Пуолокайнен Т. М.
РАЗБИЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ КЛАССА А НА ПОДКЛАССЫ
Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2008/7/55.html
Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2008. № 7 (14). C. 151-154. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2008/7/

© Издательство "Грамота"
Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net
Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

РАЗБИЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ КЛАССА *А* НА ПОДКЛАССЫ

Пуолокайнен Т. М.
Карельский государственный педагогический университет

В работе [Хадвигер 1957: 121] Хадвигер сформулировал гипотезу, согласно которой для покрытия любого выпуклого тела в n-мерном евклидовом пространстве E^n достаточно 2^n тел меньших размеров, гомотетичных данному телу.

В работах автора [Пуолокайнен 1998: 334], [Пуолокайнен 2000: 239] сформулирована и решена задача покрытия некоторых классов выпуклых многогранников образами тел при гомотетии с коэффициентами, меньшими единицы. В работе [Пуолокайнен 2003: 65] рассмотрено влияние перестроек многогранника на количество геометрических тел, являющихся образами данного многогранника при гомотетиях и достаточное для покрытия многогранника.

Проблема покрытия выпуклых многогранников образами тел при гомотетии и проблема классификации выпуклых многогранников связаны теснейшим образом. Классификация выпуклых многогранников необходима для того, чтобы рассматривать проблему покрытия не отдельно взятого выпуклого многогранника, а целого класса выпуклых многогранников. В работе автора [Пуолокайнен 2004: 40] выполнена классификация выпуклых многогранников, необходимая для покрытия тел, относящихся к определенному классу.

В статье [5] было выделено четыре класса выпуклых многогранников. К классу B были отнесены такие многогранники, которые содержат призматическую часть. К классу C мы отнесли те выпуклые многогранники, которые содержат поверхность переходного типа и не содержат призматической части. К классу D были отнесены выпуклые многогранники, которые содержат фрагмент призматической части (вида 1 или вида 2), но не содержат ни призматическую часть, ни поверхность переходного типа. И, наконец, к классу A были отнесены все выпуклые многогранники, не содержащие ни призматическую часть, ни поверхность переходного типа, ни фрагменты призматической части.

В настоящей статье дана классификация выпуклых многогранников класса A.

1. Некоторые определения

Определение 1. Пусть M - выпуклый многогранник класса A. Одну из граней этого многогранника назовем основанием, все остальные грани назовем боковыми гранями. К каждой боковой грани проведем единичный вектор внешней нормали. Перенесем все единичные векторы внешних нормалей боковых граней на единичную сферу. Если существует такая полусфера, внутри которой расположены концы единичных векторов внешних нормалей боковых граней, то такой выпуклый многогранник класса A назовем однолистником.

Определение 2. Выпуклый многогранник класса A, являющийся объединением двух однолистников с общим основанием, назовем двулистником.

Выше мы выделили два подкласса выпуклых многогранников класса A: это однолистники и двулистники. Все многогранники класса A, не вошедшие в подклассы однолистников и двулистников, отнесем к третьему подклассу класса A и обозначим A3.

Итак, все выпуклые многогранники класса A мы разбили на три подкласса (в дальнейшем каждый из подклассов будем называть классом). Обозначим:

A1 - все однолистники;

A2 - все двулистники;

A3 - остальные многогранники класса A.

2. Классификация многогранников класса A1

Все однолистники можно разбить на три подкласса:

A1.1 - обычные однолистники;

A1.2 - прямые однолистники;

A1.3 - наклонные однолистники.

Введем понятие обычного однолистника.

Определение 3. Пусть M - однолистник. Одна из граней этого многогранника - основание, остальные грани - боковые. Пусть основание однолистника лежит в некоторой плоскости α. Пусть в этой же плоскости лежит граница полусферы, внутри которой расположены концы единичных нормалей, проведенных к каждой из боковых граней. Такой однолистник назовем обычным и отнесем к классу A1.1.

Замечание 1. Название «однолистник» объясняется тем, что граница этого многогранника, состоящая из боковой поверхности и основания, обладает тем свойством, что ортогональное проектирование боковой поверхности на *основание* является биективным отображением. Этим свойством обладают только обычные однолистники. В случае прямых и наклонных однолистников можно указать такую плоскость, что ортогональное проектирование боковой поверхности на область этой плоскости является биекцией.

