

Арешев И. П., Громова Е. С., Бодунов Е. Н.

**ДОЛИННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В КРИСТАЛЛАХ ПРИ
ОДНО- И ДВУХФОТОННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ**

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2008/12/4.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по данному вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2008. № 12 (19). С. 27-31. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2008/12/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

37. Vinas Pilar, Ignacio Lopez, Marcos Lanzen and Manual Hernandez-Cardoba (1997). Direct Determination of Lead, Cadmium and Copper in Honey by Elctothermal Atomic Absorption Spectrometry Using Hydrogen Peroxids As Matrix Modifier // Journal of Agricultural and Food Chemistry. - № 45. – Pp. 3952-3956.

38. Vorlova L. and O. Celehovska (2002). Activity of Enzymes and Trace Element Content in Bee Honey // Acta Vet. Brno. - № 71. – Pp. 375-378.

ДОЛИННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В КРИСТАЛЛАХ ПРИ ОДНО- И ДВУХФОТОННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

*Арешев И. П., Громова Е. С., Бодунов Е. Н.
Петербургский государственный университет путей сообщения*

Введение

Двухфотонное поглощение (ДФП) в кристаллах обычно изучается по возбуждаемой при ДФП люминесценции и фотопроводимости [Бонч-Бруевич 1965: 3; Бредихин 1973: 4; Коваленко В. Ф. 2003: 7]. С другой стороны, сами явления люминесценции и фотопроводимости часто удобнее исследовать при двухфотонном возбуждении, чем при однофотонном, из-за более однородного по объему характера возбуждения среды при ДФП. Особый интерес представляют исследования люминесценции и фотопроводимости в кристаллах кубической симметрии с многодолинным энергетическим спектром (халькогениды свинца, кремния, германия и др.). Дело в том, что в этих материалах из-за различия продольной и поперечной эффективных масс носителей заряда возбуждение электронно-дырочных пар в различные энергетические долины при ДФП сильно зависит от направления линейной поляризации излучения накачки относительно осей симметрии кристалла (при однофотонной накачке также имеется поляризационная зависимость, но более слабая). Таким образом, если время междолинного рассеяния неравновесных носителей больше времени жизни носителей относительно межзонной рекомбинации, то возможно осуществление селективного заполнения долин или так называемой долинной ориентации носителей. При этом рекомбинационное излучение (РИ) должно быть частично линейно поляризованным. По степени линейной поляризации РИ может быть определено отношение упомянутых времен, а при их отношении, много большем единицы, может быть определена степень анизотропии эффективных масс в энергетических долинах. При достаточно интенсивных накачках, когда РИ становится стимулированным (СРИ), селективное заполнение долин проявляется особенно ярко: при изменении направления линейной поляризации накачки имеет место периодическая модуляция интенсивности и степени поляризации СРИ, причем максимальная степень поляризации стимулированного РИ значительно выше, чем для спонтанного.

Селективное заполнение энергетических долин (долинная ориентация неравновесных носителей) наблюдалось в кристаллах PbTe при однофотонном возбуждении линейно поляризованным светом по частичной поляризованности спонтанного РИ [Lavallard 1975: 12], при двухфотонном возбуждении в PbTe [Арешев 1975: 1, Арешев 1976: 2] и PbSe [Данишевский 1982: 5] по сильной модуляции интенсивности и степени поляризации СРИ при изменении направления линейной поляризации накачки. При непрямом однофотонном возбуждении в Si это явление было обнаружено при исследовании циклотронного резонанса [Karlyanskii 1976: 11]. В принципе долинная ориентация может быть обнаружена также и при измерении анизотропии фотопроводимости [Genzow 1978: 9].

Как уже было отмечено, необходимыми условиями селективного заполнения энергетических долин в кристаллах кубической симметрии с многодолинным энергетическим спектром при оптической накачке являются 1) различие продольной $m_{||}$ и поперечной m_{\perp} эффективных масс носителей в долинах и 2) выполнение условия $\tau_r < \tau_{ss'}$, где τ_r – время жизни неравновесных носителей относительно межзонной рекомбинации, $\tau_{ss'}$ – время междолинного рассеяния неравновесных носителей. При достаточно низких температурах второе условие часто оказывается выполненным [Арешев 1975: 1; Арешев 1976: 2; Данишевский 1982: 5; Karlyanskii 1976: 11; Lavallard 1975: 12].

