

Мачулис В. В.

**ОДНО УРАВНЕНИЕ СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2008/1/53.html](http://www.gramota.net/materials/1/2008/1/53.html)

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

**Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2008. № 1 (8). С. 125-127. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2008/1/](http://www.gramota.net/materials/1/2008/1/)

**© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)



Рис. 4. Анализ параметров тушения пожаров ГПС области за 1998 - 2006 гг.

Ущерб от пожара, период ликвидации, площадь пожара напрямую зависят от ряда параметров: времени свободного развития пожара, промежутка времени с момента поступления сигнала до выезда пожарного поезда, времени следования и других параметров. Очевидно, чем быстрее пожарный поезд будет отправлен со станции по вызову, тем меньше будет ущерб. Анализ показывает, что поезд выезжает со станции в среднем только через 32 минуты, подразделения же УГПС выезжают на пожар спустя несколько секунд с момента получения сигнала.

В результате статистического анализа можно сделать вывод, что на железнодорожном транспорте параметры тушения пожаров за 1998-2006 год значительно отличаются от таких же параметров УГПС, причем, не в лучшую сторону. Продолжительность следования пожарного поезда на пожар выше в три-четыре раза, чем пожарных формирований УГПС. Промежуток времени, необходимый на ликвидацию пожара пожарными формированиями железнодорожного транспорта, больше в два-три раза, чем формированиями УГПС. Для пожарного поезда времени на выезд при получении сигнала о пожаре потребуется гораздо больше, чем для пожарных подразделений УГПС. Из анализа этих данных видно, что с точки зрения мобильности пожарных формирований, железнодорожные поезда по сравнению с формированиями УГПС имеют более низкие показатели по всем позициям. Для преодоления такого положения необходимо повышать мобильность, повышать оперативность и квалификацию персонала пожарных подразделений железнодорожного транспорта. Этого можно добиться как совершенствованием системы предупреждения пожаров и управления пожарной безопасностью, так и реструктуризацией системы пожарной защиты на железнодорожном транспорте с постепенной заменой морально и физически устаревших пожарных поездов современными, мобильными и менее затратными формированиями.

Список использованной литературы

1. Повзик Я. С., Ключ П. П., Матвейкин А. М. Пожарная тактика. - М.: Стройиздат, 1990. - 458 с.

ОДНО УРАВНЕНИЕ СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Мачулис В. В.

Тюменский государственный университет

Рассмотрим уравнение

$$x''(t) + \varepsilon x'(t)x^2(t) + x(t) = 0, \tag{1}$$

известное как частный случай уравнения Льенара, с начальными условиями  $x(0) = 0, x'(0) = 2$ . Уравнение Льенара  $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$ , с одной стороны, обобщает осциллятор Ван дер Поля, с другой - служит моделью колебательного движения массы с нелинейной вязкостью  $-f(x)$  и возвращающей силой  $-g(x)$ . Такого рода уравнения могут иметь предельный цикл, или не иметь его. Существует теорема, выражающая достаточное условие наличия единственного предельного цикла.

**Теорема Льенара:** Предположим, что  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют следующим условиям:

- (1)  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывно-дифференцируемы для всех  $x$ ;
- (2)  $g(x)$  является нечетной функцией;
- (3)  $g(x) > 0$  для любого  $x > 0$ ;
- (4)  $f(x)$  - четная функция;

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

(5) нечетная функция имеет в точности один положительный нуль  $x = a$ ; она отрицательна при  $0 < x < a$  и положительна и неубывает при  $x > a$ , и  $F(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Тогда уравнение Льенара имеет единственный устойчивый предельный цикл, окружающий начало координат на фазовой плоскости.

Рассматриваемое уравнение (1) удовлетворяет всем условиям теоремы, за исключением последнего. Численное решение с помощью метода Рунге-Кутты показывает, что при  $t \rightarrow +\infty$ , амплитуда колебаний очень медленно стремится к нулю. Требуется найти аналитическое приближенное решение данного уравнения, пригодное для  $t > 0$  и  $\varepsilon \ll 1$ .

Прямое разложение вида

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2) \quad (2)$$

здесь непригодно из-за возникновения вековых членов. Действительно, применив это разложение (2), мы получим с учетом начальных условий решение

$$x(t, \varepsilon) = 2 \sin t - \varepsilon t \sin t + \varepsilon \cos t \sin^2 t + O(\varepsilon^2), \quad (3)$$

которое удовлетворительно приближает искомое решение только для  $t \ll O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ , т.е. в весьма малой окрестности нуля. Наличие вековых членов «заставляет» амплитуду колебаний увеличиваться с возрастанием  $t$ , в то время как в действительности амплитуда убывает.

Анализ численного решения показывает, что слабый нелинейный осциллятор имеет, по крайней мере, два временных режима. Амплитуда колебаний убывает очень медленно по сравнению с периодом оборота. Известный аналитический метод, называемый методом двух масштабов, строит сразу после старта два временных режима, что приводит к лучшему приближению, чем при обычной методике.

Положим в (1)  $\tau = t = O(1)$  - «быстрая» переменная и  $T = \varepsilon t$  - «медленная» переменная. Мы будем считать  $\tau$  и  $T$  независимыми. В частности, функции от «медленной» переменной  $T$  будут считаться константами при изменении «быстрой» переменной.

