Медведева Н. Н.

ПОДСЧЕТ ЧИСЛА РАЗБИЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2008/12/31.html
Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по данному вопросу.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2008. № 12 (19). C. 98-100. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2008/12/

«Физика» и «Теория электромагнитного поля» стало важным моментом в развитии межкафедральных связей. Особое внимание было уделено методике изучения в курсе физики системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме, лежащей в основе теории электромагнитного поля.

Так через решение прикладных задач, заслушивание и обсуждение рефератов по межпредметной тематике на семинарах и конференциях и другие виды занятий и мероприятия, проводимые во внеучебное время, преподаватели физики «сооружают» мостик навстречу общепрофессиональным и специальным техническим дисциплинам. Мы убеждены, что успеха в повышении качества подготовки специалиста можно достичь только при соблюдении принципа преемственности, когда все дисциплины служат созданию у обучающихся синтезированных понятий, умений и навыков, когда одна дисциплина, подхватив эстафету, развивает какое-то понятие, положение и в новом, обогащенном и преобразованном виде передает информацию в исходную и смежные дисциплины.

Очень многое в установлении межпредметного взаимодействия зависит от преподавателей, уровня их теоретической и методической подготовки, воли и желания это необходимое сотрудничество сделать закономерностью.

Список использованной литературы

1. **Айцензон А. Е.** Целостный подход к обучению физике в системе военно-инженерных вузов // Физическое образование в вузах. - 1999. - Т. 5. - № 4.

2. **Журавлева Н. И., Заварыкина Л. И. и др.** Роль выпускных квалификационных работ межпредметного характера в системе фундаментальной и профессиональной подготовки студентов педуниверситетов // Физическое образование в вузах. - 1999. - Т. 5. - № 4.

3. **Максимова В. М.** Межпредметные связи в процессе обучения. - М.: Педагогика, 1988.

4. **Мартынов М. С.** Сборник прикладных задач по физике для специалистов связи. - М.: Радио и связь, 1997.

5. **Мартынов М. С.** Решение прикладных задач по физике - важный фактор активизации познавательной деятельности обучающихся // Физическое образование в вузах. - 2003. - Т. 9. - № 2.

6. **Пионова Р. С.** Педагогика высшей школы. - Минск: «Университетское», 2002.

ПОДСЧЕТ ЧИСЛА РАЗБИЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Медведева Н. Н.
Хакасский государственный университет им. Н. Ф. Катанова

Наименее изученным с исторической точки зрения в настоящее время является комбинаторный анализ - один из разделов современной математики. Составной частью комбинаторного анализа является аддитивная теория разбиений, под которыми понимают представления натурального числа неупорядоченной суммой одинаковых или различных натуральных слагаемых. В XIX в. шел процесс становления этой теории. Ее главной целью является разработка эффективного метода подсчета разбиений. Кажущаяся простота формулировок задач теории разбиений манила к себе математиков. Были предложены разные методы подсчета: при помощи производящих функций, специального вида комбинаторных соединений и др. Еще одним средством могут выступать разностные уравнения, что впервые заметил А. де Морган.