Степень селективности заполнения энергетических долин зависит также от характера возбуждения (одно- и двухфотонное) и от направления вектора поляризации линейно поляризованного света накачки относительно кубических осей кристалла. В случае линейной спонтанной рекомбинации по степени поляризации РИ может быть определено отношение $\tau_r/\tau_{ss'}$. Соответствующий расчет будет проведен на примере кристаллов халькогенидов свинца.

Результаты расчета и обсуждение

Халькогениды свинца принадлежат к классу полупроводниковых соединений A_4B_6 и кристаллизуются в кубической решетке типа NaCl, точечная группа симметрии O_h . Валентная зона и зона проводимости в них описываются многоэллипсоидной моделью, причем эллипсоиды вытянуты в направлениях [111] (точка L зоны Бриллюэна) (Рис. 1).

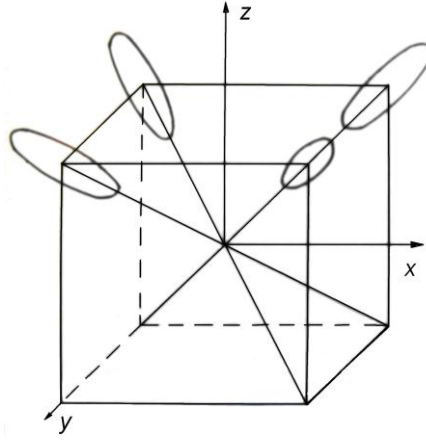


Рис. 1. Поверхности постоянной энергии вблизи экстремумов зоны проводимости и валентной зоны на L -краю зоны Бриллюэна халькогенидов свинца

С учетом этого в отсутствие вырождения и при не слишком сильной накачке (линейная рекомбинация) для интенсивности РИ нетрудно получить

$$I(\mathbf{\epsilon}, \mathbf{e}) \propto \sum_{s=1}^4 W_s^{(1)}(\mathbf{\epsilon}) \left[W_s^{(p)}(\mathbf{e}) + \eta(q) \sum_{s \neq s'} W_{s'}^{(p)}(\mathbf{e}) \right], \quad (1)$$

$$\eta(q) = q \left[(1+3q)(1+5q) + q^2 \right] \left[(1+3q)(1+6q+6q^2) - 2q^3 \right]^{-1} \quad (2)$$

где $q = \tau_r / \tau_{ss'}$, $\mathbf{\epsilon}$ и \mathbf{e} - единичные векторы поляризации РИ и света накачки соответственно, $W_s^{(p)}(\mathbf{e})$ - скорость однофотонной ($p=1$) или двухфотонной ($p=2$) генерации электронно-дырочных пар в s -й долине в единице объема.

Для дальнейшего анализа нам необходим конкретный вид поляризационных зависимостей однофотонных $W_s^{(1)}(\mathbf{e})$ и двухфотонных $W_s^{(2)}(\mathbf{e})$ межзонных переходов. Обычно при исследовании края оптического поглощения в халькогенидах свинца используют двухзонную модель Кейна [Равич 1968: 8], в рамках которой простейшим способом учитывается непараболичность зоны проводимости и валентной зоны. Непараболичность зон, однако, отражается в основном на частотной зависимости $W_s^{(p)}$, в то время как поляризационные свойства остаются неизменными. Несложные вычисления дают следующие зависимости $W_s^{(p)}(\mathbf{e})$ от поляризации света [Ивченко 1972: 6; Genzow 1978: 10]:

$$W_s^{(p)}(\mathbf{e}) \propto \left[1 - \alpha |e_{sz}|^2 \right]^p \quad (3)$$

где $\alpha = 1 - (P_{//}/P_{\perp})^2 \approx 1 - m_{//}/m_{\perp}$, $P_{//}$ и P_{\perp} - продольный и поперечный матричные элементы оператора импульса, e_{sz} - проекция вектора поляризации света на большую ось s -го эллипсоида.

Используя (1)–(3), можно получить поляризационные свойства спонтанного РИ из халькогенидов свинца для произвольной геометрии эксперимента. Рассмотрим два частных случая.

