Воронов М. В., Захаров В. К.
РАЗДЕЛ "КОМБИНАТОРИКИ" В СОВРЕМЕННОМ ИЗЛОЖЕНИИ
Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2008/12/9.html
Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по данному вопросу.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2008. № 12 (19). C. 40-48. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2008/12/

© Издательство "Грамота"
Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net
Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

$$\bar{\varphi}_{i+1}^{(k+1)} = \bar{\varphi}_{i}^{(k+1)} - \left[\partial\bar{\Psi}_k^h(\bar{\varphi}_i^{(k+1)})\right]^{-1} \bar{\Psi}_k^h \bar{\varphi}_i^{(k+1)} \text{ , или}$$
$$\left[\partial\bar{\Psi}_k^h(\bar{\varphi}_i^{(k+1)})\right](\bar{\varphi}_{i+1}^{(k+1)} - \bar{\varphi}_i^{(k+1)}) = -\bar{\Psi}_k^h \bar{\varphi}_i^{(k+1)},$$
$$\bar{\varphi}^{(k)} = \varphi_M^{(k)}, k = 0,1,\ldots,N-1,\ i = 1,2,\ldots,M. \qquad (4)$$

Здесь

$\bar{\Psi}_k^h = E_n - \bar{\Phi}_k^h$, $\left[\partial\bar{\Psi}_k^h(\bar{\varphi}_i^{(k+1)})\right]^{-1}$ - матрица обратная к матрице Якоби.

Заключение

Вычислительные эксперименты проводились на конкретных примерах и по тестовым системам [Хайрер 1999: 3], [Бояринцев 1989: 1] с целью изучения поведения локальной, глобальной погрешностей и сходимости численного решения к точному. В качестве показателя точности использовалось значение числа правильных значащих цифр численного решения, вычисляемого для каждой i-й компоненте в конечной точке отрезка интегрирования по формуле

$$scd = -\lg\left(\max_i \frac{|\varphi_i - \tilde{\varphi}_i|}{|\tilde{\varphi}_i|} \right),$$

где φ_i - точное, а $\tilde{\varphi}_i$ - численное решение по i-й компоненте. Таким образом, *scd* (*significant correct digits*) - число правильных значащих цифр численного решения. Предварительные результаты показывают хорошую сходимость численных решений к точным.

Список использованной литературы

1. Бояринцев, Ю. Е. Численные методы решения сингулярных систем / Ю. Е. Бояринцев, В. А. Данилов, А. А. Логинов, В. Ф. Чистяков. – Новосибирск, 1989. - 223 с.

2. Вержбицкий, В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения / В. М. Вержбицкий. - М.: ООО "Издательский дом "ОНИКС 21 век", 2005. - 840 с.

3. Измаилов, А. Ф. Численные методы оптимизации / А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 304 с.

4. Новиков, Е. А. Явные методы для жестких систем / Е. А. Новиков. - Новосибирск: Наука, Сиб. предприятие РАН, 1997. - 195 с.

5.Ортега, Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега. - М.: Наука, 1986. - 567 с.

6. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. - М.: Мир, 1999. - Ч. 2. - 685 с.

РАЗДЕЛ «КОМБИНАТОРИКИ» В СОВРЕМЕННОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Воронов М. В., Захаров В. К.
Московский государственный университет

Комбинаторика (комбинаторный анализ) - раздел математики, посвященный решению задач выбора элементов некоторого (обычно конечного) множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой **комбинацией.** Поэтому целью комбинаторики является изучение комбинаций, их существования, алгоритмов построения, оптимизация таких алгоритмов, а также решение задач перечисления и определения числа комбинаций данного класса.

Методы комбинаторики часто используются при решении задач теории вероятностей, теории кодирования и классификации и др. Кроме того, именно способность комбинировать варианты является существенным компонентом при решении большинства задач человеческой практики. В этой связи этот раздел в том или ином объеме присутствует во всех образовательных программах вузов.

Вместе с тем в вузовских курсах на комбинаторику отводится крайне мало времени, изложение ведется исключительно утилитарно и фрагментарно, в нем не просматривается единой методологической базы.

Ниже приводится оригинальное, базирующееся только на теории множеств, изложение одного раздела комбинаторики, которое может быть рекомендовано для включения в самые различные курсы математики. В первую очередь в раздел «теория вероятностей и математическая статистика.

Этот раздел основан на понятии *выборки из данного множества* и включает в себя такие классические понятия комбинаторики, как *размещения, перестановки* и *сочетания*. Отметим, что понятие выборки является строго определяемым в отличие от интуитивного общего понятия комбинации.

Авторы предлагают свое видение этого материала.