В четвертом томе Кембриджского математического журнала за 1843 г. вышла статья «О новом виде разностных уравнений» («On a new species of equations of differences») [Morgan 1843]. Вероятно, по вине редакции автор этой публикации не был указан. Однако Л.Ю. Диксон [Dickson 1934: 115] указывал, что эта работа принадлежит английскому математику и логику Августу де Моргану (1806-1871). Небольшие биографические сведения о нем можно почерпнуть из статьи В.В. Бобынина, опубликованной в словаре Брокгауза и Эфрона [Бобынин]. Родился Морган в Мадуре, в южной Ост-Индии, учился в Trinity College в Кембридже. Занимался преподаванием математики и был профессором в University College в Лондоне. С 1847 г. являлся по избранию секретарем Королевского астрономического общества, а несколько позже стал членом Лондонского королевского общества. Он был одним из первых математиков Англии, в среде которых особенно выдавался знанием истории физико-математических наук. Научно-литературная деятельность Моргана была чрезвычайно обширною. Кроме работ специального научного характера, печатавшихся в журналах «Cambridge philosophical Society's Transactions», «Cambridge and Dublin Mathematical Journal», «Philosophical Magazine», «The Quarterly Journal of pure and applied mathematics» и «The Mathematician», он помещал еще статьи в «The Journal of Education», «The Companion to the Almanac», «The Penny Cyclopedia» «Smith's biographical Dictionary», в лондонском «Athenaeum» и пр. В научной деятельности особенно выделяются работы по теории рядов, в которой ему принадлежит открытие критериев сходимости, значительно превосходящих по своей строгости все критерии того же рода, найденные ранее. Другими областями чистой математики, которым Морган посвящал свои труды, вместе с более крупными из относящихся к ним его работ, были следующие: элементарная математика, сочинения по алгебре, тригонометрии, арифметике, выходившие несколькими изданиями. Из сочинений, имеющих отношение к истории математики, самым замечательным является вышедшее после его смерти под заглавием «A budget of paradoxes» (1872). Из других сочинений Моргана, имеющих отношение к истории математики, как наиболее замечательные можно указать следующие:

«Arithmetical books from the invention of printing to the present time being brief notices of a large number of works drawn up from actual inspection» (1847), «On the early history of infinitesimals in England» (1852).

Большой вклад внесен Морганом в области дедуктивной логики вообще и математической логики в частности. По мнению многих выдающихся деятелей этой науки, он должен быть признан «одним из самых остроумных логиков, которые когда-либо существовали». Из вкладов, сделанных им в содержание дедуктивной логики, особенно ценными являются его теории терминов и связки, данное им перечисление основных предложений и распространение теории силлогизма, исследования о критерии законности силлогизмов и о правиле вывода заключений, указание различных способов выражения количества, изыскание по предмету различения фигур и сравнение его результатов с системою Аристотеля.

Вернемся к анализу статьи А.Моргана. Во вступлении он указал, что к новому виду разностных уравнений его привела проблема подсчета разбиений.

Для начала ученый заметил, что если k не меньше n, то число способов, которыми n может быть представлено суммой натуральных слагаемых с их повторением, такое же, как и количество разбиений числа $n+k$, где k выступает одним из слагаемых. Тогда, обозначив через $U_{x,y}$ - число способов, которыми x может быть разбит на части, одной из которых является y, а другие не превышают y, Морган записал, что $U_{x,y} = U_{2x+k,\,x+k}, k = 0, 1, 2, \ldots$.

Чтобы пояснить дальнейшее изложение, он обратился к примеру подсчета $U_{16,6}$, то есть количеству разбиений числа 16 на части, одной из которых является 6, а остальные не превосходят 6. Он отметил, что

$$U_{16,6} = U_{10,1} + U_{10,2} + U_{10,3} + U_{10,4} + U_{10,5} + U_{10,6}.$$

Обобщая, Морган записал

$$U_{x,y} = U_{x-y,1} + U_{x-y,2} + \ldots + U_{x-y,y},$$

$$U_{x+1,\,y+1} = U_{x-y,1} + U_{x-y,2} + \ldots + U_{x-y,y+1}.$$

Отсюда

$$U_{x+1,\,y+1} - U_{x,y} = U_{x-y,y+1},$$

или

$$U_{x,y} - U_{x-1,y-1} = U_{x-y,y}, \tag{1}$$

где (1) разностное уравнение степени y с переменной x.

При помощи последнего уравнения ученый сконструировал таблицу значений $U_{x,y}$ - количества разбиений числа x на части, одной из которых является y, а остальные y не превышают. Очевидно, что всегда

$$U_{x,1} = U_{x,x} = U_{x,x-1} = 1.$$

После расстановки единиц нужно выбрать y-е число x-й строки и сложить его с $(y-1)$-м числом $(x-1)$-й строки. В результате получится $(x-y)$-е число y-й строки.

