

Федотов А. А.

**РАСЧЕТ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЫ ЗА КРЫЛОМ, РАБОТАЮЩИМ В РЕЖИМЕ СОЗДАНИЯ СИЛЫ ТЯГИ**

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2008/7/78.html](http://www.gramota.net/materials/1/2008/7/78.html)

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

**Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2008. № 7 (14). С. 225-229. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2008/7/](http://www.gramota.net/materials/1/2008/7/)

**© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)

и по данным Таблицы 2 вычислены значения коэффициентов:  $a_0 = -0.980294$ ,  $a_1 = 3.020350$ ,  $a_2 = -1.532259$ ,  $a_3 = 0.647344$ . Расчеты были выполнены в системе MATLAB и перепроверены с использованием интерполяционных формул. В Таблице 3 приведены значения сумм числовых рядов  $S_n$ , найденные по формуле (16).

**Табл. 3.** Суммы числовых рядов  $S_n$

$n$	$S_n$	$n$	$S_n$
2	1.238406	6	5.254777
3	2.094769	7	7.324281
4	2.936944	8	11.293329
5	3.925229	9	22.923442

Результаты вычислений сумм рядов  $S_n$  по формуле (16) совпадают со значениями Таблицы 2 в пределах указанных в данной таблице вычислительных погрешностей. При этом можно выдвинуть следующий аргумент в пользу утверждения, что в случае формулы (16) при высоких индексах  $n$  имеет место сглаживание погрешностей, и расчетные значения имеют погрешность, меньшую указанной в Таблице 2. В работе [4] аналитическим путем для суммы ряда  $S_9$  получена оценка:  $S_9 = 22.924 \pm 0.007$  и в то же время при расчете по формуле (16) находим:  $S_9 \approx 22.923442$ . Следовательно, при  $n=9$  действительная погрешность аппроксимации (16) будет менее чем 0.007.

Основными результатами статьи являются следующие: аналитическое выражение суммы ряда  $S_n$  рассмотренного класса, метод суммирования, а также вычислительный алгоритм решения задачи. Полученные численные значения достаточно точно согласуются с аналитическими оценками, а также с данными статьи [4]. Результаты статьи дают представление об общих свойствах позиционных гармонических рядов и указывают значения их сумм.

*Список использованной литературы*

1. **High R.** A Look at the Harmonic Series or What Happened to the Nines? // Mathematics and Computer Education. - 1983. - V. 17. - № 1. - P. 38-39.
2. **Полиа Г., Серё Г.** Задачи и теоремы из анализа. - М.: Наука, 1978. - Т. 1.
3. **Kempner A. J.** // Amer. Math. Monthly. - 1914. - Т. 21.
4. **Федосеев В. М.** Оценка и общая формула для сумм частичных гармонических рядов. - Пенза, 2003. - Деп. в ВИНИТИ 26.06.03. - № 1241-B2003.

**РАСЧЕТ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЫ ЗА КРЫЛОМ,  
РАБОТАЮЩИМ В РЕЖИМЕ СОЗДАНИЯ СИЛЫ ТЯГИ**

*Федотов А. А.*

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

Вихревые структуры за тонкими крыльями конечного размаха, мгновенно приведенными из состояния покоя в движение с постоянной скоростью под постоянным углом атаки, исследованы в работах [Белоцерковский, Ништ 1978: 2], [Алгазин 1980: 1]. В работе [Федотов 1990: 5] изучена вихревая структура за прямоугольным тонким крылом, моделирующим работу крыла насекомого или птицы в режиме нормального трепещущего полета, т.е. в этой работе изучена вихревая структура за машущим крылом, использующимся для создания подъемной силы. В настоящей работе с помощью методики [Федотов 1990: 5] исследуется вихревая структура за машущим крылом, предназначенным для создания силы тяги. Крыло, рассматриваемое в данной статье, моделирует работу хвостовых плавников плавающих животных [Зайцев, Федотов 1986: 3], [Федотов 1987: 4].

