Чешкова М. А.

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮТЕ В

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2008/7/79.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2008. № 7 (14). С. 229-230. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2008/7/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

лагранжевой координатой $\overset{-1}{a}_w = 24$ свободная вихревая поверхность будет закручиваться по часовой стрелке, так как в этой точке $\gamma_w^2 > 0$ и она является точкой локального максимума.

Таким образом, из результатов расчетов следует, что после установления периодического режима обтекания крыла, приведенного в движение из состояния покоя, в плоскости $x^2 = 0$ образуются вихревые ядра, которые сносятся потоком, вращаясь при этом по или против часовой стрелки в зависимости от знака компоненты γ_w^2 вектора $\vec{\gamma}_w$. Вихревые ядра верхнего ряда (см. Рис. 3) вращаются против часовой стрелки (в точках свободной вихревой поверхности, образующих эти ядра, $\gamma_w^2 < 0$), а вихревые ядра нижнего ряда - по часовой стрелке (в точках свободной вихревой поверхности, образующих эти ядра, $\gamma_w^2 > 0$). На Рис. 3 изображено одно такое ядро, поскольку к моменту времени $t = 3\pi$ после начала движения крыла из состояния покоя успевает образоваться только это ядро.

Список использованной литературы

1. Алгазин В. А. Расчет нелинейных аэродинамических характеристик крыла конечного размаха // ПМТФ. - 1980. - № 4. - С. 97-107.

2. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. - М.: Наука, 1978. - 352 с.

3. Зайцев А. А., Федотов А. А. Обтекание идеальной несжимаемой жидкостью тонкого крыла конечного размаха, колеблющегося с большой амплитудой // Изв. АН СССР. МЖГ. - 1986. - № 5. - С. 75-82.

4. Федотов А. А. Эффективность работы хвостового плавникового движителя // Докл. АН СССР. - 1987. - Т. 293. - № 1. - С. 48-51.

5. Федотов А. А. Структура вихревого следа за крылом, работающим в режиме нормального трепещущего полета // Вестник МГУ. Сер. 1: Математика. Механика. - 1990. - № 3. - С. 42-46.

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮТЕ В H_+^2

Чешкова М. А.
АлтГУ, г. Барнаул

В псевдоевклидовом пространстве [1: 246] R_1^3 определено скалярное произведение $< x, y >= -x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$ и псевдовекторное произведение [2: 69], [3] $x\Lambda y = (-(x^2y^3 - x^3y^2), x^3y^1 - x^1y^3, x^1y^2 - x^2y^1)$.

Обозначим $H_+^2 = \{x \in R_1^3 : -(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1, x^1 \geq 1$. (1)

Гиперболоид H_+^2 является моделью плоскости Лобачевского L^2. Метрика на R_1^3 индуцирует риманову метрику на H_+^2. На кривой $\gamma \in H_+^2$ можно ввести естественную параметризацию.

Итак, рассмотрим кривую $\gamma \in H_+^2 : x = x(s)$, где s - длина дуги. Обозначим $\frac{dx}{ds} = \tau(s)$.

Разложим вектор $\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\tau}{ds}$ на касательную $k_g e$ и нормальную $k_n n$ составляющие, где k_g, k_n - геодезическая и нормальная кривизны кривой γ, соответственно.

В нашем случае $n = x, k_n = 1$. Определен ортогональный репер [3] $\{x, \tau, e\}$:

$$x\Lambda\tau = e, \tau\Lambda e = -x, x\Lambda e = -\tau, < x, x >= -1, < \tau, \tau >= 1, < e, e >= 1 \quad (2)$$

Итак, [3] $\frac{dx}{ds} = \tau, \frac{d\tau}{ds} = k_g e + x, \frac{de}{ds} = -k_g \tau$ (3)

Окружность, принадлежащая H_+^2: $F(X(s)) \equiv < C - X, C - X > -a^2 = 0, < X, X >= -1$, имеет с кривой γ в точке s_0 соприкосновение второго порядка ([4: 40], если $F(x(s_0)) = 0, \frac{dF}{ds}|_{s_0} = 0, \frac{d^2F}{ds^2}|_{s_0} = 0$. Используя (2),(3), находим $< C, x >= -\frac{1}{2}(a^2 + 1 - < C, C >), < C, x' >= 0, < C, x'' >= 0$. Таким образом, $C \parallel x'\Lambda x'' = k_g x + e$.

Замечаем, что рассматриваемая окружность есть соприкасающаяся окружность, которая получается пересечением соприкасающейся плоскости кривой γ со сферой H_+^2

Рассмотрим те кривые γ, для которых вектор C имеет мнимую длину.

Положим $c = \alpha C \in H_+^2$. Имеем $< c, c >= \alpha^2(-k_d^2 + 1)$.

Так как $< c, c >= -1$, то $-k_g^2 + 1 < 0$. Таким образом, $c = \frac{1}{\sqrt{k_g^2 - 1}}(k_g x + e), k_g^2 > 1$. (4)

Кривая $\tilde{\gamma}$ $c = c(s)$ называется [3] гиперболической эволютой кривой γ.