а) Излучение накачки распространяется вдоль направления $[111]$ в кристалле, РИ измеряется в этом же направлении. В предельном случае $\tau_r \ll \tau_{ss'}$ при однофотонной (ОФ) накачке линейно поляризованным светом для интенсивности РИ получим

$$I_{O\Phi}^{[111]}(\psi, \phi) \propto \left\{ 1 + 3 \left(1 - \frac{4\alpha}{9} \right)^2 + \frac{8}{27} \alpha^2 \cos 2(\psi - \phi) \right\} \quad (4)$$

где ψ, ϕ - углы, которые составляют векторы поляризации РИ и излучения накачки с осью x в системе координат с осью z по $[111]$.

Из (4) видно, что степень линейной поляризации РИ $\rho = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$ не зависит от направления линейной поляризации накачки, а направление поляризации РИ совпадает с направлением поляризации накачки.

В случае двухфотонной (ДФ) накачки вместо (4) получаем

$$I_{\Delta\phi}^{[111]}(\psi, \phi) \propto \left\{ 1 + 3 \left(1 - \frac{4\alpha}{9} \right)^3 + \frac{8\alpha^2}{27} \left(1 - \frac{4\alpha}{9} \right) + \frac{16\alpha^2}{27} \left(1 - \frac{4\alpha}{9} \right) \cos 2(\psi - \phi) + \frac{16}{243} \alpha^3 \sin 2(\psi + 2\phi) \right\}. \quad (5)$$

Здесь уже степень и направление линейной поляризации РИ зависят от направления поляризации накачки, но довольно слабо.

б) Свет накачки и РИ распространяются вдоль направления [001] в кристалле. Теперь вместо (4) и (5) получаем

$$I_{O\phi}^{[001]}(\psi, \phi) \propto \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{3} \right)^2 + \frac{\alpha^2}{9} \sin 2\psi \sin 2\phi \right\} \quad (6)$$

$$I_{\Delta\phi}^{[001]}(\psi, \phi) \propto \left\{ 1 - \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^3}{18} \cos 4\phi + \frac{2\alpha^3}{9} \sin 2\psi \sin 2\phi \right\} \quad (7)$$

Здесь ψ, ϕ - углы, которые составляют векторы поляризации РИ и света накачки с направлением [100] в кристалле. Из (6), (7) видно, что при $\phi = \pi/2$ поляризации РИ нет, а при $\phi = \pi(2\ell + 1)/4$ степень поляризации РИ максимальная ($\ell = \pm 1, \pm 2, \dots$).

в) Выражения типа (4)-(7) можно получить и при сравнимых временах τ_r и $\tau_{ss'}$, используя (1)-(3). Выпишем соответствующие выражения для степени поляризации РИ:

$$\rho_{O\phi}^{[111]}(q) = \frac{\frac{8\alpha^2}{27} [1 - \eta(q)]}{1 + 3 \left(1 - \frac{4\alpha}{9} \right)^2 + 12\eta(q) \left(1 - \frac{4\alpha}{9} \right) \left(1 - \frac{2\alpha}{9} \right)}, \quad (8)$$

$$\rho_{\Delta\phi}^{[111]}(q, \phi) = \frac{16\alpha^2}{27} [1 - \eta(q)] \left[\left(1 - \frac{4\alpha}{9} \right)^2 + \frac{\alpha^2}{81} + \frac{2\alpha}{9} \left(1 - \frac{4\alpha}{9} \right) \sin 6\phi \right]^{\frac{1}{2}} \times \left\{ 1 + \frac{8\alpha^2}{27} \left(1 - \frac{4\alpha}{9} \right) + 3 \left(1 - \frac{4\alpha}{9} \right)^3 + \eta(q) \left\{ 3 - \frac{4\alpha}{3} + \left(3 - \frac{8\alpha}{9} \right) \left[3 \left(1 - \frac{4\alpha}{9} \right)^2 + \frac{8\alpha^2}{27} \right] \right\} \right\}^{-1}, \quad (9)$$

$$\rho_{O\phi}^{[001]}(q, \phi) = \frac{\alpha^2 [1 - \eta(q)] \sin 2\phi}{(3 - \alpha)^2 + [1 + 3\eta(q)]}, \quad (10)$$

$$\rho_{\Delta\phi}^{[001]}(q, \phi) = \frac{2\alpha^2 [1 - \eta(q)] \sin 2\phi}{(3 - \alpha)^2 + \alpha^2 \sin^2 2\phi [1 + 3\eta(q)]}, \quad (11)$$

Максимальная степень ρ_{\max} линейной поляризации спонтанного рекомбинационного излучения в халькогенидах свинца при $\tau_r \ll \tau_{ss'}$.