1. Закон движения крыла. Рассмотрим бесконечно тонкое плоское крыло, движущееся в идеальной несжимаемой жидкости. Закон движения крыла в декартовой системе координат  $x^1, x^2, x^3$ , в которой жидкость на бесконечности набегаем на крыло однородным потоком со скоростью  $\vec{V}_\infty$ , в безразмерной форме задается уравнениями

$$\begin{aligned}
 x_s^1 &= \left[ a_s^1 + c_0 (1 - a_s^1) \cdot (a_s^2)^2 - b_0 \right] \cdot \cos \beta(t) + b_0, \\
 x_s^2 &= \lambda \cdot (1 - c_0 / 3) \cdot a_s^2 / 2, \\
 x_s^3 &= \left[ a_s^1 + c_0 (1 - a_s^1) \cdot (a_s^2)^2 - b_0 \right] \cdot \sin \beta(t) + h \cdot \cos(\omega \cdot t), \\
 \beta(t) &= \gamma(t) - \alpha(t), \quad \gamma(t) = \arctan(\omega \cdot h \cdot \sin(\omega \cdot t)), \quad \alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin(\omega \cdot t), \\
 0 \leq a_s^1 \leq 1, \quad -1 \leq a_s^2 \leq 1, \quad c_0 &= 3/4, \quad \lambda = 4, \quad \alpha_0 = 10^\circ,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$0.5 \leq h \leq 1.5, \quad 0.2 \leq \omega \leq 1.5, \quad 0 \leq b_0 \leq 1.5.$$

Здесь  $x_s^k$  и  $a_s^l$  ( $k=1,2,3$ ;  $l=1,2$ ) - соответственно декартовы и лагранжевы координаты точек крыла,  $t$  - время,  $c_0$  - параметр, задающий форму крыла в плане;  $\lambda$  - удлинение крыла,  $h$  - амплитуда вертикальных колебаний оси угловых колебаний,  $\alpha = \alpha(t)$  - угол атаки,  $\alpha_0$  - амплитуда изменения угла атаки,  $b_0$  - положение оси вертикальных колебаний (расстояние в корневом сечении  $a_s^2 = 0$  между точкой передней кромки крыла и точкой оси угловых колебаний, положительное, если ось расположена позади передней кромки). Форма крыла в плане изображена в плоскости  $x^1, x^2$  на Рис. 1 (а). Кривой 1 на рисунке показана передняя кромка крыла, которая определяется уравнением  $x_s^1 = (x_s^2)^2 / 3$ .

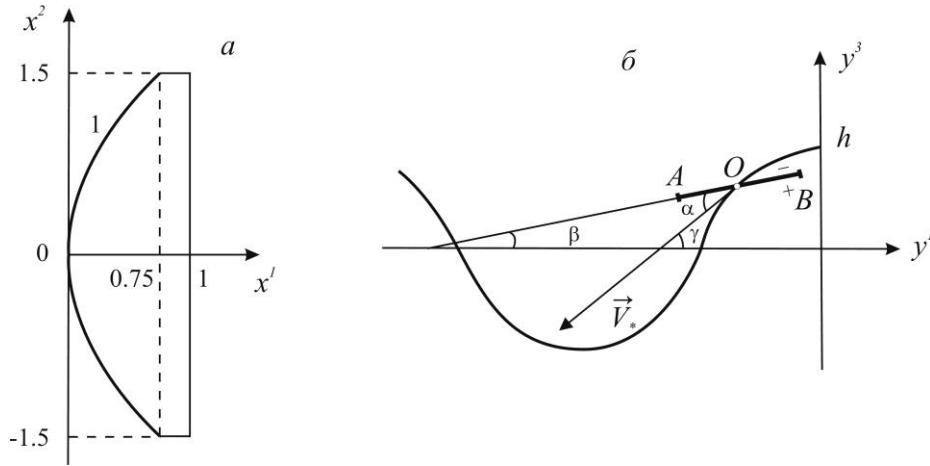


Рис. 1.

При переходе к безразмерным переменным за характерную длину принята длина корневой хорды  $b$ , за характерную скорость - скорость набегающего потока на бесконечности  $V_\infty$ , за характерное время - отношение  $b/V_\infty$ .