Выборки

Пусть задано множество A. Если A конечно и состоит из n элементов, то это означает, что существует некоторое взаимно-однозначное отображение множества n на множество A. Здесь и далее мы рассматриваем натуральное число n как множество $n \equiv \{0,1,...,n-1\}$.

Выборкой объема m (или m**-выборкой**) **из множества** A называется отображение s из множества m в множество A, т.е. $s: m \to A$ (см. Рис. 1). В различных приложениях выборки называются также **комбинациями, соединениями, кортежами** и даже **комбинаторными конфигурациями**. На языке последовательностей, обозначая $s(i)$ через a_i, выборку s можно записать в виде последовательности $s=(a_i \in A \mid i \in m) \equiv (a_0,...,a_{m-1})$. Выборки $s \equiv (a_i \in A \mid i \in m)$ и $t \equiv (b_i \in A \mid i \in m)$ равны тогда и только тогда, когда $a_i = b_i$ для всех $i \in m$.

Содержательно формирование выборки можно описать как определенным образом построенную процедуру «выбора» из множества A некоторых его m элементов с приписыванием каждому из них соответствующего номера очередного этапа этой процедуры.

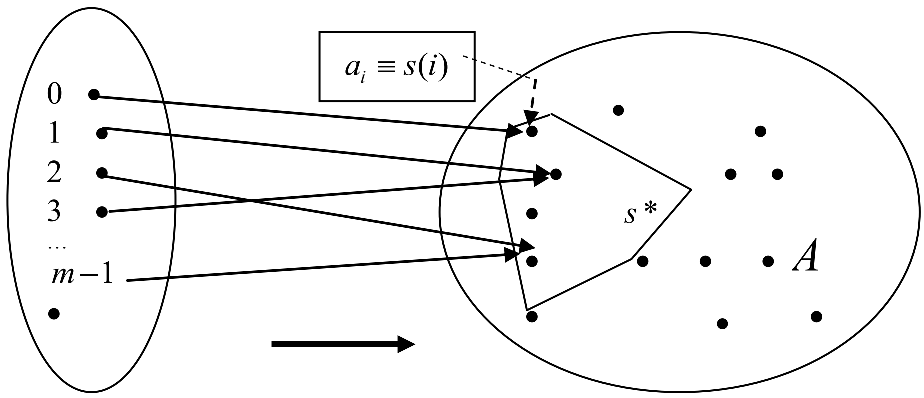

Рис. 1. *Иллюстрация к процессу формирования выборки*

Множество $\{s \mid s: m \to A\}$ всех m-выборок из множества A обозначим через $C_m(A)$.

Каждый элемент из множества A может встречаться в выборке s, вообще говоря, неоднократно (см. Рис. 1). Например, монета, имеющая две стороны "$ц$" и "$г$" ($A=\{ц,г\}$), подбрасывается 7 раз. При этом каждый раз фиксируется результат: выпадение на верхней грани монеты цифры ("$ц$") или герба ("$г$"). В результате может быть сформирована 7-выборка, например, такая $s=(г,г,ц,ц,г,ц,г)$.

Число появлений одного и того же элемента a_i в выборке s называется его **кратностью** и обозначается через $\chi(a_i)$. Например, слово “*математика*” можно рассматривать, как 10-выборку $(м,а,.т,.е,м,а,т,и,к,а)$ из множества букв русского алфавита, где элемент $а$ имеет кратность 3 $(\chi(а)=3)$, элемент $м$ - кратность 2 $(\chi(м)=2)$, а элемент $е$ - кратность 1 $(\chi(е)=1)$.

Каждой выборке s можно сопоставить множество ее членов $s^* \equiv \{a_0,...,a_{m-1}\}$, называемое также **телом выборки**. Например, если $A=\{x,y,z\}$ и $x \neq y, x \neq z, y \neq z$, то при $m=5$ и $s=(x,x,y,x,y)$ получим $s^*=\{x,y\}$.

Важным вопросом комбинаторики является определение мощности множества тех или иных комбинаций.

<u>Теорема.</u> Число $\overline{A}_n^m$ всех m-выборок из множества A с n элементами, т.е. мощность множества $C_m(A)$ равна числу n^m.

<u>Доказательство</u>. Используем метод доказательства по индукции. Запишем множество A следующим образом: $A=\{a_0,...,a_{n-1}\}$, где $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Если $m=1$, то существует всего n штук 1-выборок (см. Рис. 2), поэтому $\overline{A}_n^1 = n$.