ρ_{\max}	Направление [111]		Направление [001]	
	ОФ накачка	ДФ накачка	ОФ накачка	ДФ накачка
PbTe	0.115	0.187	0.184	0.31
PbSe	0.026	0.05	0.04	0.08
PbS	0.008	0.012	0.012	0.024

Величины ρ_{\max} для кристаллов PbTe, PbSe, PbS, вычисленные по формулам (8)-(11) при $q = \tau_r/\tau_{ss'} \rightarrow 0$ и соответствующем ϕ , представлены в Таблице, где использованы значения $m_{\perp}/m_{\parallel} = 0.1, 0.5$ и 0.7 для PbTe, PbSe и PbS соответственно [Равич 1968: 8].

На Рис. 2 построены зависимости ρ_{\max} от q для PbTe, используя которые, можно по экспериментальным значениям ρ_{\max} определить $\tau_r/\tau_{ss'}$.

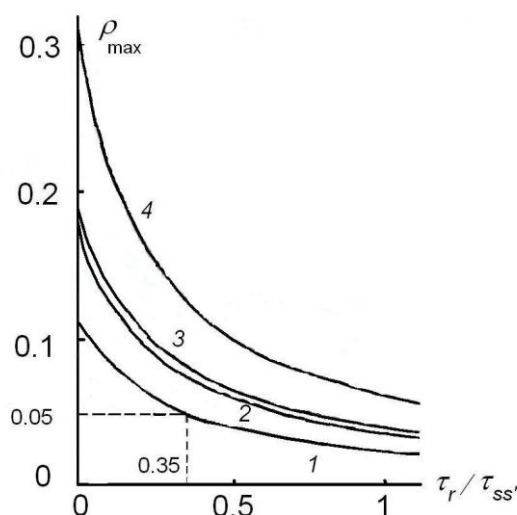


Рис. 2. Зависимость максимальной степени линейной поляризации ρ_{\max} спонтанного РИ в РbТе от отношения времен τ_r/τ_{ss} , при ОФ и ДФ линейно поляризованной накачке для двух направлений ([111] и [001]) распространения излучения в кристалле. Кривая 1 - $\rho_{\text{ОФ}}^{[111]}$, 2 - $\rho_{\text{ОФ}}^{[001]}$, 3 - $\rho_{\text{ДФ}}^{[111]}$, 4 - $\rho_{\text{ДФ}}^{[001]}$.

Например, по значению $\rho_{\text{ОФ}}^{[111]} = 0.05$, измеренному в [Lavallard 1975: 12] при ОД накачке кристалла РbТе вдоль направления [111] линейно поляризованным светом СО-лазера при $T = 2$ К, получим с использованием соответствующей кривой на Рис. 2 $\tau_r = 0.35\tau_{ss}$. Более выгодным, однако, для определения τ_r/τ_{ss} , является направление излучения накачки вдоль [001] из-за большей величины ρ_{\max} и возможности применения модуляционной методики определения ρ_{\max} (по причине сильной зависимости ρ от φ). ДФ накачка имеет существенные преимущества перед ОД также из-за значительно большей величины ρ_{\max} и, кроме этого, из-за более объемного характера возбуждения РИ.

Заключение

В заключении сформулируем основные результаты работы.

Исследовано явление селективной заселенности энергетических долин (долинной ориентации) в кристаллах с многодолинным энергетическим спектром при ДФ накачке линейно поляризованным светом.

Развита теория поляризационных свойств спонтанного РИ при ОД и ДФ накачках линейно поляризованным светом кристаллов халькогенидов свинца. Рассчитанные зависимости степени поляризации РИ позволили по экспериментальным данным определить отношение времени междолинного рассеяния неравновесных носителей и времени жизни относительно межзонной рекомбинации в РbТе.