Движение крыла опишем в системе координат  $y^1, y^2, y^3$  (Рис. 1 (б)), в которой жидкость на бесконечности покоится и оси которой параллельны соответственно осям  $x^1, x^2, x^3$ . Ось угловых колебаний, параллельная оси  $y^2$ , движется вдоль вертикальной оси по закону  $y^3 = h \cdot \cos(\omega \cdot t)$ , а вдоль горизонтальной оси - по закону  $y^1 = -t$ . Крыло проектируется на плоскость  $y^1 y^3$  корневой хордой  $AB$ , ось угловых колебаний - точкой  $O$ . Таким образом, положение крыла в каждый момент времени определяется положением оси угловых колебаний (т.е. положением точки  $O$ ) и углом наклона хорды  $AB$  к оси  $y^1$  - углом  $\beta = \beta(t)$ . Угол  $\gamma = \gamma(t)$  - это угол между вектором мгновенной скорости оси угловых колебаний  $\vec{V}_*$  и осью  $y^1$ . Угол атаки крыла  $\alpha$  определяется как угол между вектором  $\vec{V}_*$  и хордой крыла  $AB$ . Угол атаки  $\alpha$  является положительным, если вектор скорости  $\vec{V}_*$  и нормаль к поверхности  $\vec{n}_s$  направлены в разные стороны крыла, и отрицательным - в противном случае. Определение нормали  $\vec{n}_s$  будет дано ниже.

2. Система уравнений. Крыло и поверхность тангенциального разрыва скорости жидкости представляют несущей и свободной вихревой поверхностями, соответственно. Принята следующая схема обтекания. Считается, что передняя кромка несущей поверхности ( $a_s^1 = 0, -1 \leq a_s^2 \leq 1$ ) является кромкой натекания, обтекаемой без отрыва, на которую действует подсосывающая сила. Задняя ( $a_s^1 = 1, -1 \leq a_s^2 \leq 1$ ) и боковая ( $0 \leq a_s^1 \leq 1, a_s^2 = \pm 1$ ) кромки несущей поверхности являются кромкой стекания, с которой в поток жидкости сходит свободная вихревая поверхность. Скорости  $\vec{V}_\sigma = v_\sigma^k \cdot \vec{e}_k$ , индуцируемые несущей ( $\sigma = s$ ) и свободной вихревой ( $\sigma = w$ ) поверхностями в точке наблюдения с радиус-вектором  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ , вычисляются по формуле [Федотов 1990: 5]

$$\vec{V}_\sigma = \vec{V}_\sigma(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{p_\sigma}^{q_\sigma} \int_{-l_\sigma}^{l_\sigma} \frac{\vec{\gamma}_\sigma \times \vec{R}_\sigma}{R_\sigma^3} da_\sigma^1 da_\sigma^2.$$

Здесь  $a_\sigma^1, a_\sigma^2$  - лагранжевы координаты на поверхности  $\sigma$ ,  $\bar{R}_\sigma = \bar{r} - \bar{r}_\sigma$ ,  $R_\sigma = |\bar{R}_\sigma|$ ,  $\bar{r} = x^k \cdot \bar{e}_k$ ,  $\bar{r}_\sigma = x_\sigma^k \cdot \bar{e}_k$ ,  $\bar{e}_k, k=1,2,3$  - единичные базисные векторы неподвижной декартовой системы координат  $x^1, x^2, x^3$ ;  $\bar{r}_\sigma$  - радиус-вектор точки поверхности  $\sigma$ ;  $\bar{\gamma}_\sigma = e_{12\sigma} \cdot \bar{\Omega}_\sigma$  - поверхностный вектор вихря,  $e_{12\sigma} = |\bar{y}_{1\sigma} \times \bar{y}_{2\sigma}|$ ,  $\bar{y}_{l\sigma} = \partial \bar{r}_\sigma / \partial a_\sigma^l$ ,  $l=1,2$  - базисные векторы лагранжевой системы координат на поверхности  $\sigma$ ,  $\bar{\Omega}_\sigma = \bar{n}_\sigma \times (\bar{V}_- - \bar{V}_+)$  - вектор интенсивности завихренности поверхности  $\sigma$ ,  $\bar{V}_+$  и  $\bar{V}_-$  - предельные значения скорости жидкости  $\bar{V}$  при подходе к поверхности  $\sigma$  с нижней и верхней сторон соответственно,  $\bar{n}_\sigma = (\bar{y}_{1\sigma} \times \bar{y}_{2\sigma}) / e_{12\sigma}$  - единичный вектор нормали к верхней стороне поверхности. Нижняя и верхняя стороны поверхности  $\sigma$  на Рис. 1 и далее обозначаются значками "+" и "-", соответственно. Пределы интегрирования для несущей и свободной вихревой поверхностей соответственно равны  $p_s = 0$ ,  $q_s = 1$ ,  $l_s = 1$  и  $p_w = b_0^1(t)$ ,  $q_w = 0$ ,  $l_w = d$ , где  $b_0^1(t) = c \cdot t$ ;  $c$  и  $d$  - константы, выбираемые при параметризации поверхности  $w$ , исходя из удобства проведения вычислений. Поверхностные векторы  $\bar{\gamma}_\sigma$  ( $\sigma = s, w$ ) разлагаются по базисным векторам лагранжевых систем координат:  $\bar{\gamma}_\sigma = \gamma_\sigma^l(a_\sigma^1, a_\sigma^2, t) \cdot \bar{y}_{l\sigma}$ , причем  $\gamma_s^1 = \partial \kappa / \partial a_s^2$ ,  $\gamma_s^2 = -\partial \kappa / \partial a_s^1$ , где  $\kappa = \kappa(a_s^1, a_s^2, t)$  - вихревая функция, представляющая собой скачок потенциала скорости жидкости на несущей поверхности. Особенности вихревой функции выделяются в явном виде. Регулярная часть вихревой функции представляется дифференцируемой до нужного порядка функцией  $\psi(a_s^1, a_s^2, t)$ , определенной на всей несущей поверхности, включая ее границы.