Определение 4. Пусть M - однолистник, основание которого лежит в плоскости α. Пусть боковые грани таковы, что найдется одна грань или одно ребро, перпендикулярные плоскости α. Такой однолистник назовем прямым однолистником.

Пусть некоторый прямой однолистник обладает свойством: одна его грань перпендикулярна плоскости α, в которой лежит плоскость основания. Рассмотрим единичную полусферу, лежащую в том же полупространстве, в котором лежит прямой однолистник; граница полусферы лежит в плоскости α. По определению однолистника концы всех нормалей к боковым граням являются внутренними точками некоторой полусферы. Чтобы найти такую полусферу, проведем через центр О единичной сферы плоскость β, пересекающую плоскость α под углом δ и рассмотрим новую полусферу, граница которой лежит в плоскости β. Тогда концы всех единичных нормалей боковых граней будут лежать внутри новой полусферы. Чтобы найти угол δ и положение плоскости β, поступим следующим образом.

Из всех векторов, концы которых лежат внутри полусферы, выбираем такой, который образует с плоскостью α наименьший угол. Для определенности, пусть вектор $\overrightarrow{n_1}$ образует наименьший угол с плоскостью α. Пусть величина этого угла γ. Обозначим ортогональную векторную проекцию вектора $\overrightarrow{n_1}$ на плоскость α $\overrightarrow{n_1}'$. $\angle(\overrightarrow{n_1}', \overrightarrow{n_1}) = \gamma$. В плоскости α через центр полусферы проведём прямую, перпендикулярную вектору, лежащему в плоскости α. Новая плоскость β содержит построенную прямую и образует с плоскостью α некоторый угол δ, меньший угла γ. Нетрудно убедиться в том, что все концы нормалей к боковым граням лежат внутри полусферы с центром в точке О и границей, лежащей в плоскости β

Если в прямом однолистнике есть ребро, перпендикулярное основанию, то рассмотрим угол между векторами $\overrightarrow{n_{p-1}}$ и $\overrightarrow{n_p}$, лежащими в плоскости α. Пусть биссектриса этого угла - луч [OF), лежащий в плоскости α. Луч $[OQ) \subset \alpha$, $[OQ) \perp [OF)$. $\angle NOF = \delta$. Луч [ON) выбран так, что плоскость FON перпендикулярна плоскости α. Два пересекающихся луча [OQ) и [ON) определяют плоскость β.

Итак, мы указали способ построения плоскости β, в которой лежит граница полусферы с тем же центром О, внутри которой лежат концы векторов единичных нормалей к боковым граням прямого однолистника.

Определение 5. Однолистник, не являющийся обычным и не являющийся прямым, назовем наклонным однолистником.

Обозначение: А1.3 - наклонные однолистники.

Замечание 2. Выше было объяснено, как получить такую полусферу, внутри которой лежат все концы векторов единичных внешних нормалей к боковым граням прямого однолистника. Выполняя аналогичные построения, можно найти соответствующую полусферу и для наклонного однолистника. Существование такой полусферы обеспечено определением однолистника.

Очевидно, что частным случаем однолистников являются выпуклые пирамиды и выпуклые усеченные пирамиды. Так же, как и однолистники, пирамиды и усеченные пирамиды могут быть обычными, прямыми и наклонными.

3. Классификация многогранников класса А2

Выше, в параграфе 1, было дано определение двулистника. Уточним это определение.

Определение 6. Рассмотрим два однолистника M_1 и M_2 с двумя равными и противоположно ориентированными основаниями. Рассмотрим выпуклый многогранник М, полученный склеиванием двух однолистников M_1 и M_2 по равным основаниям. Этот многогранник назовем двулистником.

Очевидно, что частным случаем двулистника является выпуклый многогранник, полученный склеиванием двух пирамид, пирамиды и усеченной пирамиды, двух усеченных пирамид по равным основаниям.

Все двулистники могут быть разбиты на три класса:

А2.1. - обычные двулистники;

А2.2. - прямые двулистники;

А2.3. - наклонные двулистники.