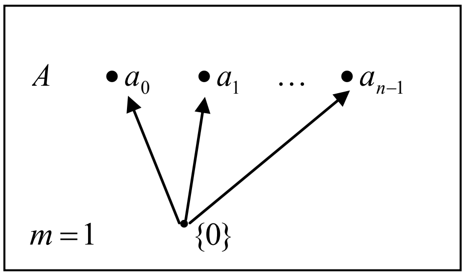

Рис. 2. *Отображение одноэлементного множества в* n *-элементное*

Предположим что доказываемая формула верна для m, т.е. $\overline{A}_n^m = n^m$ и рассмотрим случай для $m+1$. Отметим, что множество $m+1$ можно представить в следующем виде $m+1=\{0,...,m\}=$ $\{0,...,m-1\}\cup\{m\}=m\cup\{m\}$. Поэтому, чтобы построить все отображения s из множества $m+1$ в множество A, нужно сначала построить все отображения из множества m в A, а затем к каждому $s\in C_m(A)$ добавить по одному отображению из одноэлементного множества $\{m\}$. Очевидно, что таких дополнительных отображений будет столько же, сколько элементов в множестве A, т.е. n штук. Поэтому $\overline{A}_n^{m+1} = \overline{A}_n^m n = n^{m+1}$, что и требовалось доказать

Итак, **число выборок из** n **по** m вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^m = n^m \tag{1}$$

Задача. Сколько всего шестизначных телефонных номеров можно иметь в городе?

Решение. Каждый телефон есть определенный набор любых из 10 возможных цифр. В данной задаче телефонные номера состоят из шести цифр и отличаются цифрами и (или) порядком следования цифр. Формально поставлена задача определить количество выборок из 6-множества в 10-множество $A=\{0,...,9\}$. Иначе говоря, требуется определить мощность множества $C_6(A)$. Согласно доказанной теореме имеем

$|C_6(A)| \equiv \overline{A}_{10}^6 = 10^6 = 1000000$.

При формировании выборок могут налагаться различного рода дополнительные условия. Рассмотрим некоторые из них.

Размещения

Выборка $s\equiv(a_0,...,a_{m-1})$ называется **размещением объема** m (или m**-размещением) из множества** A, если она инъективна, т.е. состоит из элементов множества A таких, что $a_i \neq a_j$ для $\forall i\neq j$. Ясно, что для m-размещений множества A с n элементами всегда $m\le n$. Размещения также называют **выборками без повторений** (сравните Рис. 1 с Рис. 3).

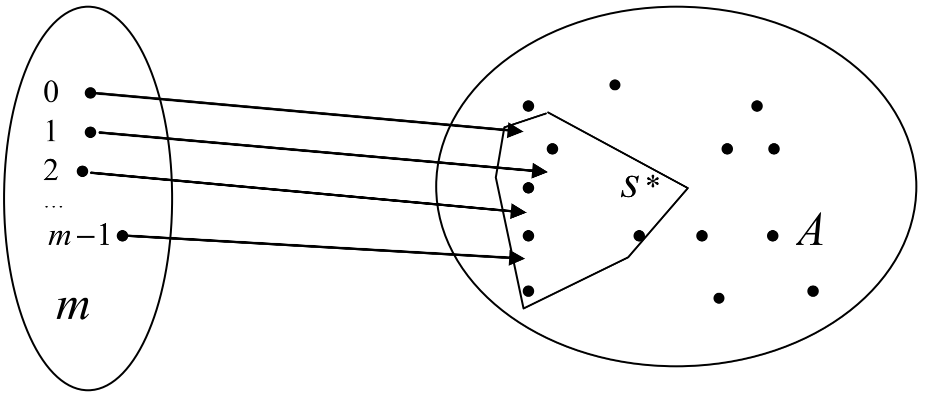

Рис. 3. *Иллюстрация формирования размещения (выборки без повторений)*

Для любого m-размещения s тело размещения $s*$ имеет мощность $|s*|=m$. Пусть $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ и $m=4$. Можно сформировать, например, размещения $s=(b,e,f,c)$ и $t=(f,a,b,g)$. Тогда $s*=\{b,c,e,f\}$ и $|s*|=4$, $t*=\{a,b,g,f\}$ и $|t*|=4$.

Множество $\{s \mid s : m \to A \wedge s - инъективно\}$ всех m-размещений из множества A обозначим через $D_m(A)$. Если множество A состоит из n элементов, то множество $D_m(A)$ конечно. В этом случае мощность $|D_m(A)|$ называется **числом размещений из n-элементов по m-элементов** и обозначается через A_n^m (читается: «число размещений из n по m»).

Отметим, что число размещений из n по m не зависит от множества A, а только от его мощности $|A| = n$.

Теорема. Число A_n^m всех m-размещений из множества A с n элементами равно числу $n(n-1)...(n-(m-1))$.

Доказательство. Запишем множество A следующим образом: $A = \{a_0, ..., a_{n-1}\}$, где $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Очевидно, что существует n штук 1-резмещений $s_i = (a_i)$, содержащих по одному элементу из множества A. Поэтому $A_n^1 = n$.