Для $\gamma \in R_1^3$ определен репер Френе $\{x, \tau, \nu, \beta\}$ и формулы Френе [2: 70]

$$\frac{dx}{ds}=\tau,\frac{d\tau}{ds}=k\nu,\frac{d\nu}{ds}=-k\tau+\kappa\beta,\frac{d\beta}{ds}=\kappa\nu,$$
$$\nu\Lambda\tau=\beta,\nu\Lambda\beta=\tau,\beta\Lambda\tau=\nu,$$
$$<\nu,\nu>=1,<\beta,\beta>=-1,<\tau,\tau>=1 \quad , \qquad (5)$$

где $k>0,\kappa$ - кривизна и кручение кривой, ν,β - орты главной нормали и бинормали кривой, соответственно.

Сравнивая (3),(5), находим $\nu=\frac{k_g e+x}{\sqrt{k_g^2-1}}$, (6)

$\beta=\frac{k_g x+e}{\sqrt{k_g^2-1}}$, (7)

Так как $\frac{d\tau}{ds}=k_g e+x=k\nu$, то следует

Теорема 1. *Кривизна кривой* γ *равна* $k=\sqrt{k_g^2-1}$ (8)

Сравниваем (4),(6). Имеет место

Теорема 2. *Радиус-вектор гиперболической эволюты* $\tilde{\gamma}$ *равен вектору* β *бинормали исходной кривой.*

Теорема 3. *Кручение кривой* γ *равно* $\kappa=-\frac{k_g'}{k_g^2-1}$. (9)

Доказательство. $\frac{d\beta}{ds}=-\frac{k_g k_g'}{\sqrt{k_g^2-1}^3}(k_g x+e)+\frac{k_g'}{\sqrt{k_g^2-1}}x=-\frac{k_g'}{k_g^2-1}\nu$ **.** Сравнивая с (5), получим теорему.

Определим репер Френе $\{\tilde{\tau},\tilde{\nu},\tilde{\beta}\}$ для гиперболической эволюты $\tilde{\gamma}$. Имеем

$$\frac{dC}{ds}=\frac{d\beta}{ds}=\kappa\nu,d\tilde{s}=|\kappa|\,ds,\frac{d\tilde{C}}{d\tilde{s}}=\tilde{\tau}=\frac{\kappa\nu}{|\kappa|}.$$

Итак, $\tilde{\tau}=\varepsilon\nu,\varepsilon=sign(\kappa)$. (10)

Из (10) следует

Теорема 4. *Касательная к гиперболической эволюте* $\tilde{\gamma}$ *параллельна главной нормали исходной кривой* γ.

Имеем $\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{s}}=\frac{d\tilde{\tau}}{ds}\frac{ds}{d\tilde{s}}=\frac{\varepsilon}{|\kappa|}(-k\tau+\kappa\beta)=\tilde{k}\tilde{\nu}$. Так как $\tilde{k}^2=\frac{k^2-\kappa^2}{\kappa^2}$, то $k^2-\kappa^2>0$.

Отсюда вытекает

Теорема 5. *Кривизна* $\tilde{k}$ *гиперболической эволюты* $\tilde{\gamma}$ *равна* $\tilde{k}=\frac{\sqrt{k^2-\kappa^2}}{|\kappa|},k^2-\kappa^2>0$ (11)

Имеем $\tilde{\nu}=\frac{-k\tau+\kappa\beta}{\sqrt{k^2-\kappa^2}}$, (12)

$\tilde{\beta}=\frac{-\kappa\tau+k\beta}{\sqrt{k^2-\kappa^2}}$. (13)

Теорема 6. *Кручение* $\tilde{\kappa}$ *гиперболической эволюты* $\tilde{\gamma}$ *равно* $\tilde{\kappa}=\frac{k\kappa'-k'\kappa}{|\kappa|(k^2-\kappa^2)}$. (14)

Доказательство.

$$\frac{d\tilde{\beta}}{d\tilde{s}}=\frac{1}{|\kappa|}\frac{d\tilde{\beta}}{ds}=\frac{1}{|\kappa|}\{-\frac{kk'-\kappa\kappa'}{\sqrt{k^2-\kappa^2}^3}(k\beta-\kappa\tau)+\frac{k'\beta-\kappa'\tau}{\sqrt{k^2-\kappa^2}}\}=$$
$$\frac{k\kappa'-\kappa k'}{|\kappa|\sqrt{k^2-\kappa^2}^3}(\kappa\beta-k\tau)=\frac{k\kappa'-\kappa k'}{|\kappa|(k^2-\kappa^2)}\tilde{\nu}=\tilde{\kappa}\tilde{\nu}$$

Откуда следует (14).

Список использованной литературы

1. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия 2. - М.: Просвещение,1975.

2. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Г. Современная геометрия. - М.: Наука,1979.

3. Izumiya Sh., Pei D., Sano T., Torii E. Evolutes of Hyperbolic Planes Curves // Acta Matimatica Sinica. English Series. – 2004. - V. 20. - № 3. - Pp. 543-550.

4. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. - М.: Наука,1969.