Ереклинцев Антон Германович

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С. Л. СОБОЛЕВА

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2009/11-1/4.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2009. № 11 (30): в 2-х ч. Ч. I. С. 17-20. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2009/11-1/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

в) в быту. Свет может получаться в лампах типа люминесцентных, внутренняя поверхность которых покрыта фосфором. При окислении водорода фосфор возбуждается и люминесцирует, лампа при этом остается холодной. Обогрев квартиры может осуществляться через стеновые панели, выполненные из пористого материала с примесью соответствующего катализатора. Водород, проходя через панели, окисляется и выделяет энергию. Дно кухонных кастрюлей, сковородок и др. состоит из пористого материала, содержащего водород, ток которого можно точно регулировать. Таким образом, отсутствует открытый огонь. Питание таких агрегатов, как телевизор, холодильник и др. можно осуществлять с помощью домашних электрических генераторов, сырьем которых служит водород.

Использованию водорода в качестве источника энергии посвящен ряд исследований и разработок. В виду того, что в крупных городах большая часть загрязнений воздуха приходится на долю выхлопных газов автотранспорта (в Москве более 80%), особое значение принимает перевод транспорта на экологически чистое водородное топливо. Здесь возможна как заправка а/м непосредственно водородом, так и выработка его из других компонентов (вода, бензин, газ и др.) по мере надобности. Здесь представляют значительный интерес разработки, проводимые в С.-Пб техническом университете, в ходе которых была модифицирована система питания автомобильного двигателя, работающего на обычном горючем с добавлением 5% водорода, получаемого в ходе реакции окисления Mg водой, $Mg + H_2O = MgO + H_2$, что приводит к резкому снижению токсичности выхлопных газов и значительному (до 30%) росту мощности.

В таких странах, как Германия, Япония уже функционируют станции заправки автотранспорта жидким водородом. Созданы а/м BMW (дальность пробега 350 км) и пассажирский автобус (дальность пробега 250 км), работающие на жидком водороде. В настоящее время внутренний транспорт Мюнхенского аэропорта переведен на водородное топливо. Создана Европейская ассоциация по разработке Н-технологии с капиталом в сотни млн евро. В Исландии строится крупный завод по получению водорода для обеспечения национальных и европейских потребностей. В 1999 г. был создан консорциум с задачей перевода большей части энергоснабжения Исландии на водород. Таким образом, фактически из Исландии создан гигантский полигон для отработки всех деталей Н-технологии. В США и Канаде производится по 190 тонн жидкого водорода в сутки, что соответствует 780 млн $м^3$/год (20% из них потребляет аэрокосмическая программа). Сейчас в мире существует годовая потребность в 500 млрд $м^3$ водорода (в 1970 г. - 200), которая в ближайшее время по экспертным оценкам должна удвоиться. К сожалению, Россия, как и США, является аутсайдером в плане внедрения Н-технологий, потребляя лишь десятые процента всего водорода, производимого в мире.

Кроме Германии, являющейся несомненным лидером в развитии Н-энергетики, довольно активно разработкой и внедрением Н-технологий занимаются Исландия, Япония, Южная Корея, Канада, Франция.

В РФ также уделяется некоторое внимание этим вопросам. Доказательством этому (помимо уже цитированных работ С.-Пб технического университета по модификации автомобильного топлива) является научная активность отечественных пожарных, которыми в последнее время защищен ряд диссертаций по вопросам пожаровзрывобезопасности производств, использующих водород.

