СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОЛОГИИ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Сойкин Борис Михайлович
Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д. Ф. Устинова

На современном этапе развития науки и техники особо важное значение приобретают проблемы создания и развития новых информационных технологий. Это в равной мере относится и к математике и прикладным техническим наукам. К числу наиболее важных, сложных и актуальных проблем современности следует отнести проблему совершенствования методологии решения научно-практических задач, связанных с интегрированием сложных дифференциальных уравнений с частными производными четвертого и восьмого порядков.

Эти уравнения или их системы встречаются в самых различных областях человеческих знаний: чистой и прикладной математике, физике, механике деформируемого твердого тела, технологии машиностроения, электротехнике, информационных системах и др.

Большое распространение дифференциальные уравнения высших порядков получают в расчетной практике при создании высокоэффективных крупномасштабных образцов современной техники и технологии.

С теоретической точки зрения наиболее сложным объектом для изучения поведения машиностроительных конструкций является тонкостенная упруго деформируемая пластина и цилиндрическая оболочка, содержащая, как известно, наибольшее количество характерных свойств изделий произвольного типа и наиболее характерным конструктивным типом с точки зрения практического применения. Напряженно-деформированное состояние пластины или оболочки, находящейся под воздействием нормальных сосредоточенных и локально распределенных нагрузок описываются дифференциальными уравнениями в частных производных четвертого или восьмого порядков.

Современная методика решения этих уравнений основана в основном на численных (весьма приближенных) методах нахождения целевых функций (перемещений или напряжений).

Целью настоящей работы является обобщение результатов многолетних (с 1965 г.) исследований, касающихся вопросов создания методологии аналитического решения научно-практических задач, основанных на интегрировании сложных дифференциальных уравнений четвертого и восьмого порядков. В общем виде задача состоит в нахождении аналитического решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным граничным условиям двух независимых переменных.

Основы теории деформируемого твердого тела были разработаны Навье (1821), Коши (1822), Пуассоном (1829).

Современная классическая теория пластин и оболочек создана трудами С. П. Тимошенко, Л. Г. Доннеллом и др. Большое теоретическое и практическое значение по-прежнему занимают проблемы определения напряженно-деформированного состояния упруго деформируемых механических систем, поведение которых описывается физической моделью линейно-упругого тела.

Главное внимание в данной статье уделено проблемам расчета и проектирования тонкостенных элементов в виде пластин и оболочек, выполненных из изотропных и анизотропных материалов.

Предлагаемую методологию целесообразно иллюстрировать на примерах решения классических уравнений Доннелла [Доннелл, 1982] и С. П. Тимошенко [Тимошенко, 1966].

В основу предлагаемой методологии автором работы положены принципы системного анализа, содержащие совокупность методов и средств, используемых при исследовании и конструировании сложных и сверх сложных объектов, прежде всего методов выработки, принятия и обоснования решений при создании, проектировании и управлении технико-технологическими системами.

В работах С. П. Тимошенко рассматриваются лишь частные наиболее простые случаи решения прикладных двумерных задач механики тонкостенных пластин, описываемых дифференциальными уравнениями четвертого порядка. Решения для круговых цилиндрических оболочек, с уравнениями восьмого порядка даются в разомкнутом виде и предполагают численное суммирование двойных тригонометрических рядов. Для достижения достаточно достоверных результатов приходится удерживать миллионы членов двойного тригонометрического ряда, что требует значительных затрат (до 40 и более часов) машинного времени компьютера, IBM с 286 процессором, а это существенно усложняет задачу научно-технической подготовки современного производства. В связи с этим актуальной становится проблема разработки и совершенствования экономически эффективных методов исследования математических, конструкторских и технологических систем.

В качестве примера обратимся к рассмотрению общих вопросов методологии решения важнейших научно-практических задач, связанных изучением напряженно-деформированного состояния упруго деформируемых систем (пластин и оболочек), описываемых дифференциальными уравнениями четвертого и восьмого порядков с переменными коэффициентами. При построении физической и математической модели будем исходить из допущений общей теории пластин и оболочек [Тимошенко, 1966, с. 11-17, 558-565]. Предполагается, что физическая модель твердого тела имеет следующие свойства: сплошность, идеальную упругость, линейность зависимости между напряжениями и деформациями, малости перемещений и др. Следуя этим постулатам классической теории пластин и оболочек, за обобщенную математическую модель упруго деформируемой системы примем дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial^{(i+j)} F}{\partial x^i \partial x^j} = V(x, y), \qquad (1)$$

где $a_{i,j}$ - переменные коэффициенты, зависящие от геометрических размеров и физико-механических свойств материала пластины или оболочки;

F - искомая функция в виде напряжений или перемещений;

$V(x, y)$ - функция внешних объемных сил, действующих на пластину или оболочку;

x, y - координаты исследуемой точки;

i, j - натуральные числа.