Предположим, что доказываемая формула верна для m. Докажем, что она будет верна и для $m+1 \le n$.

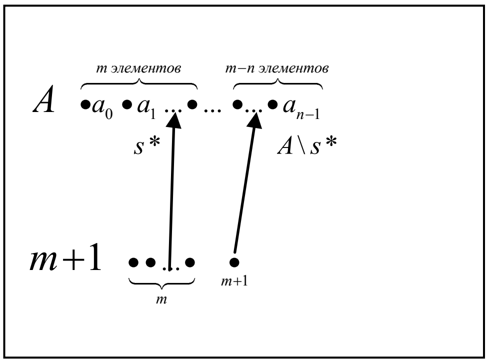

Рис. 4. *К доказательству числа размещений*

Как было указано в предыдущем пункте множество $m+1$ можно представить в виде $m+1 = \{0,...,m\} = \{0,...,m-1\} \cup \{m\} = m \cup \{m\}$. Следовательно, чтобы построить все инъективные отображения s из множества $m+1$ в множество A, нужно сначала построить все инъективные отображения из множества m в A, а затем к каждому $s \in D_m(A)$ добавить по одному отображению из одноэлементного множества $\{m\}$ в множество $A \setminus s^*$ (см. Рис. 4). Таких дополнительных отображений будет столько же, сколько элементов в множестве $A \setminus s^*$, т.е. $m-n$ штук, так как $|s^*| = m$. Поэтому $A_n^{m+1} = A_n^m(n-m) = n(n-1)...(n-(m-1)(n-((m+1)-1)$. Теорема доказана.

Таким образом, число размещений из n по m вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)...(n-(m-1)) \qquad (2)$$

Задача. Сколько слов, состоящих из четырех различных букв, можно составить из данных шести букв: а, в, к, л, о, с?

Решение. Отметим, что слово есть определенная последовательность букв. Поэтому в задаче требуется найти число 4-размещения из 6. Применяя доказанную формулу, имеем $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Этот же ответ можно получить и в результате следующих рассуждений. На первое место можно поставить любую из 6 букв (6 вариантов). На второе место можно поставить любую букву, кроме той, что установлена на первое место (5 вариантов), и т.д. Становится очевидным, что из шести букв можно составить $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ слов, в которых ни одна буква не повторяется.

Рассмотрим частный случай n-размещений, т.е. когда $m = n$. Размещения из множества A с n элементами называются **перестановками на множестве** A. Множество всех перестановок на A обозначим через $|S_n(A)|$. Мощность $|S_n(A)|$ множества $S_n(A)$ обозначим через P_n. Используя формулу (2), получаем:

$$P_n \equiv n(n-1)...321 \equiv n! \qquad (3)$$

Выражение $n!$ читается: "n-факториал". Следует отметить, что факториал - очень быстрорастущая функция от аргумента n. Так 4!=24, 8! = 40320; а 10! = 3628800.

Из определения факториала следует, что имеет место следующее рекуррентное соотношение $(n+1)! = n!(n+1)$. Данное рекуррентное соотношение позволяет вычислять значение факториала любого числа. Поскольку желательно иметь равенство $1! = 0! \cdot 1$, то принято считать, что $0! \equiv 1$. Используя понятие факториала, формулу (2) можно переписать в следующем виде

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

<u>Задача</u>. Сколько вариантов расположения слов допускает предложение: "Редактор вчера внимательно прочитал рукопись"?

<u>Решение</u>. В условиях задачи приведена замечательная фраза: она сохраняет свое значение при любом порядке написания входящих в нее слов, т.е. нет никаких ограничений на порядок написания этих слов. Поэтому, искомое число вариантов есть подсчет числа 5-перестановок, т.е. $5! = 120$. Действительно, на первое место можно поставить любое из пяти слов (5 вариантов), на второе любое другое, кроме выбранного (т.е. 4 варианта), и т.д. Всего $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \equiv 5! = 120$.

Если множество A с n элементами записать в виде $A = \{a_0,...,a_{n-1}\}$, то каждой перестановке $s: n \to A$ можно сопоставить единственное биективное отображение $f(s): A \to A$ такое, что $(f(s))(a_i) \equiv s(i)$ для любого $i \in n$. И, наоборот, каждому биективному отображению $f: A \to A$ можно сопоставить единственную перестановку $s(f): n \to A$ такую, что $(s(f))(i) \equiv f(a_i)$ для любого $i \in n$. Так как отображения $s \to f(s)$ и $f \to s(f)$ являются взаимно обратными, то множество всех перестановок на множестве A эквивалентно множеству всех биективных отображений из множества A в множество A.