Система уравнений для определения функции  $\psi(a_s^1, a_s^2, t)$ , компонент  $\gamma_w^l(a_w^1, a_w^2, t)$  вектора  $\bar{\gamma}_w$ , а также функций  $x_w^k = x_w^k(a_w^1, a_w^2, t)$ , характеризующих пространственное положение свободной вихревой поверхности, в безразмерной форме имеет вид [Федотов 1987: 4], [Федотов 1990: 5]:

$$(v_\infty^k + v_s^k + v_w^k - \partial x_{s0}^k / \partial t) \cdot n_{s0,k} = 0, \quad \bar{r} = \bar{r}_{s0}, \quad (2)$$

$$\partial x_{w0}^k / \partial t = v_\infty^k + v_s^k + v_w^k, \quad k=1,2,3; \quad \bar{r} = \bar{r}_{w0}, \quad (3)$$

$$\partial \gamma_w^l / \partial t = 0, \quad l=1,2 \quad (4)$$

Здесь  $n_{s0,k} = (\bar{n}_{s0} \cdot \bar{e}_k)$ ,  $\bar{n}_{s0} = \bar{n}_s(\bar{r}_{s0}, t)$ ;  $\bar{r}_{\sigma 0}$ ,  $\sigma = s, w$  - радиус-вектор точки наблюдения в случае, когда эта точка принадлежит поверхности  $\sigma$ ,  $\bar{r}_{\sigma 0} = x_{\sigma 0}^k \cdot \bar{e}_k = x_\sigma^k(a_{\sigma 0}^1, a_{\sigma 0}^2, t) \cdot \bar{e}_k$ ,  $\bar{V}_\infty = v_\infty^k \cdot \bar{e}_k = \bar{e}_1$ . По повторяющемуся в произведениях индексу  $k$  проводится суммирование от единицы до трех.

Граничные условия, которые должны выполняться в точках кромки стекания, имеют вид:

$$x_s^k = x_w^k, \quad \bar{n}_s = \bar{n}_w, \quad \bar{\Omega}_s = \bar{\Omega}_w, \quad \partial \kappa(a_{s^*}^1, a_{s^*}^2, t) / \partial t = -\gamma_w^2(a_{w^*}^1, a_{w^*}^2, t). \quad (5)$$

Здесь  $(a_{w^*}^1, a_{w^*}^2)$  - лагранжевы координаты точки поверхности  $w$ , совпадающей в момент времени  $t$  с точкой кромки стекания поверхности  $s$ , имеющей лагранжевы координаты  $(a_{s^*}^1, a_{s^*}^2)$ .

В начальный момент времени  $t=0$  необходимо задать функции  $\psi$ ,  $\gamma_w^l$  и положение свободной вихревой поверхности.