Основным недостатком водорода как топлива является его взрывоопасность. Однако по ряду данных она не намного превышает таковую для метана, который уже давно стал привычным респектабельным топливом. Т.о., развитие и повсеместное внедрение Н-энергетики, совместно с широкомасштабным использованием альтернативных возобновляемых источников энергии, может защитить человечество от грозящего ему в ближайшем будущем глобальных энергетического и экологического кризисов.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С. Л. СОБОЛЕВА

Ереклинцев Антон Германович
Хабаровский институт инфокоммуникаций
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики

Ряд важных физических процессов может быть описан с помощью дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений с вырождением (особенностью, сингулярностью) эллиптического типа. Например, в теории рассеяния существует большая группа задач о вылете частиц из притягивающего центра или падении их на центр. Математические модели подобных задач описываются дифференциальным уравнением Шрёдингера, решением которого является волновая функция, бесконечно большая в начале координат. Указанное поведение решения обусловлено наличием особенности у потенциала, который можно рассматривать как часть исходных данных в математической постановке задачи. К упомянутой группе следует относить также и задачу о тормозном излучении электрона, вылетающего из ядра. В этой задаче решение имеет особенность $O\left(r^{-1/2}\right)$ (см., например, [1]).

В нелинейной оптике рассматривается задача о самофокусировке лазерного луча, суть которой состоит в том, что из-за свойств среды световой пучок собирается в точку; плотность энергии в этой точке обращается в бесконечность. Точное решение этой задачи не найдено и асимптотика поведения решения неизвестна (см. [2]).

Нахождение точного решения описанных выше задач и задач, им аналогичных, возможно лишь в небольшом числе частных случаев (см. [3], [4], [5]). В связи с этим актуальным является исследование таких задач в более общей постановке.

Одним из наиболее важных направлений в подобных исследованиях можно считать изучение свойств дифференциальных операторов, описывающих математическую модель. В работе [6] рассматривается первая краевая задача, которая задаётся линейным дифференциальным оператором второго порядка эллиптического типа. Изучим свойства этого оператора, в частности, покажем его ограниченность.

Введём ряд необходимых обозначений и предположений. Через R^2 обозначим двумерное евклидово пространство элементов $x=(x_1,x_2)$ с нормой $\|x\|^2=x_1^2+x_2^2$.

Пусть Ω - ограниченная область пространства R^2 с границей $\partial\Omega$ и замыканием $\overline{\Omega}$. Через $\partial\Omega^o$ обозначим множество, состоящее из n точек границы $\partial\Omega$: $\partial\Omega^O=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\partial\Omega^{(i)}$, $\partial\Omega^{(i)}\in\partial\Omega$. Будем предполагать, что граница $\partial\Omega$ кусочно-гладкая и $\partial\Omega\setminus\partial\Omega^o\in C^2$, а сама область Ω - выпуклая.

Пусть $\rho(x)$ - весовая функция, бесконечно дифференцируемая и положительная всюду, кроме точек множества $\partial\Omega^o$, и совпадающая в некоторой окрестности каждой точки $\partial\Omega^{(i)}$ $(i=\overline{1,n})$ с расстоянием до неё. Кроме того, пусть производные функции $\rho(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\frac{\partial^{|i|}\rho^{\gamma}(x)}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}\right|\le\delta'\rho^{\gamma-|i|}(x),$$

где $i=(i_1,i_2)$, $|i|=i_1+i_2$; γ, δ' – вещественные числа, $\delta'>1$.

Будем использовать следующие функциональные пространства:

$C^l\left(\overline{\Omega}\right)$ – банахово пространство функций, имеющих непрерывные в $\overline{\Omega}$ производные до порядка l включительно; норма имеет вид:

$$\|u(x)\|_{C^l\left(\overline{\Omega}\right)}=\max_{|\lambda|\le l}\ \max_{x\in\overline{\Omega}}\left|D^{\lambda}u(x)\right|,$$

где $D^{\lambda}=\dfrac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}$ – оператор дифференцирования, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$, $|\lambda|=\lambda_1+\lambda_2$.

Множество функций, принадлежащих всем пространствам $C^l\left(\overline{\Omega}\right)$ $(l=0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .)$, обозначим через $C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

$L_2(\Omega)$ – банахово пространство функций, квадрат модуля которых интегрируем по Ω; квадрат нормы имеет вид:

$$\|u(x)\|^2_{L_2(\Omega)}=\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2\,dx.$$

$H^k\left(\Omega\right)$ – банахово пространство функций, которые вместе со всеми обобщенными производными до порядка k включительно принадлежат $L_2(\Omega)$; квадраты нормы определяется равенством

$$\|u(x)\|^2_{H^k(\Omega)}=\sum_{|\lambda|\le k}\int\limits_{\Omega}\left|D^{\lambda}u(x)\right|^2dx,$$

При k=0 $H^o\left(\Omega\right)=L_2\left(\Omega\right)$.