Обобщим теперь понятие m-перестановки. Пусть $n \le m$. Сюръективную m-выборку $s: m \to A$ назовем $(m_0,...,m_{n-1})$**-перестановкой на множестве** A **с** n **элементами**, если $m = m_0 + ... + m_{n-1}$ и для любого $k \in n$ существует элемент $a \in A$ такой, что множество $s^{-1}(a)$ всех членов выборки s, равных элементу a, имеет ровно m_k элементов, т.е. $\forall k \in n \, \exists a \in A \, (|s^{-1}(a)| = m_k)$. Такие обобщенные перестановки называют также **перестановками с повторениями**.

Например, при $n = 2$, $m = 5$ и $A = \{x, y\}$, где $x \ne y$, можно взять $m_0 = 3$, $m_1 = 2$ и рассмотреть $(3,2)$-перестановку $s \equiv (x, y, x, x, y)$.

Мощность множества $S_{m_0,...,m_{n-1}}(A)$ всех $(m_0,...,m_{n-1})$-перестановок на множестве A с n элементами обозначается через $P(m: m_0,...,m_{n-1})$.

Можно доказать, что

$$P(m: m_0,...,m_{n-1}) = \frac{m!}{m_0!...m_{n-1}!} \qquad (4)$$

Поясним доказательство для рассмотренного выше примера с $A = \{x, y\}$, $m_0 = 3$ и $m_1 = 2$. Рассмотрим новое множество $A' \equiv \{(x,1),(x,2),(x,3)(y,1),(y,2)\}$. Так как $|A'| = 5$, то $P_5 = |S_5(A')| = 5!$.

Рассмотрим также каноническое отображение v из $S_5(A')$ в $S_{(3,2)}(A)$, сопоставляющее 5-перестановке $s' \equiv (a_i' \in A' \mid i \in 5)$ на множестве A' $(3,2)$-перестановку $v(s') \equiv s \equiv (\mathrm{Pr}_1\, a_i' \in A \mid i \in 5)$, где $\mathrm{Pr}_1\, a_i'$ обозначает взятие первой компоненты в паре a_i'. Например, $\mathrm{Pr}_1(x,2) = x$.

Отображение v является сюръективным, т.е. накрывающим. Более того, каждая $(3,2)$-перестановка s получается из 5-перестановок s' в количестве 3!2! штук (см. Рис. 5). В результате $P_{(3,2)} = |S_{(3,2)}(A) = \frac{|S_5(A')|}{3!2!} = \frac{5!}{3!2!}$.

Задача. Определить число различных слов, которое получим, переставляя буквы слова “ *математика* ”.

Решение. Слово “ *математика* ” можно рассматривать, как $(3,2,2,1,1,1)$-перестановку с $m=10$, где элемент a имеет кратность 3, элементы m и *м*- кратность 2, а все остальные элементы - кратность 1. Поэтому, применяя формулу (4) имеем

$$P(10:2,3,2,1,1,1)=\frac{10!}{2!3!2!1!1!1!}=151200\,.$$

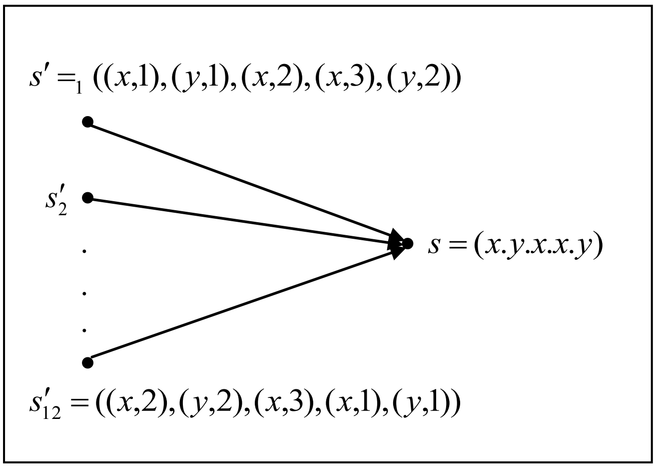

Рис. 5. *Отображение* 5*-перестановок в* $(3,2)$*-перестановку*

Замечание. Числа $P(m:m_0,m_1,...,m_{n-1})$ в (4) называют также **полиномиальными коэффициентами**. Это название обусловлено тем, что они являются коэффициентами при произведениях степеней переменных $x_1,...,x_k$ в разложении полинома по степеням, т.е.

$$(x_1+x_2+...+x_k)^n=\sum_{n_1+n_2+...+n_k=n}\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}\,.$$

В частном случае, когда $x_1=...=x_k=1$, имеем важное соотношение

$$k^n=\sum_{n_1+n_2+...+n_k=n}\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Сочетания и сочетания с повторениями

Если нас интересует не собственно последовательность $s=(a_0,...,a_{m-1})$, а только ее тело $s^*\equiv\{a_i\,|\,i\in m\}$, то мы можем отождествлять различные выборки с одним и тем же телом.