Решение системы уравнений (2)–(4) с заданными начальными и граничными (5) условиями находится численно с помощью метода вихревых поверхностей [Зайцев, Федотов 1986: 3].

3. Результаты расчетов. Для того чтобы получить наглядное представление о вихревой структуре за крылом, движущимся по закону (1), изучим формирование и движение свободной вихревой поверхности в плоскости симметрии течения  $x^2 = 0$ .

В плоскости  $x^2 = 0$  движется линия  $L$  поверхности  $w$ , определяемая в лагранжевых переменных соотношениями  $c \cdot t \leq a_w^1 \leq 0$ ,  $a_w^2 = 0$ . Параметр  $c$  в численном алгоритме выбран равным  $-1/\Delta t$  ( $\Delta t$  - шаг по времени), а расчеты проводятся в моменты времени  $t_\nu = \nu \cdot \Delta t$  (где  $\nu = 1, 2, \dots$ ), так что в текущий момент времени  $t_q$  лагранжевы координаты узловых точек линии  $L$  задаются уравнениями  $a_w^1 = -\nu$ ,  $a_w^2 = 0$  или, после замены  $\bar{a}_w^1 = -a_w^1$ , - уравнениями  $\bar{a}_w^1 = \nu$ ,  $a_w^2 = 0$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots, q$ .

На Рис. 2 и 3 представлены результаты расчетов, проведенных при следующих значениях параметров:  $h=1$ ,  $b_0=1$ ,  $\omega=1$ . Расчеты в окончательном варианте проводились с числом сплайновых ячеек на половине крыла, равным  $2 \times 6 = 12$ , и шагом по времени  $\Delta t = \pi / (8\omega)$ .

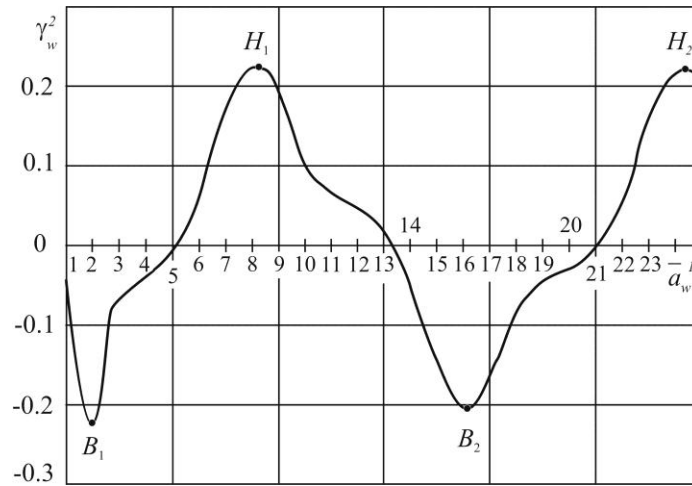


Рис. 2.

На Рис. 2 показано распределение компоненты  $\gamma_w^2 = \gamma_w^2(\bar{a}_w^{-1})$  вектора  $\vec{\gamma}_w$  в плоскости симметрии течения  $x^2 = 0$  в момент времени  $t = 3\pi$ . Отметим, что в сечении  $x^2 = 0$  в силу симметричного обтекания крыла компонента  $\gamma_w^1$  вектора  $\vec{\gamma}_w$  тождественно равняется нулю. Из графика видно, что завихренность в точках свободной вихревой поверхности, сходящих с кромки стекания корневого сечения крыла, максимальна в те моменты времени, когда крыло занимает положения, близкие к крайнему верхнему (точки  $B_1$  и  $B_2$ ) и крайнему нижнему (точки  $H_1$  и  $H_2$ ) положениям. Крыло занимает соответственно крайние верхнее и нижнее положения в моменты времени  $t = 2i \cdot \pi$  и  $t = (2i + 1) \cdot \pi$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

Положения линии  $L$  свободной вихревой поверхности были построены для моментов времени  $t = \pi \cdot i / 2$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . На Рис. 3 показано положение линии  $L$  при  $t = 3\pi$ . Положения линии  $L$  в разные моменты времени позволяют проследить развитие во времени свободной вихревой поверхности в плоскости симметрии течения  $x^2 = 0$ . На Рис. 3 отрезком  $AB$  изображена корневая хорда крыла (точка  $A$  соответствует кромке натекания корневой хорды), точками показаны положения узловых точек (рядом с точками записаны их лагранжевы координаты  $\bar{a}_w^{-1} = \nu$ ). Анализ графиков показывает, что с течением времени в плоскости  $x^2 = 0$  свободная вихревая поверхность закручивается вокруг точек, в которых интенсивность завихренности максимальная по абсолютной величине.