Для круговых цилиндрических оболочек данное уравнение имеет восьмой порядок, т.е. $i + j = 8$, для пластин четвертый порядок, т.е. $i + j = 4$.

Для круговых цилиндрических оболочек, выполненных из ортотропного материала (стеклопластика) дифференциальное уравнение (1) в развернутом виде имеет более сложную структуру.

$$\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^2 \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + 4\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^8 w}{R^2 \partial x^6 \partial \phi^2} + 6\frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^8 w}{R^4 \partial x^4 \partial \phi^4} + 4\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^8 w}{R^6 \partial x^2 \partial \phi^6} + \frac{\partial^8 w}{R^8 \partial \phi^8}$$
$$+\frac{K}{D_2}\left(\frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^4 w}{\partial \phi^2 \partial x^2 R^2} + \frac{\partial^4 w}{R^4 \partial \phi^4}\right) + \frac{12\left(1-\nu_1\nu_2\right)}{R^2 h^2}\frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \qquad (2)$$
$$\frac{1}{D_2}\left(\frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^4 q}{\partial x^4} + 2\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^4 q}{R^2 \partial x^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^4 q}{R^4 \partial \phi^4}\right),$$

где x, ϕ - осевая и окружная координаты исследуемой точки срединной поверхности цилиндрической оболочки;

w - компонента перемещения исследуемой точки в радиальном направлении;

E_1, E_2, ν_1, ν_2 - модули нормальной упругости и коэффициенты Пуассона материала оболочки в направлении соответствующих осей;

D_1, D_2 - цилиндрические жесткости оболочки при изгибе в осевом и окружном направлениях;

q - интенсивность нормальной внешней нагрузки;

K - модуль упругого основания (коэффициент постели) заполнителя.

Для круговых цилиндрических оболочек из изотропного материала уравнение (2) приобретает более простую форму [Доннелл, 1982, с. 461].

Интегрирование дифференциальных уравнений (1), (2) будем осуществлять методом двойных тригонометрических рядов, автоматически удовлетворяющих заданным граничным условиям и условиям периодичности [Тимошенко, 1966, с. 128-129].

Развивая этот метод и принцип системного подхода, процесс решения прикладных задач путем интегрирования уравнений высших порядков может быть представлен в виде ряда последовательно выполняемых этапов:

Этап 1. Построение физической и математической модели исследуемой или искусственно создаваемой системы и описание её функционирования в виде дифференциальных уравнений четвертого или восьмого порядков в частных производных с переменными коэффициентами.

Этап 2. Представление целевых функций (перемещений или напряжений) в виде бесконечных двойных тригонометрических рядов.

Этап 3. Подстановка целевых функций в исходное или исходные уравнения и получение искомых результатов в виде двойных тригонометрических рядов.

Этап 4. Вычисление или аналитическое определение бесконечных сумм двойных тригонометрических рядов, содержащихся в целевых функциях.

Этап 5. Анализ и оценка точности конечных результатов исследований и сравнение их с другими данными, полученными средствами вычислительной математики или в ходе экспериментальных исследований. Составление выводов и рекомендаций.

Из перечисленных, наибольший интерес представляет четвертый этап, т.е. разработка методологии экономически эффективного аналитического метода суммирования бесконечных тригонометрических рядов и получение искомых результатов в виде конечных формул, содержащих хорошо изученные алгебраические и тригонометрические функции.

С целью упрощения процесса суммирования двойных тригонометрических рядов, содержащих сложные алгебраические функции, автором разработана система разложений алгебраических дробей на ряд более простых дробей, имеющих более низкий порядок степенных функций.

Ниже приводятся Таблицы 1, 2 разложений наиболее важных в практическом отношении функций четвертого и восьмого порядков.

Табл. 1. *Разложения некоторых дробей с исходными выражениями четвертого порядка*

$$\frac{1}{x^4+2cx^2+d}=\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{1}{x^2+c-\Delta}-\frac{1}{x^2+c+\Delta}\right), \tag{3}$$

где $\Delta=\sqrt{c^2-d}$

$$\frac{x}{x^4+2cx^2+d^4}=\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{1}{x^2-\Delta x+d^2}-\frac{1}{x^2+\Delta x+d^2}\right), \tag{4}$$

где $\Delta=\sqrt{2\left(d^2-c\right)}$; $d^2>c$.

$$\frac{4x}{x^4+4c^2x^2+4d^4}=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{\left(x-\Delta\right)^2+\Delta_2}-\frac{1}{\left(x+\Delta\right)^2+\Delta_2}\right), \tag{5}$$