Выборки $s=(a_i\in A\,|\,i\in m)$ и $t=(b_i\in A\,|\,i\in m)$ называются **равносильными (эквивалентными, тождественными)**, если $s^*=t^*$, т.е. $\{a_i\in A\,|\,i\in m\}=\{b_i\in A\,|\,i\in m\}$. Эквивалентность выборок будем обозначать через $s\approx t$.

Например, если для рассмотренного выше множества $A=\{x,y,z\}$ сформированы две 5-выборки $s=(x,x,y,x,y)$ и $t=(y,x,y,y,y)$, то мы имеем $s^*=\{x,y\}$ и $t^*=\{x,y\}$. Значит эти выборки эквивалентны, поскольку $s^*=t^*$.

Введем в рассмотрение фактор-множество $J_m(A)\equiv D_m(A)/\approx$ классов эквивалентности всех m-размещений из множества A с n элементами по отношению эквивалентности $\approx$.

Пусть, например, $A=\{x,y,z\}$ $n=3$ и $m=2$.

Тогда $D_m(A)=\{(x,y),(y,x),\ (x,z),(z,x),(y,z),(z,y)\}$. Так как $(x,y)\approx(y,x)$, $(x,z)\approx(z,x)$ и $(y,z)\approx(z,y)$, то $J_2(A)=\{\{(x,y),(y,x)\},\ \{(x,z),(z,x)\},\{(y,z),(z,y)\}\}$. Следовательно, $J_2(A)$ состоит из трех разных элементов: $c_0\equiv\{(x,y),(y,x)\}$, $c_1\equiv\{(x,z),(z,x)\}$, $c_2\equiv\{(y,z),(z,y)\}$, являющихся классами эквивалентности, а также $c_0=\overline{(x,y)}=\overline{(y,x)}$, $c_1=\overline{(x,z)}=\overline{(z,x)}$, $c_2=\overline{(y,z)}=\overline{(z,y)}$.

Множество $\overline{s}$ всех эквивалентных m-размещений s называется **m-сочетанием из множества** A или **сочетанием объема** m **из множества** A**.** Иначе говоря, m-сочетанием из множества A называется совокупность $\overline{s}$ всех инъективных последовательностей $s \equiv (a_i \in A \mid i \in m)$, обладающих одним и тем же телом $s^* \equiv \{a_i \in A \mid i \in m\}$. Все m-сочетания можно получить, беря классы эквивалентности $c \equiv \overline{s}$ всех m-размещений $s \in D_m(A)$.

Пусть множество A состоит из n элементов. Т.к. отображение $s \to s^*$ из $D_m(A)$ на $J_m(A)$ сюръективно, то в этом случае множество $J_m(A)$ конечно и $|J_m(A)| \leq |D_m(A)|$. Мощность множества $J_m(A)$, т.е. число его элементов, называется **числом сочетаний из** n **элементов по** m **элементам** или, короче, **числом сочетаний из** n **по** m и обозначается через C_n^m.

<u>Теорема</u>. Пусть $1 \leq m \leq n$. Тогда $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} \equiv \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $s = (a_0, \ldots, a_{m-1}) \in D_m(A)$. Ясно, что размещения t, эквивалентные размещению s, получаются путем всех перестановок на теле $s^* \equiv \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ размещения s. Число такого рода перестановок равно $|S_m(s^*)| = P_m \equiv m!$.

Выберем в каждом классе эквивалентности $\overline{s}$ по одному представителю $s' \in \overline{s}$. Тогда из $\overline{s} \neq \overline{t}$ следует $\overline{s} \cap \overline{t} = \varnothing$ и поэтому s' не эквивалентен t'. Количество этих представителей равно количеству классов эквивалентности, т.е. числу $|J_m(A)|$.

Чтобы получить из множества $\{s' \in \overline{s} \mid \overline{s} \in J_m(A)\}$ представителей все множество $D_m(A)$, нужно для каждого представителя s' взять множество $S_m(s'^*)$ всех перестановок его тела s'^* (см. Рис. 6).