$H^k_{2,\alpha}\left(\Omega\right)$ – весовое пространство С. Л. Соболева, которое при фиксированном $k\ge0$ является пополнением множества $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ по норме, квадрат которой имеет вид

$$\|u(x)\|^2_{H^k_{2,\alpha}(\Omega)}=\sum_{|\lambda|\le k}\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha+|\lambda|-k)}\left|D^{\lambda}u(x)\right|^2dx,$$

где α - вещественное число, $\alpha>-1$.

При k=0 $H^o_{2,\alpha}\left(\Omega\right)=L_{2,\alpha}\left(\Omega\right)$.

$H^k_{\infty,-\alpha}\left(\Omega,C\right)$ – множество функций удовлетворяющих неравенству

$$\max_{|\lambda|\le k}\ \max_{\forall x\in\Omega}\left|\rho^{-\alpha+|\lambda|}(x)D^{\lambda}u(x)\right|\le C,$$

где C - положительная постоянная, не зависящая от $u(x)$.

При k=0 обозначают $H^{o}_{\infty,-\alpha}(\Omega,C)=L_{\infty,-\alpha}(\Omega,C)$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L=-\sum_{l,s=1}^{2}a_{ls}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_s}+\sum_{l=1}^{2}a_l(x)\frac{\partial}{\partial x_l}+a(x), \tag{1}$$

в котором функции $a_{ls}(x)$ $(l,\ s=1,\ 2)$, $a_l(x)$ $(l=1,\ 2)$ и $a(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{12}(x)=a_{21}(x), \tag{2}$$

$$a_{ls}(x)\in H^{1}_{\infty,-\beta}(\Omega,C_1)\quad (l,s=1,\ 2), \tag{3}$$

$$a_l(x)\in L_{\infty,-(\beta-1)}(\Omega,C_2)\quad (l=1,\ 2), \tag{4}$$

$$a(x)\in L_{\infty,-(\beta-2)}(\Omega,C_3), \tag{5}$$

$$\sum_{l,s=1}^{2}a_{ls}(x)\xi_l\xi_s\ge C_4\rho^{\beta}(x)\sum_{l=1}^{2}\xi_l^2, \tag{6}$$

$$a(x)\ge C_5\rho^{\beta-2}(x)\quad \text{почти всюду на}\quad \Omega, \tag{7}$$

где C_i – положительные постоянные, не зависящие от x $(i=\overline{1,\ 5})$; ξ_1, ξ_2 - произвольные вещественные числа, одновременно не равные нулю; β - вещественное число.

Заметим, что условие (2) означает симметричность дифференциального оператора (1), а условие (6) - его эллиптичность.

Очевидным свойством дифференциального оператора (1) является линейность:

$$L\left(C_6\cdot u_1(x)+C_7\cdot u_2(x)\right)=C_6\cdot Lu_1(x)+C_7\cdot Lu_2(x), \tag{8}$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ – некоторые функции, C_6, C_7 – постоянные.

Пусть дифференциальный оператор (1) действует на функцию $\mathrm{v}(x)$, принадлежащую весовому пространству С.Л. Соболева $H^2_{2,R+\beta/2}$ (Ω). Будем предполагать, что число R удовлетворяет условию $R+\beta/2>2$.

Образом этого оператора будет функция $L\mathrm{v}(x)$, принадлежащая весовому пространству $L_{2,R-\beta/2}(\Omega)$. Кроме того, дифференциальный оператор (1), действующий из $H^2_{2,R+\beta/2}$ (Ω) в $L_{2,R-\beta/2}(\Omega)$ является ограниченным.