где $\Delta=\sqrt{d^2-c^2}$, $\Delta_2=d^2+c^2$

$$\frac{x^2}{x^4+2cx^2+d}=\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\Delta-c}{x^2+c-\Delta}+\frac{\Delta+c}{x^2+c+\Delta}\right), \tag{6}$$

где $\Delta=\sqrt{c^2-d}$

$$\frac{4x}{x^4+4d^4}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{\left(x-d\right)^2+d^2}-\frac{1}{\left(x+d\right)^2+d^2}\right) \tag{7}$$

$$\frac{x}{x^4+c^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}c}\left(\frac{1}{\left(x-\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{c^2}{2}}-\frac{1}{\left(x+\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{c^2}{2}}\right) \tag{8}$$

$$\frac{4x}{x^4+4}=\frac{1}{\left(x-1\right)^2+1}-\frac{1}{\left(x+1\right)^2+1} \tag{9}$$

Табл. 2. *Разложения некоторых дробей со знаменателем в виде многочлена восьмого порядка*

$$\frac{1}{x^8+2cx^4+d}=\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{1}{x^4+c-\Delta}-\frac{1}{x^4+c+\Delta}\right), \tag{10}$$

где $\Delta=\sqrt{c^2-d}$

$$\frac{x^2}{x^8+4c^2x^4+4d^4}=\frac{1}{4\Delta}\left(\frac{1}{\left(x^2-\Delta\right)^2+\Delta_1}-\frac{1}{\left(x^2+\Delta\right)^2+\Delta_1}\right), \tag{11}$$

где $\Delta=\sqrt{d^2-c^2}$, $\Delta_1=c^2+d^2$

$$\frac{x^4}{x^8+2cx^4+d}=\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\Delta-c}{x^4+c-\Delta}+\frac{\Delta+c}{x^4+c+\Delta}\right), \tag{12}$$

Где $\Delta=\sqrt{c^2-d}$

$$\frac{x^2}{x^8+a^2x^4+a^4}=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{x^4-ax^2+a^2}-\frac{1}{x^4+ax^2+a^2}\right\} \tag{13}$$

$$\frac{x^2}{x^8+2cx^4+d^4}=\frac{1}{2\Delta}\left|\frac{1}{\left(x^2-\frac{\Delta}{2}\right)^2+\Delta_1}-\frac{1}{\left(x^2+\frac{\Delta}{2}\right)^2+\Delta_1}\right\}; \tag{14}$$

где $\Delta = \sqrt{2\left(d^2 - c\right)}$; $\Delta_1 = \dfrac{d^2 + c}{2}$

$$\frac{x^2}{x^8 + 4d^4} = \frac{1}{4d}\left(\frac{1}{\left(x^2 - d\right)^2 + d^2} - \frac{1}{\left(x^2 + d\right)^2 + d^2}\right) \tag{15}$$

$$\frac{\left(a^2 + x^2\right)^2}{\left(a^2 + x^2\right)^4 + 2c\left(a^2 + x^2\right)^2 + d^2} = \frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\Delta - c}{\left(a^2 + x^2\right)^2 + c - \Delta} + \frac{\Delta + c}{\left(a^2 + x^2\right)^2 + c + \Delta}\right) \tag{16}$$

где $\Delta = \sqrt{c^2 - d}$

$$\frac{1}{x^8 + 2cx^4} = \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^4 + 2c}\right) \tag{17}$$

Для приближенных вычислений бесконечных рядов с трансцендентными функциями целесообразно использовать приближенную формулу

$$\sqrt{1 + x^4}\left\{\sqrt{\sqrt{1 + x^4} + x^2}\right\} = \left\{1 + \frac{x^2}{2}\right\}^2 \tag{18}$$

где $x \ll 1$

Разложение алгебраических дробей и понижение их на 2-4 порядка позволяет упростить исходные функции, стоящие под знаком двойной суммы. Применяя затем известную операцию замены суммирования на интегрирование по двум независимым переменным [Тимошенко, 1966, с. 130-133], получаем конечные значения искомых функций (например, прогибов или напряжений) в тонкостенном элементе.

Для некоторых частных задач механики тонкостенных пластин и оболочек получены конечные математические формулы (Табл. 3), удовлетворительная точность которых была подтверждена расчетами на ЭВМ, а некоторые наиболее важные из них проверены с помощью экспериментов [Сойкин, 2004, с. 2-6]; [Сойкин и др., 2004, с. 7-13].

В цитируемых работах содержатся все этапы рекомендуемой выше методологии исследований, соответствующей принципам системного подхода.