Определение 7. Рассмотрим два обычных однолистника, основания которых равны и противоположно ориентированы. Выпуклый многогранник, который получен склеиванием многогранников по равным основаниям, назовем обычным двулистником и отнесем к классу А2.1.

Определение 8. Выбираем любой прямой однолистник с некоторым основанием. Рассмотрим еще один однолистник с основанием, равным основанию первого однолистника и противоположно с ним ориентированным, который может быть обычным или прямым, но таким, что новый многогранник, полученный склейкой многогранников по двум равным основаниям, является выпуклым многогранником. Такой многогранник назовем прямым двулистником и отнесем его к классу А2.2.

Определение 9. Выбираем любой наклонный однолистник с некоторым основанием. Рассмотрим еще один однолистник с основанием, равным основанию первого однолистника, но противоположной с ним ориентации. Второй однолистник может быть обычным, прямым или наклонным. Выпуклый многогранник, полученный склеиванием двух однолистников по равным основаниям, назовем наклонным двулистником. Обозначим множество всех наклонных двулистников А2.3.

4. Классификация многогранников класса А

Напомним, какие многогранники относятся к классу А: это выпуклые многогранники, граница которых не содержит призматическую часть, не содержит поверхность переходного типа, а также не содержит фрагмент призматической части [5].

В этом классе многогранников мы выделили два подмножества: однолистники, множество которых мы обозначено А1, и двулистники, обозначенные А2. Все остальные многогранники, принадлежащие классу А, отнесём к классу А3. Разбиение класса А3 на подклассы осуществлено в параграфе 6.

Классы А1 и А2 , в свою очередь, распадаются на:

A1.1 - обычные однолистники;
A1.2 - прямые однолистники;
A1.3 - наклонные однолистники;
A2.1 - обычные двулистники;
A2.2 - прямые двулистники;
A2.3 - наклонные двулистники.

Замечание 3. В перечень, приведенный выше, не входят пирамиды, двойные пирамиды, усеченные пирамиды, двойные усеченные пирамиды. Все эти многогранники являются частными случаями классов A1.1, A1.2, A1.3, A2.1, A2.2, A2.3.

5. Одно свойство многогранников класса A3

Определение 10. Пусть M - выпуклый многогранник класса A3. Прямая q, не параллельная ни одной из граней многогранника M, задает в пространстве направление. Рассмотрим плоскость α, перпендикулярную прямой q. Пусть центр O единичной сферы S^2 лежит в плоскости α, которая разбивает сферу на две полусферы, условно верхнюю и нижнюю. К каждой грани многогранника проведем единичный вектор внешней нормали. Выполним параллельный перенос всех векторов единичных внешних нормалей так, чтобы начало каждого вектора совпало с точкой O. Так как прямая q не параллельна ни одной из граней многогранника, то ни один из нормальных векторов с началом в точке O не лежит в плоскости α. Рассмотрим только те единичные векторы внешних нормалей, концы которых лежат в верхней полусфере. Геометрический объект, являющийся объединением всех граней многогранника, концы единичных векторов внешних нормалей которых лежат в верхней полусфере, назовем шапочкой.

Лемма 1. Пусть M - выпуклый многогранник класса A3; l - направление в пространстве, не параллельное ни одной из граней многогранника. Тогда существует и единственно разбиение поверхности многогранника на две шапочки, каждая из которых содержит по крайней мере две грани.

Доказательство.

а) Существование шапочек.

Пусть M - выпуклый многогранник класса A3, l - прямая, не параллельная ни одной из граней многогранника. К каждой грани α_i (i=1,2,…,n) многогранника проведем единичный вектор внешней нормали, обозначим его $\vec{n}_i (i=1,2,...,n)$. Рассмотрим единичную сферу S^2, экваториальная плоскость которой перпендикулярна прямой l. Все единичные внешние нормали граней перенесем на единичную сферу; обозначим новые векторы $\vec{n}_i{}' \ (i=1,2,...,n)$.

Плоскость экватора сферы S^2 разбивает сферу на две полусферы. Ни один из нормальных векторов $\vec{n}_i{}'$ не лежит в экваториальной плоскости сферы, так как прямая l не параллельна ни одной из граней многогранника. Предположение о том, что в какую-то из полусфер не попал ни один из концов единичных векторов внешних нормалей, противоречит определению выпуклого многогранника.