Список использованной литературы

1. Аршев И. П. О модуляции лазерного действия в теллуриде свинца изменением поляризации излучения накачки / Аршев И. П., Данишевский А. М., Кочегаров С. Ф., Субашиев В. К. // Письма в ЖЭТФ. - 1975. - Т. 22. - № 9. - С. 437-441.
2. Аршев И. П. Двухфотонное селективное заполнение энергетических долин в РbТе и скачки направления поляризации рекомбинационного излучения / Аршев И. П., Данишевский А. М., Кочегаров С. Ф., Субашиев В. К. // Письма в ЖЭТФ. - 1976. - Т. 24. - № 11. - С. 594-598.
3. Бонч-Бруевич А. М. Многофотонные процессы / Бонч-Бруевич А. М., Ходовой В. А. // УФН. - 1965. - Т. 85. - В. 1. - С. 3-64.
4. Бредихин В. И. Двухфотонное поглощение и люминесценция / Бредихин В. И., Галанин М. Д., Генкин В. Н. // УФН. - 1973. - Т. 110. - В. 1. - С. 3-43.
5. Данишевский А. М. Поляризационные характеристики стимулированного излучения кристаллов РbSe при двухфотонной накачке, обусловленные селективным заполнением энергетических долин // ЖЭТФ. - 1982. - Т. 82. - № 3. - С. 685-690.
6. Ивченко Е. Л. Двухфотонное поглощение и оптическая ориентация свободных носителей в кубических кристаллах // ФТТ. - 1972. - Т. 14. - № 12. - С. 3489-3497.
7. Коваленко В. Ф. Размерный эффект двухфотонного поглощения рекомбинационного излучения в варизонных твердых растворах $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ / Коваленко В. Ф., Шутов С. В. // ФТП. - 2003. - Т. 37. - В. 1. - С. 39-43.
8. Равич Ю. И., Ефимова Б. А., Смирнов И. А. Методы исследования полупроводников в применении к халькогенидам свинца РbТе, РbSe, РbS. - М.: Наука, 1968. - 383 с.
9. Genzow D. Anisotropy of Photoconductivity in Lead Chalcogenides // Phys. Stat. Sol. (b). - 1978. - V. 86. - № 2. - P. 143-146.

10. **Genzow D.** On the Interband Absorption in Lead-Chalcogenides under Linearly Polarized Light Excitation // Phys. Stat. Sol. (b). - 1978. - V. 89. - № 1. - P. 9-11.

11. **Kaplyanskii A. A.** Selective Optical Valley Pumping in Silicon and Germanium / Kaplyanskii A. A., Sokolov N. S., Novikov B. V., Gastev S. V. // Sol. St. Commun. - 1976. - V. 20. - № 1. - P. 27-29.

12. **Lavallard P.** Valley Selection by Linear Optical Pumping in PbTe / Lavallard P., Bichard R., Sapoval B. // Sol. St. Commun. - 1975. - V. 17. - № 10. - P. 1275-1277.

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ

Аскарова А. Ж.

Казахский агротехнический университет им. С. Сейфуллина

Пусть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$ - m -мерное пространство, $x_i \in (-\infty; +\infty), i = 1, \dots, m; I_m = [-\pi; \pi]^m$ - m -мерный куб. Через L_q обозначают пространство измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, 2π -периодических по каждой

переменной таких, что $\|f\|_q = \left\{ \int_{I_m} |f(\bar{x})|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} < +\infty, 1 \leq q < +\infty$. Пусть даны векторы $\bar{k} = (k_1, \dots, k_d)$, k_j - целые

числа; $\bar{s} = (s_1, \dots, s_d), s_j$ - натуральные числа, где $j = 1, \dots, d$. Обозначим

$\rho(\bar{s}) = \{ \bar{k} = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}, j = 1, \dots, d \}$. Пусть дан вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$. Обозначим через

$\Gamma(N, \bar{\gamma}) = \{ \bar{k} : k_j > 0; j = 1, \dots, d; \prod_{j=1}^d k_j^{\gamma_j} \leq N \}$ (множество k таких, что $|\bar{k}| \in \Gamma(N, \bar{\gamma})$, называем гиперболическим крестом).