Представим искомую функцию в (1) как ряд

$$x(t, \varepsilon) = x_0(\tau, T) + \varepsilon x_1(\tau, T) + O(\varepsilon^2). \quad (4)$$

Производную по времени в (1) преобразуем, используя следующее правило

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial x}{\partial T}. \quad (5)$$

После подстановки (4) в (5) и группировки по степеням  $\varepsilon$ , получаем

$$x' = \frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \varepsilon \left( \frac{\partial x_0}{\partial T} + \frac{\partial x_1}{\partial \tau} \right) + O(\varepsilon^2)$$

Аналогично

$$x'' = \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T \partial \tau} \right) + O(\varepsilon^2)$$

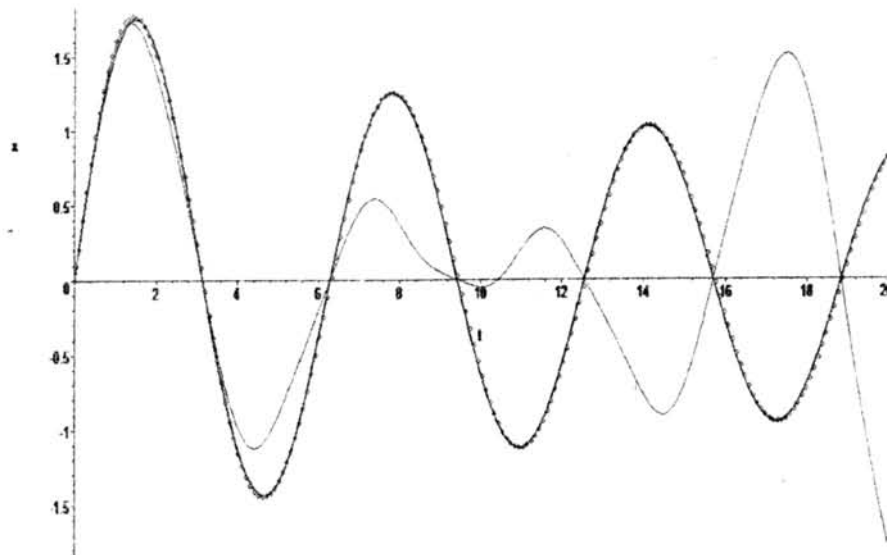
Применяя этот метод к уравнению (1) и, группируя по степеням  $\varepsilon$ , приходим к системе

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T \partial \tau} + \frac{\partial x_0}{\partial T} x_0^2 + x_1 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Первое уравнение системы есть уравнение гармонического осциллятора; его общее решение имеет вид

$$x_0 = A \sin \tau + B \cos \tau, \quad (7)$$

где  $A$  и  $B$  - константы относительно  $\tau$ . Но на самом деле это переменные от «медленного» времени  $T = \varepsilon t$ . Для нахождения зависимости подставим (7) во второе уравнение системы (6). Для исключения вековых членов приравняем коэффициенты при  $\cos \tau$  и  $\sin \tau$  в полученном уравнении к нулю. Приходим к системе дифференциальных уравнений относительно  $A(T)$  и  $B(T)$ .



$$\begin{cases} 2B_t' + \frac{1}{4}A^2B + \frac{1}{4}B^3 = 0 \\ -2A_t' - \frac{1}{4}A^3 - \frac{1}{4}AB^2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Частное решение системы (8) с учетом начальных условий  $x(0)=0$  и  $x'(0)=2$  имеет вид

$$A = \frac{2}{\sqrt{T+1}}, \quad B = 0. \quad (9)$$

Подставляя полученные результаты в (7), находим

$$x_0(\tau, T) = \frac{2 \sin \tau}{\sqrt{T+1}}. \quad (10)$$

Следовательно,

$$x = \frac{2 \sin \tau}{\sqrt{T+1}} + O(\varepsilon) = \frac{2 \sin t}{\sqrt{\varepsilon T+1}} + O(\varepsilon) \quad (11)$$

есть приближенное решение.

На рисунке показаны (при  $\varepsilon=0,2$ ) графики численного решения (обозначено точками), решения (3) и приближенного аналитического решения (11), полученного методом двух масштабов.

Графики численного решения и решения (11) практически неразличимы, и в то же время, значительно отличаются от решения (3). Таким образом, метод двух масштабов дает вполне удовлетворительное аналитическое приближенное решение рассматриваемого уравнения со слабой нелинейностью.

#### Список использованной литературы

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: «Наука», 1974. - 503 с.
2. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. - Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. - 406 с.
3. Найфэ А. Х. Методы возмущений. Пер. с англ. - М.: «Мир», 1976. - 455 с.
4. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. Пер. с англ. - М.: «Мир», 1986. - 243 с.

### ФОТОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОТОЧНЫЙ МУТНОМЕР И МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЕГО МЕТРОЛОГИЧЕСКОЙ НАДЕЖНОСТИ

Мельничук О. В.

Уфимский государственный авиационный технический университет

Большинство объектов в мире существует в виде дисперсных сред (ЖДС): эмульсий, суспензий, коллоидных растворов. Информация о концентрации взвешенных частиц (дисперсной фазы - ДФ) часто бывает