Допустим, что одна из полусфер содержит конец только одного из единичных векторов внешних нормалей многогранника. В этом случае многогранник принадлежал бы классу A1, а мы рассматриваем многогранники класса A3.

Итак, в каждой из полусфер содержится, по крайней мере, две точки, каждая из которых является концом единичного вектора внешней нормали, перенесенного с поверхности многогранника на единичную сферу.

Рассмотрим объединение всех граней многогранника класса A3, концы единичных внешних нормалей которых лежат в верхней полусфере, обозначим это объединение W_1. $W_1 = \bigcup_j \alpha_j$, где j - индекс нормального вектора $\vec{n}_j{}'$, конец которого лежит в верхней полусфере.

Аналогично получим множество W_2 - объединение всех граней многогранника, концы единичных внешних нормалей которого лежат в нижней полусфере. Нетрудно убедиться в том, что $\partial M = W_1 \cup W_2$, где ∂M - граница многогранника M.

В самом деле, конец каждого единичного вектора внешней нормали оказался либо в верхней полусфере, либо в нижней. Если конец единичного вектора внешней нормали лежит в верхней полусфере, то соответствующая грань принадлежит множеству W_1; в противном случае грань многогранника принадлежит множеству W_2 .

Докажем, что каждое из множеств W_1 и W_2 является связным. Допустим, что W_1 представимо в виде объединения связной компоненты U, гомеоморфной кругу, и грани α_m, таких, что $U \cap \alpha_m = \varnothing$. Тогда рассмотрим единичные внешние нормали соседних с α_m граней. Все они лежат в нижней полусфере сферы S^2 . При этом вектор единичной внешней нормали грани α_m будет лежать внутри многогранного угла, составленного единичными внешними нормалями соседних с α_m граней, так как многогранник M - выпуклый. Итак, единичный вектор внешней нормали грани α_m оказался в нижней полусфере, что противоречит выбору граней множества W_1.

Допустим теперь, что W_1 можно представить в виде объединения связной компоненты U, гомеоморфной кругу, и некоторой грани α_q, таких, что пересечением множества U и грани α_q является вершина многогранника; обозначим эту вершину B. Аналогичными рассуждениями несложно убедиться в том, что и в этом случае конец единичного вектора внешней нормали грани α_q окажется в нижней полусфере, что противоречит выбору грани α_q.

Итак, каждое из множеств W_1 и W_2 связно и топологически эквивалентно кругу.

Нетрудно убедиться в том, что пересечением множеств W_1 и W_2 является некоторая замкнутая простая ломаная. Если допустить, что пересечением множеств W_1 и W_2 является плоская ломаная, то получится, что многогранник M является двулистником, что противоречит выбору многогранника M. Если предположить, что пересечение множеств W_1 и W_2 является непростой ломаной, то окажется, что множества W_1 и W_2 не грмеоморфны кругам. Каждое из множеств W_1 и W_2 являются шапочками по определению.

б) Единственность шапочек

Допустим, что в данном направлении *l* можно осуществить еще одно разбиение поверхности многогранника на две шапочки, не имеющие общих внутренних точек.

$\partial M = W_1 \cup W_2$ и $\partial M = U_1 \cup U_2$,

где W_1 и U_1 - верхние шапочки, а W_2 и U_2 - нижние шапочки. Убедимся в том, что, если грань α_i принадлежит шапочке W_1, то эта грань α_i принадлежит и шапочке U_1. В самом деле, грань α_i принадлежит шапочке W_1. Тогда конец единичного вектора внешней нормали этой грани принадлежит верхней полусфере. Так как конец единичного вектора внешней нормали грани α_i лежит в верхней полусфере, то грань α_i принадлежит и множеству U_1. Аналогично можно убедиться в том, что и остальные грани шапочек W_1 и U_1, W_2 и U_2 также совпадают.

Лемма доказана.

Имеют место следующие равенства:

$\partial M = W_1 \cup W_2$; $W_1 \cap W_2 = L$; $\partial M = W_1 \cup W_2 \cup L$,

где L - простая замкнутая ломаная, ∂M - граница многогранника M.