$Q_n^r = \bigcup_{(\bar{\gamma}, \bar{s}) \leq n} \rho(\bar{s})$; (множество k таких, что $|\bar{k}| \in Q_n^r$ называем ступенчатым гиперболическим

крестом). Пусть $E_{Q_n^r}(f)_p = \inf_{t \in T(Q_n^r)} \|f - t\|_p, 1 \leq p \leq +\infty$, где $T(Q_n^r) = \left\{ t : t(x) = \sum_{|\bar{k}| \in Q_n^r} a_k e^{i(\bar{k}, \bar{x})} \right\}$. Через a_k обозначим

коэффициенты Фурье функции $f \in L_q$ по тригонометрической системе.

Лемма Г (стр.3-12; [3]) Пусть $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ и $\bar{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_d)$ таковы, что $1 = \gamma_1 = \delta_1 = \dots = \gamma_\nu = \delta_\nu, 1 < \delta_j < \gamma_j; j = \nu + 1, \dots, d$. Тогда $\sum_{(\bar{s}, \bar{\gamma}) \leq n} 2^{\aleph(\bar{s}, \bar{\delta})} \ll 2^{\aleph n} n^{\nu-1}, \aleph > 0$.

Теорема 1. Пусть $\alpha > \frac{\theta}{q'} - 1, 0 < \theta \leq q', q' = \frac{q}{q-1}, 1 < q \leq 2$. Если $f \in L_q$ и $\sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^{(d-1)(1-\frac{\theta}{q'})} \cdot E_{Q_l^\theta}^\theta(f)_q \cdot 2^{(l+1)(\alpha + \frac{\theta}{q'})} < +\infty$, то $\sum_{\bar{k} \in Z^d} |a_{\bar{k}}(f)|^\theta \prod_{j=1}^d (|k_j| + 1)^{\alpha_j} < +\infty$.

Доказательство. Пусть $\sigma_{n, \bar{\gamma}}(f) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^r} \prod_{j=1}^d (|k_j| + 1)^\alpha |a_{\bar{k}}(f)|^\theta = \sum_{(\bar{s}, \bar{\gamma}) \leq n} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} \prod_{j=1}^d (|k_j| + 1)^\alpha |a_{\bar{k}}(f)|^\theta =$

$$= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{l < (\bar{s}, \bar{\gamma}) \leq l+1} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} \prod_{j=1}^d (|k_j| + 1)^\alpha |a_{\bar{k}}(f)|^\theta \quad (1)$$

Положим $\tau = \frac{q'}{\theta} > 1$. Применяем неравенство Гельдера. Так как $\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'} = 1$, то $\tau' = \frac{\tau}{\tau-1}$. Отсюда получим

$$\sum_{l < (\bar{s}, \bar{\gamma}) \leq l+1} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} \prod_{j=1}^d (|k_j| + 1)^\alpha |a_{\bar{k}}(f)|^\theta \leq \left\{ \sum_{l < (\bar{s}, \bar{\gamma}) \leq l+1} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} |a_{\bar{k}}(f)|^{\theta \tau} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \cdot \left\{ \sum_{l < (\bar{s}, \bar{\gamma}) \leq l+1} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} \prod_{j=1}^d (|k_j| + 1)^{\alpha \tau'} \right\}^{\frac{1}{\tau'}} \quad (2)$$

$$\sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} \prod_{j=1}^d (|k_j| + 1)^{\alpha \tau'} = \sum_{k_1=2^{s_1-1}}^{2^{s_1-1}} (|k_1| + 1)^{\alpha \tau'} \dots \sum_{k_d=2^{s_d-1}}^{2^{s_d-1}} (|k_d| + 1)^{\alpha \tau'} \leq C \cdot 2^{s_1(\alpha \tau'+1)} \dots \cdot 2^{s_d(\alpha \tau'+1)}$$

$$\text{Отсюда получим, что } \sum_{l < (\bar{s}, \bar{\gamma}) \leq l+1} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} \prod_{j=1}^d (|k_j| + 1)^{\alpha \tau'} \leq C \sum_{l < (\bar{s}, \bar{\gamma}) \leq l+1} 2^{(\alpha \tau'+1) \sum_{j=1}^d s_j} \quad (3)$$