Покажем справедливость этих утверждений, для чего установим оценку вида

$$\|L\mathrm{v}(x)\|_{L_{2,R-\beta/2}(\Omega)}\le C_8\|\mathrm{v}(x)\|_{H^2_{2,R+\beta/2}(\Omega)} \tag{9}$$

с положительной постоянной C_8, не зависящей от функции $\mathrm{v}(x)$.

Рассмотрим норму функции $L\mathrm{v}(x)$ в пространстве $L_{2,R-\beta/2}(\Omega)$:

$$\|L\mathrm{v}(x)\|_{L_{2,R-\beta/2}(\Omega)}=\left\|-\sum_{l,s=1}^{2}a_{ls}(x)\frac{\partial^2\mathrm{v}(x)}{\partial x_l\partial x_s}+\sum_{l=1}^{2}a_l(x)\frac{\partial\mathrm{v}(x)}{\partial x_l}+a(x)\mathrm{v}(x)\right\|_{L_{2,R-\beta/2}(\Omega)}$$

Пользуясь аксиомами нормы, запишем неравенство:

$$\|L\mathrm{v}(x)\|_{L_{2,R-\beta/2}(\Omega)}\le\le\sum_{l,s=1}^{2}\left\|a_{ls}(x)\frac{\partial^2\mathrm{v}(x)}{\partial x_l\partial x_s}\right\|_{L_{2,R-\beta/2}(\Omega)}+\sum_{l=1}^{2}\left\|a_l(x)\frac{\partial\mathrm{v}(x)}{\partial x_l}\right\|_{L_{2,R-\beta/2}(\Omega)}+\|a(x)\mathrm{v}(x)\|_{L_{2,R-\beta/2}(\Omega)}. \tag{10}$$

Применим к нормам в первой группе слагаемых правой части неравенства (10) условие (3), а также определение нормы пространства $L_{2,R-\beta/2}(\Omega)$, в результате чего получим оценку

$$\left\|a_{ls}(x)\frac{\partial^2\mathrm{v}(x)}{\partial x_l\partial x_s}\right\|_{L_{2,R-\beta/2}(\Omega)}\le C_9\|\mathrm{v}(x)\|_{H^2_{2,R+\beta/2}(\Omega)} \tag{11}$$

с положительной постоянной C_9, не зависящей от функции $\mathrm{v}(x)$.

Аналогично, применяя ко второй группе слагаемых и к третьему слагаемому правой части неравенства (10) условия (4) и (5) соответственно, а также определение нормы в $L_{2,R-\beta/2}(\Omega)$, получим:

$$\left\|a_l(x)\frac{\partial\mathrm{v}(x)}{\partial x_l}\right\|_{L_{2,R-\beta/2}(\Omega)}\le C_{10}\|\mathrm{v}(x)\|_{H^1_{2,R+\beta/2-1}(\Omega)}, \tag{12}$$

$$\|a(x)\mathrm{v}(x)\|_{L_{2,R-\beta/2}(\Omega)} \le C_{11}\|\mathrm{v}(x)\|_{L_{2,R-\beta/2-2}(\Omega)}, \tag{13}$$

где C_{10}, C_{11} – положительные постоянные, не зависящие от функции $\mathrm{v}(x)$.

Из определения пространств $L_{2,R-\beta/2-2}(\Omega)$, $H^1_{2,R+\beta/2-1}(\Omega)$, $H^2_{2,R+\beta/2}(\Omega)$, а также способа задания норм в этих пространствах следуют неравенства

$$\|\circ\|_{L_{2,R+\beta/2-2}(\Omega)} \le \|\circ\|_{H^1_{2,R+\beta/2-1}(\Omega)} \le \|\circ\|_{H^2_{2,R+\beta/2}(\Omega)},$$