Замечание 4. В дальнейшем будем говорить, что пространственная ломаная L разбивает поверхность многогранника в направлении *l* на две шапочки W_1 и W_2.

6. Классификация многогранников класса А3

Все многогранники класса А3 разобьем на два класса по следующему признаку. К каждой грани многогранника класса А3 проведем единичный вектор внешней нормали. Перенесем эти векторы на единичную сферу. Совместим начало координат прямоугольной декартовой системы координат с центром сферы. Координатные плоскости Oxy, Oyz, Oxz разбивают сферу на 8 равных частей. Если эту систему координат можно выбрать так, что в каждую из 8 областей сферы попал хотя бы один конец единичного вектора внешней нормали, то многогранник отнесем к классу А3.2; в противном случае многогранник класса А3 отнесем к классу А3.1. Нетрудно убедиться в том, что каждый из классов А3.1 и А3.2 не пуст.

К многогранникам класса А3.1 относятся, прежде всего, те многогранники класса А3, которые содержат менее восьми граней. К этому же классу относятся многогранники, содержащие 8 и большее число граней, на поверхности которых лежат шапочки, содержащие две или три грани. К классу А3.1 относятся также многогранники класса А3, содержащие в каждой шапочке четыре и больше граней, причём, грани расположены так, что единичные векторы внешних нормалей распределены неравномерно, то есть найдутся такие области на сфере, что в какую-то из восьми равных областей не попал ни один из концов единичных внешних нормалей граней. Такие многогранники класса А3.1 в дальнейшем будем называть многогранниками со слабой представимостью граней. Итак, все многогранники класса А3.1 можно разбить на три подкласса:

а) многогранники с малым количеством граней (до восьми, не включая 8);

б) многогранники, поверхность которых содержит шапочки, состоящие из двух или трёх граней;

в) многогранники со слабой представимостью граней.

Среди всех многогранников класса А3,2 выделим один подкласс. Чтобы описать этот класс многогранников, поступим следующим образом. Пусть ABCD - тетраэдр. Рассмотрим выпуклый многогранник, полученный из тетраэдра ABCD отсечениями плоскостями так, чтобы части рёбер AB, AC, AD исходного многогранника сохранились. Теперь рассмотрим те грани нового многогранника, которые принадлежат отсекающим плоскостям и плоскостям, содержащим части рёбер AB, AC, AD. Этот набор граней образует шапочку. Если многогранник класса А3.2 содержит шапочку, описанную выше, то такой многогранник класса А3.2 отнесём к классу специального вида. Все остальные многогранники класса А3.2 назовём многогранниками общего вида.

Лемма 2. Пусть M - выпуклый многогранник класса А3.2. Тогда существуют два направления p и q в пространстве, непараллельные никакой из граней многогранника, такие, что в каждом из направлений существует разбиение поверхности многогранника на две шапочки, причем границы пар шапочек пересекаются в двух точках.

Доказательство этой леммы осуществляется аналогично доказательству Леммы 1.

Список использованной литературы

1. **Пуолокайнен Т. М.** Классификация выпуклых многогранников / Т. М. Пуолокайнен // Труды ПетрГУ. Сер. «Математика». - 2004. - Вып. 11. - С. 34-40.
2. **Hadwiger G.** Ungeloste Probleme / Hadviger G. // References Elem. der. Math. - 1957. - № 20. - P. 121.
3. **Puolokainen T.** Covering Some Classes of Convex Polyhedrons with Body Images at Homothety // Teaching Mathematics and Physics in Secondary and Higher Education / Puolokainen T. - Karelian State Pedagogical University, University of Yoensuu, 1998. - P. 330-334.
4. **Puolokainen T. M.** Covering Three Classes of Convex Polyhedrons with Body Images at Homothety // Learning and Teaching Science and Mathematics in Secondary and Higher Education / Puolokainen T. - Joensuu University Press, 2000. - P. 236-239.
5. **Puolokainen T. M.** Restructuring of Convex Polyhedrons // Mathematics and Science Education in the North-East of Europe / Puolokainen T. - Karelian State Pedagogical University, University of Joensuu, 2003. - P. 62-65.