Значения $U_{x,y}$ разбиений числа $x \le 10$ на части, одной из которых является y, а остальные не превышают y

x \ y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	1	1							
4	1	2	1	1						
5	1	2	2	1	1					
6	1	3	3	2	1	1				
7	1	3	4	3	2	1	1			
8	1	4	5	5	3	2	1	1		
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1	
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1

Действительно, из Таблицы видно, что число 10 может быть представлено суммой слагаемых, одно из которых равно 4, а другие не превышают 4, девятью способами, то есть $U_{10,4} = 9$. Это есть

4 4 2   4 3 2 1   4 2 2 1 1
4 4 1 1   4 3 1 1 1   4 2 1 1 1 1
4 3 3   4 2 2 2   4 1 1 1 1 1 1

Переписав уравнение (1) в виде $U_{x,y}-U_{x-y,y}=U_{x-1,y-1}$ и положив $y=2$, Морган получил равенство $U_{x,2}-U_{x-2,2}=U_{x-1,2}$. Учитывая, что $U_{x-1,1}=1$, отсюда следует

$U_{x,2}-U_{x-2,2}=1$.

Полный интеграл этого уравнения, находя постоянные из условий $U_{1,2}=0, U_{2,2}=1$, имеет вид

$$U_{x,2}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^x.$$

Отсюда ученый заключил, что

$$U_{x,3}-U_{x-3,3}=\frac{x-1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^{x-1}.$$

Полный интеграл последнего уравнения, определяя произвольные постоянные из условий $U_{1,3}=0, U_{2,3}=0, U_{3,3}=1$, есть

$$U_{x,3}=\frac{6x^2-7-9(-1)^x+8\left(\beta^x+\chi^x\right)}{72},$$

где $\beta=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $\chi=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$.

Этот результат Морган трактовал следующим образом: количество разбиений числа x на части, не большие и не все меньшие 3, есть $\frac{x^2}{12}$, $\frac{x^2-1}{12}$, $\frac{x^2-4}{12}$, $\frac{x^2+3}{12}$, $\frac{x^2-4}{12}$ или $\frac{x^2-1}{12}$ соответственно с тем, получается ли при делении x на 6 в остатке 0, 1, 2, 3, 4 или 5.

Обобщая, ученый пришел к выводу, что общим решением уравнения $U_{x,y}-U_{x-1,y-1}=U_{x-y,y}$ есть функция $U_{x,y}=A_{y-1}+A_{a_2}P_2+A_{a_3}P_3+...+A_{a_y}P_y$, где A_n является рациональной функцией n-й степени, P_n есть периодическая или круговая функция n-го порядка, a_n - целая часть от деления $n-y$ на y.

Пользуясь аналогичными рассуждениями, Морган получил, что количество разбиений числа x на части, не большие и не все меньшие 4 (то есть $U_{x,4}$), есть x^3+3x^2, x^3+3x^2-9x+5, x^3+3x^2-20, $x^3+3x^2-9x-27$, x^3+3x^2+32, w, x^3+3x^2-36, x^3+3x^2-9x+5, u, $x^3+3x^2-9x-27$, x^3+3x^2-4, $x^3+3x^2-9x-11$ соответственно, будет ли при делении $u'\approx 3\overline{u}$ на 12 давать в остатке 0, 1, 2, …, 11.

Резюмируя, автор отметил, что $U_{x,3}$ является ближайшим целым числом к $\frac{x^2}{12}$, а $w'\approx 3\overline{u}$ - ближайшим целым к $\frac{x^3+3x^2}{144}$ или $\frac{x^3+3x^2-9x}{144}$ при четном и нечетном $u'\approx\overline{u}$.

В конце статьи Август де Морган писал, что, его исследование, возможно, может быть продолжено, чего, однако не последовало. Интересно, что в современной аддитивной теории разбиений рассмотренный метод подсчета не используется, хотя при небольшом количестве частей разбиения он дает хорошие результаты.

Список использованной литературы

1. Бобынин В. В., Морган Август [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://gatchina3000.ru/brockhaus-and-efron-encyclopedic-dictionary/index.htm.

2. Dickson L. E. History of the Theory of Numbers. - New York, 1934. - V. 2.

3. Morgan, A. On a New Species of Equations of Differences // The Cambridge Mathematical Journal. - London, 1843. - V. 4. - P. 87-90.