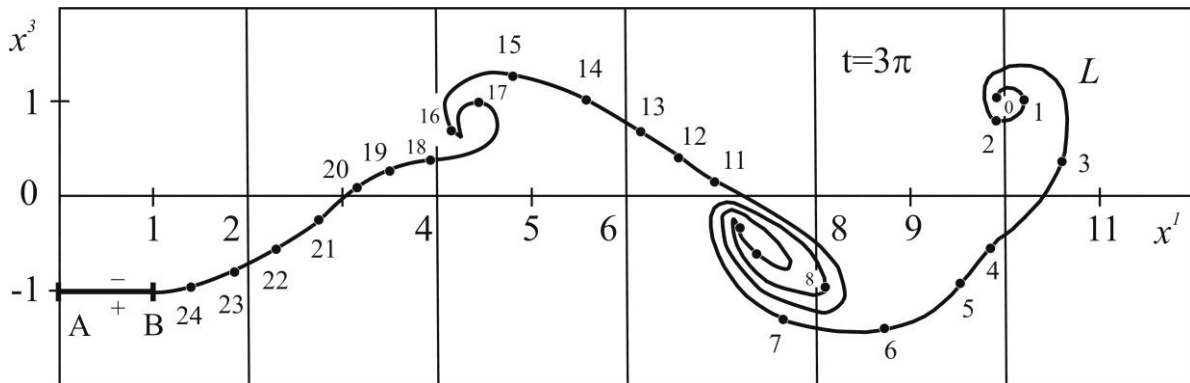


Рис. 3.

Из Рис. 3 видно, что участки свободной вихревой поверхности с лагранжевыми координатами  $\bar{a}_w^{-1} \approx 0-3$  и  $\bar{a}_w^{-1} \approx 15-17$  закручиваются против часовой стрелки (в этих точках  $\gamma_w^2 < 0$ , причем в точках  $\bar{a}_w^{-1} = 2$  и  $\bar{a}_w^{-1} = 16$  график  $\gamma_w^2 = \gamma_w^2(\bar{a}_w^{-1})$  имеет локальные минимумы), а участок свободной вихревой поверхности с лагранжевыми координатами  $\bar{a}_w^{-1} \approx 7-10$  закручивается по часовой стрелке (в этих точках  $\gamma_w^2 > 0$  и точка  $\bar{a}_w^{-1} = 8$  является точкой локального максимума). Следует ожидать, что с течением времени вокруг точки с

лагранжевой координатой  $\bar{a}_w^{-1} = 24$  свободная вихревая поверхность будет закручиваться по часовой стрелке, так как в этой точке  $\gamma_w^2 > 0$  и она является точкой локального максимума.

Таким образом, из результатов расчетов следует, что после установления периодического режима обтекания крыла, приведенного в движение из состояния покоя, в плоскости  $x^2 = 0$  образуются вихревые ядра, которые сносятся потоком, вращаясь при этом по или против часовой стрелки в зависимости от знака компоненты  $\gamma_w^2$  вектора  $\bar{\gamma}_w$ . Вихревые ядра верхнего ряда (см. Рис. 3) вращаются против часовой стрелки (в точках свободной вихревой поверхности, образующих эти ядра,  $\gamma_w^2 < 0$ ), а вихревые ядра нижнего ряда - по часовой стрелке (в точках свободной вихревой поверхности, образующих эти ядра,  $\gamma_w^2 > 0$ ). На Рис. 3 изображено одно такое ядро, поскольку к моменту времени  $t = 3\pi$  после начала движения крыла из состояния покоя успевает образоваться только это ядро.