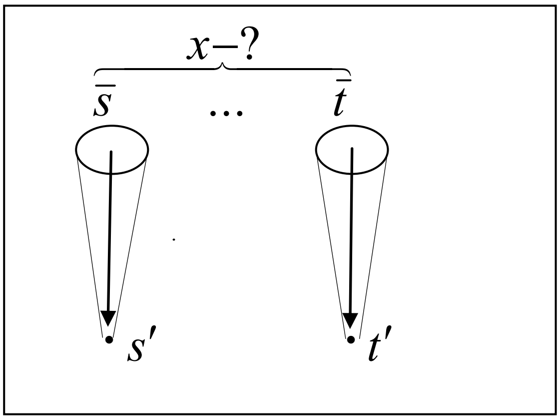

Рис. 6. *Формирование сочетаний*

Поэтому $|D_m(A)| = |J_m(A)| \cdot |S_m(s^*)|$. Следовательно, $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$. Отсюда получаем:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \equiv \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{5}$$

Рассмотрим множество $\mathrm{P}_m(A) \equiv \{B \subset A \mid |B| = m\}$ всех **m-подмножеств множества** A, т.е. конечных подмножеств, состоящих из m элементов.

Пусть z является m-сочетанием. Если $s, t \in z$, то по определению $s \approx t$, т.е. $s^* = t^*$. Следовательно, мы можем определить отображение $p : J_m(A) \to \mathrm{P}_m(A)$, полагая $p(z) \equiv s^*$ для некоторого (а значит, и для любого) m-размещения $s \in z$. Если $z_1 \neq z_2$ и $s_1 \in z_1$, а $s_2 \in z_2$, то $s_1^* \neq s_2^*$, ибо в противном случае мы бы имели $s_1 \approx s_2$ и $z_1 = z_2$. Это значит, что отображение p является инъективным. Теперь рассмотрим обратную ситуацию. Пусть $B \in \mathrm{P}_m(A)$. Так как $|B| = m$, то $B = \{b_0, \ldots, b_{m-1}\}$, где $b_i \neq b_j$ для всех $i, j \in m$ таких, что

$i \neq j$. Поэтому можно рассматривать m-размещение $s : m \to A$ такое, что $s(i) \equiv b_i$ и порожденное им m-сочетание $z \equiv \bar{s}$. Ясно, что $p(z) = s^* = \{b_0, ..., b_{m-1}\} = B$. Значит, отображение p сюръективно. Следовательно, отображение p биективно (т.е. сюръективно и инъективно). Таким образом, **множество всех m-сочетаний из множества A эквивалентно множеству всех m-подмножеств множества A.**

Задача. Читатель отобрал по каталогу 8 книг. Однако в библиотеке выдают одному читателю не более 5 книг. Сколько альтернатив взять книги есть у этого читателя, если он будет брать ровно 5 книг?

Решение. Естественно предположить, что все книги, которые возьмет читатель разные и все равно, в каком порядке он будет выбирать 5 книг их 8. Следовательно, каждая комбинация, удовлетворяющая условиям задачи, есть 5-сочетание из 8-множества. Поэтому число искомых альтернативных комбинаций есть число сочетаний по 5 из 8, т.е. $C_8^5 = \dfrac{8!}{5!3!} = 56.$

Примечания. Принято считать, что $C_0^0 = 1$ и $C_n^m = 0$ при $n < m$ или при $m < 0$ и $n > 0$. Число C_n^m иногда записывают в следующем виде: $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ или $C_{n,m}$

Числа C_n^m называют **биномиальными коэффициентами**, поскольку формулу бинома Ньютона, используя обозначения числа сочетаний, можно записать в следующем виде $(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}$ для $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}_0$.

Покажем, что для числа сочетаний C_n^m имеет место следующая рекуррентная формула:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m \tag{6}$$

Действительно. Согласно формуле (5) имеем: $C_{n-1}^{m-1} = \dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-m+1)!}$ и $C_{n-1}^m = \dfrac{(n-1)!}{m!(n-1)!}$.

Почленно сложив эти равенства, получим

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-m+1)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-1)!} = \frac{m(n-1)! + (n-m)(n-1)!}{m!(n-m)!} = \frac{(n-1)!}{m!(n-m)!},$$

что и доказывает формулу (6).

Пусть на множестве всех m-выборок $C_m(A)$ введено отношение эквивалентности. Тогда можно рассматривать фактор-множество $I_m(A) \equiv C_m(A)/\approx$ классов эквивалентности всех m-выборок. Например, пусть $A = \{x, y, z\}$ $n = 3$ и $m = 2$. Тогда $C_m(A) = \{(x,x)(y,y),\ (z,z),(x,y),(y,x),\ (x,z),(z,x),(y,z),(z,y)\}$. Так как $(x,y) \approx (y,x)$, $(x,z) \approx (z,x)$ и $(y,z) \approx (z,y)$, то $I_2(A) = \{\{x,x\},\{y,y\},\{z,z\},\{(x,y),(y,x)\},\ \{(x,z),(z,x)\},\{(y,z),(z,y)\}\}$. Следовательно, $I_2(A)$ состоит из шести разных элементов, разбитых на две различные группы: $c_0 \equiv \{x,x\}$, $c_1 \equiv \{y,y\}$, $c_2 \equiv \{z,z\}$ и $c_3 \equiv \{(x,y),(y,x)\}$, $c_4 \equiv \{(x,z),(z,x)\}$, $c_5 \equiv \{(y,z),(z,y)\}$.