применяя которые к (12) и (13), получим оценки:

$$\left\|a_l(x)\frac{\partial \mathrm{v}(x)}{\partial x_l}\right\|_{L_{2,R-\beta/2}(\Omega)} \le C_{10}\|\mathrm{v}(x)\|_{H^2_{2,R+\beta/2}(\Omega)}, \tag{14}$$

$$\|a(x)\mathrm{v}(x)\|_{L_{2,R-\beta/2}(\Omega)} \le C_{11}\|\mathrm{v}(x)\|_{H^2_{2,R+\beta/2}(\Omega)}. \tag{15}$$

Из неравенства (10), оценок (11), (14), (15) следует доказываемая оценка (8), в которой постоянная $C_8 = C_9 + C_{10} + C_{11}$, очевидно, не зависит от функции $\mathrm{v}(x)$.

Список использованной литературы

1. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 752 с.
2. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.
3. **Крылов В. И.** К вопросу о сечении ионизации водородоподобного атома быстрыми электронами в однородном электрическом поле // Краткие сообщение ФИАН. 1995. Вып. 8.
4. **Цикон Х., Фрёзе Р., Кирш В., Саймон Б.** Операторы Шрёдингера с приложением к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990. 408 с.
5. **Sturm K.-T.** Schrödinger operators with highly singular, oscilating potentials // Manuscripta Math. 1992. V. 76. № 3-4.
6. **Ереклинцев А. Г., Рукавишников В. А.** О коэрцитивности R_ν – обобщённого решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 12.

АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ В *MES*-СИСТЕМЕ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Киселев Анатолий Георгиевич
ОАО «Искитимцемент»
Новосибирский государственный технический университет

ВВЕДЕНИЕ. В ранее представленных работах *автора* описаны внедренные частные MES- системы на предприятии цементной промышленности. Приведем их краткие аннотации.

1 - Расход электроэнергии. Датчики и низкоуровневая SCADA- система; с записью результатов измерения в базу данных (БД) SCADA → копирование («перекрываемость») → БД MES → «клиентское приложение» (АРМ/ MES). Потребленная электроэнергия за предыдущий «квант» измерения (3 мин./30 мин.); реальное время, аналитика, статистика за 1 год, кВт/ час.

2 - Расход газа. SCADA; БД SCADA → БД MES → «АРМ/ MES». Измерения в конце «кванта» 1 час, суток и месяца. Потребленный газ за предыдущий квант измерения; реальное время, аналитика, статистика за 1 год, куб. м, т.

3 - Расход сжатого воздуха. Аналогично измерению расхода газа.

4 - Объемы в шламбассейнах (сырье). БД SCADA → БД MES → «АРМ/ MES». Измерения 1 раз в минуту. В MES - пересчет на кванты: 1 мин., 3 мин., 30 мин., 1 час, 3 часа, 24 часа. Реальное время: текущие объемы (Δ=1 мин.), аналитика, статистика за 1 год, куб. м.

5 - Объемы в силосах готовой продукции (цемент). Аналогично измерению уровней (объемов) в шламбассейнах, но с упрощенной аналитикой.

6 - Температура поверхности печей (обжиг). БД SCADA → БД MES → «АРМ/ MES». Усредненная температура растровой развертки поверхности печи за 10 предыдущих кадров сканера - «тепловизора», что составляет квант ≈ 36-37 мин. Реальное время: t°C в каждой точке (Δ=36 мин.), аналитика (2D, 2.5D, 3D), статистика за 1 год, t°C.

7 - Суточный рапорт (производство). «Первичный учет в производстве»: отчеты за смену (выполнение плана). План / факт по контрагентов/ видам отгрузок цемента.

8 - Цеховые журналы (производственные процессы). «Первичный учет в производстве»: отчеты за смену (технологические). Исходное состояние смены, режимы работы и технологии, затраты ТМЦ и ресурсов, полученный результат.

Сводный интерфейс «АРМ- технолога» содержит кнопки меню, вызывающие частные MES- системы (Рисунок 1). Разработаем концепцию построения системы анализа многомерных данных (квази OLAP/ BPM) в MES- системе промышленного предприятия: «комплексная MES- аналитика» (см. Рисунок 1, Кнопка 11).