов. При анализе некоторых определений мы приходим к усредненному понятию, которое звучит следующим образом: «Технология – это возможность воспроизведения какой-либо деятельности по образцу, в любом месте, из других материалов». Технологии позволяют использовать способности и деятельность людей для переноса процесса в любое место по достижению определенных результатов. Но общество это не коллектив завода, поэтому методы должны быть другими. Гуманитарные технологии в некоторых областях уже используются весьма эффективно, регулярно создаются новые. Применение их зависит от поставленных задач [5; 8; 11].

Технологии власти имеют не материальную, а общественную природу и направлены на изменение «второй природы» человека. Они стали возникать в результате глобальных изменений в человеческом обществе. В частности, после революций XIX-XX веков, в результате которых происходило уничтожение существующего, в настоящее время необходимо осваивать достижения культуры и формировать ее у каждого конкретного человека. При внедрении инженерных технологий в отношения власти, эти методы оказались недейственными, потому как дело обстоит не с бездушными машинами, а с живым обществом, которое постоянно изменяется. Тем более, что люди способны думать, анализировать происходящее, а главное действовать. Поэтому в данном случае результата заранее просчитать практически невозможно.

Технологии власти это, также как и в производственной сфере, совокупность приемов деятельности для достижения поставленных целей. Формирование технологий власти идет в тесной связи с артификацией общественной жизни, а потому как все приходит в порядок искусственным путем, нужны согласованные действия.

Технологии должны способствовать сохранению качества при воспроизведении. В гуманитарных технологиях идея последовательности действий остается, но добавляются гуманитарные знания и информация,