Множество всех эквивалентных m-выборок называется **m-сочетанием с повторением из множества** A или сочетанием объема m с повторением из множества A. По-другому, m-сочетанием с повторением из множества A называется совокупность всех m-последовательностей $s \equiv (a_i \in A \,|\, i \in m)$, обладающих одним и тем же телом $s^* \equiv \{a_i \in A \,|\, i \in m\}$.

Пусть множество A состоит из n элементов. В этом случае мощность множества $I_m(A)$, т.е. число его элементов, называется **числом сочетаний с повторениями из n элементов по m элементам** или, короче, **числом сочетаний с повторениями из n по m** и обозначается через $\bar{C}_n^m$.

Теорема. Пусть $1 \le m \le n$. Тогда $\bar{C}_n^m = C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^m$.

Доказательство. Множество $I_m(A)$ всех классов эквивалентности $\bar{s}$ разбивается на m подмножеств $J_1(A), \ldots, J_m(A)$ так, что для класса $\bar{s} \in J_i(A)$ выполнено $|s^*| = i$. Значит $\bar{C}_n^m \equiv |I_m(A)| = |J_1(A)| + \ldots + |J_m(A)| = C_n^1 + \ldots + C_n^m$. Теорема доказана.

Итак, количество сочетаний с повторениям из n по m вычисляется по формуле

$$\bar{C}_n^m = C_n^1 + \ldots + C_n^m \qquad (7)$$

Задача. На каждой «кости» игры Домино располагаются две цифры, каждая из которых может быть 0, или 1, … или 6. Сколько «костей» в игре Домино?

Решение. Всего в игре используется 7 цифр. На каждой кости находятся ровно две цифры, в том числе и одинаковых. Следовательно, в задаче идет речь о числе сочетаний с повторениями из 7 по 2, поэтому $\bar{C}_7^2 = C_7^1 + C_7^2 = \dfrac{7!}{1!6!} + \dfrac{7!}{2!5!} = 7 + 21 = 28$ штук.

Можно показать, что $$\bar{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \equiv C_{n+m-1}^m \qquad (8)$$

Взаимосвязь веденных комбинаций и формул для вычисления их количества иллюстрирует следующая схема.

$$\begin{array}{ccc} |C_m(A)| = n^m & \longrightarrow & |I_n(A)| = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \\ \downarrow & & \\ |D_m(A)| = \dfrac{n!}{(n-m)!} & \longrightarrow & |J_m(A)| = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} \end{array}$$

ИНТЕРАКТИВНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Гетманова Е. Е.
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова

Использование информационных технологий в образовании, позволяет повысить его эффективность и перейти к новым инновационным методам обучения. Инновационность методов обучения определяется, во-первых, в расширении методов обучения за счет появления новых источников учебной информации, во-вторых, возможностью использования виртуальной среды обучения. Одним из методов, позволяющих проектировать высококачественные информационные материалы, является использование анимационного графического моделирования, на базе которого создаются новые интерактивные учебники. В частности, использование компьютерной графики позволяет моделировать физические процессы и явления, то есть представлять физические процессы в наглядной динамической форме.

Все это позволяет приблизить численный эксперимент к естественному опыту. Работа с такой моделью интересна, развивает модельное мышление, учит студентов понимать характер важнейших уравнений физики, развивает интуицию.

Компьютерный эксперимент включает построение и исследование модели. Он позволяет точно воспроизводить условия, необходимые для осуществления физического процессы, моделировать разнообразные условия протекания явления, наблюдать развитие явления в пространстве и во времени, останавливать и возобновлять эксперимент, повторяя его необходимое число раз. В частности, Flash технологии позволяют визуализировать физические процессы. Законы кинематики и динамики (движение тела, брошенного вертикально вверх, под углом к горизонту, закон сохранения импульса при неупругом соударении и т.д.) промоделированные с помощью Flash технологий применялись при изложении соответствующего материала [1, 2] и показали эффективность подобного подхода в образовании.

В работе представлены Flash фильмы, моделирующие упругие соударения и столкновения, при которых происходит взаимопревращение поступательного движения и вращения. Представленные фильмы использовались при объяснении соответствующего материала студентам Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. Они также могут с успехом использоваться в дистанционном образовании. Следует отметить, что задача об упругом соударении, рассматривались как сложная задача тео-