#### Список использованной литературы

1. Алгазин В. А. Расчет нелинейных аэродинамических характеристик крыла конечного размаха // ПМТФ. - 1980. - № 4. - С. 97-107.
2. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. - М.: Наука, 1978. - 352 с.
3. Зайцев А. А., Федотов А. А. Обтекание идеальной несжимаемой жидкостью тонкого крыла конечного размаха, колеблющегося с большой амплитудой // Изв. АН СССР. МЖГ. - 1986. - № 5. - С. 75-82.
4. Федотов А. А. Эффективность работы хвостового плавникового движителя // Докл. АН СССР. - 1987. - Т. 293. - № 1. - С. 48-51.
5. Федотов А. А. Структура вихревого следа за крылом, работающим в режиме нормального трепещущего полета // Вестник МГУ. Сер. 1: Математика. Механика. - 1990. - № 3. - С. 42-46.

### О ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮТЕ В $H_+^2$

Чешкова М. А.  
АлтГУ, г. Барнаул

В псевдоевклидовом пространстве [1: 246]  $R_1^3$  определено скалярное произведение  $\langle x, y \rangle = -x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$  и псевдовекторное произведение [2: 69], [3]  $\lambda y = (-x^2 y^3 - x^3 y^2, x^3 y^1 - x^1 y^3, x^1 y^2 - x^2 y^1)$ . Обозначим  $H_+^2 = \{x \in R_1^3 : -(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1, x^1 \geq 1\}$ . (1)

Гиперболоид  $H_+^2$  является моделью плоскости Лобачевского  $L^2$ . Метрика на  $R_1^3$  индуцирует риманову метрику на  $H_+^2$ . На кривой  $\gamma \in H_+^2$  можно ввести естественную параметризацию.

Итак, рассмотрим кривую  $\gamma \in H_+^2 : x = x(s)$ , где  $S$  - длина дуги. Обозначим  $\frac{dx}{ds} = \tau(s)$ .

Разложим вектор  $\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d\tau}{ds}$  на касательную  $k_g e$  и нормальную  $k_n n$  составляющие, где  $k_g, k_n$  - геодезическая и нормальная кривизны кривой  $\gamma$ , соответственно.

В нашем случае  $n = x, k_n = 1$ . Определен ортогональный репер [3]  $\{x, \tau, e\}$ :  
 $x \wedge \tau = e, \tau \wedge e = -x, x \wedge e = -\tau, \langle x, x \rangle = -1, \langle \tau, \tau \rangle = 1, \langle e, e \rangle = 1$

Итак, [3]  $\frac{dx}{ds} = \tau, \frac{d\tau}{ds} = k_g e + x, \frac{de}{ds} = -k_g \tau$  (3)

Окружность, принадлежащая  $H_+^2 : F(X(s)) \equiv \langle C - X, C - X \rangle - a^2 = 0, \langle X, X \rangle = -1$ , имеет с кривой  $\gamma$  в точке  $S_0$  соприкосновение второго порядка ([4: 40], если  $F(x(s_0)) = 0, \frac{dF}{ds} \Big|_{s_0} = 0, \frac{d^2 F}{ds^2} \Big|_{s_0} = 0$ . Используя (2),(3), находим  $\langle C, x \rangle = -\frac{1}{2}(a^2 + 1 - \langle C, C \rangle), \langle C, x' \rangle = 0, \langle C, x'' \rangle = 0$ . Таким образом,  $C \parallel x' \wedge x'' = k_g x + e$ .

Замечаем, что рассматриваемая окружность есть соприкасающаяся окружность, которая получается пересечением соприкасающейся плоскости кривой  $\gamma$  со сферой  $H_+^2$ .

Рассмотрим те кривые  $\gamma$ , для которых  $C$  имеет мнимую длину.

Положим  $c = \alpha C \in H_+^2$ . Имеем  $\langle c, c \rangle = \alpha^2 (-k_g^2 + 1)$ .

Так как  $\langle c, c \rangle = -1$ , то  $-k_g^2 + 1 < 0$ . Таким образом,  $c = \frac{1}{\sqrt{k_g^2 - 1}} (k_g x + e), k_g^2 > 1$  (4)

Кривая  $\tilde{\gamma}^c = c(s)$  называется [3] гиперболической эволютой кривой  $\gamma$ .

Для  $\gamma \in R_1^3$  определен репер Френе  $\{x, \tau, \nu, \beta\}$  и формулы Френе [2: 70]