Табл. 3. *Важнейшие суммы двойных рядов, содержащих тригонометрические и алгебраические функции*

$$\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=0,1,2,..}^{\infty} \frac{m^2 \cos m\pi x}{\left(A^2 m^2 + n^2\right)^2 + B^4} = \frac{\pi^2}{4A}\left(1 - \sqrt{2}Bx\right)e^{-\sqrt{2}Bx} \tag{19}$$

$$\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=0,1,2,..}^{\infty} \frac{\cos m\pi x}{\left(A^2 m^2 + n^2\right)^2 + B^4} = \frac{\pi^2}{8AB^2}\left(1 + \sqrt{2}Bx\right)e^{-\sqrt{2}Bx} \tag{20}$$

$$\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=0,1,2..}^{\infty} \frac{m^2\left(\sqrt{A}m^2 + n^2\right)^2 \sin m\pi x_0 \sin m\pi x}{\left(\sqrt{A}m^2 + n^2\right)^4 + ABm^4} = \frac{0,01819}{\left(AB\right)^{\frac{3}{8}}}\left(\left(x_0 - x\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(x_0 + x\right)^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{21}$$

$$\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=0,1.2..}^{\infty} \frac{n^2\left(\sqrt{A}m^2 + n^2\right)^2 \sin m\pi x_0 \cdot \sin m\pi x}{\left(\sqrt{A}m^2 + n^2\right)^4 + ABm^4} = \frac{0,7256}{\left(AB\right)^{\frac{1}{8}}}\left(\left(x_0 - x\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(x_0 + x\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{22}$$

$$\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=0,1,2,..}^{\infty} \frac{m^2\left(\sqrt{A}m^2 + n^2\right)^2 \cos m\pi x}{\left(\sqrt{A}m^2 + n^2\right)^4 + ABm^4} = \frac{0,04782}{\left(AB\right)^{\frac{3}{8}}} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \tag{23}$$

$$\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=0,1,2,..}^{\infty} \frac{n^2\left(\sqrt{A}m^2 + n^2\right)^2 \cos m\pi x}{\left(\sqrt{A}m^2 + n^2\right)^4 + ABm^4} = \frac{0,7256}{\left(AB\right)^{\frac{1}{8}}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \tag{24}$$

$$\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=0,1,2,.}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{A}m^2 + n^2\right)^2 \sin m\pi x_0 \sin m\pi x}{\left(\sqrt{A}m^2 + n^2\right)^4 + ABm^4} = \frac{0,71826}{\left(AB\right)^{\frac{3}{8}}}\left(\left(x_0 + x\right)^{\frac{1}{2}} - \left(x_0 - x\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{25}$$

$$\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=0,1,2,.}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{A}m^2 + n^2\right)^2}{\left(\sqrt{A}m^2 + n^2\right)^4 + ABm^4} = \frac{0,71826}{\left(AB\right)^{\frac{3}{8}}} \tag{26}$$

$$\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=0,1,2,..}^{\infty}\frac{1}{\left(A^2m^2+n^2\right)^2+B}=\frac{0,71826}{A\sqrt{B}} \quad (27)$$

$$\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=0,1,..}^{\infty}\frac{\left(A^2m^2+n^2\right)^2}{\left(A^2m^2+n^2\right)^4+\left(A^2m^2+n^2\right)^2B+A^4Cm^4}=\frac{\pi^2}{16A\sqrt{B+AC^{\frac{3}{4}}}} \quad (28)$$

Приведенные в Табл. 1, 2, 3 данные были использованы для получения аналитических формул, обеспечивающих быстрое определение прогибов и напряжений в поперечнонагруженной цилиндрической оболочке из ортотропного материала [Сойкин, 2004. с. 2-6]. Экспериментальные исследования подтвердили точность выполненных аналитических решений [Сойкин и др., 2004, с. 7-13].

Разработанная методология была использована для решения ряда практических задач, встречающихся в технологии машиностроения.

Выводы

1. Установлена реальная возможность и целесообразность аналитического решения дифференциальных уравнений четвертого и восьмого порядков в частных производных с переменными коэффициентами.
2. Разработана методология аналитического решения прикладных математических задач из области механики упруго деформируемого тела (пластин и оболочек).
3. Получены конечные математические формулы (Табл. 1-3), упрощающие процесс суммирования двойных тригонометрических рядов, содержащих алгебраические функции четвертого и восьмого порядков.
4. Достоверность и удовлетворительная точность вычислений по выведенным формулам подтверждена данными числовых и экспериментальных исследований [Сойкин и др., 2004, с. 7-13].

Заключение

Данные, приведенные в работе (Табл. 1-3) являются весомым дополнением к существующей справочно-технической литературе, которая используется в расчетах и проектировании современных образцов новой техники и технологии [Градштейн, Рыжик, 1971].

Общие вопросы из теории разложения алгебраических функций могут быть полезны для математиков-прикладников, вычислителей, механиков, инженеров-конструкторов, технологов, аспирантов и студентов вузов. Некоторые формулы из Табл. 1, 2 могут быть рекомендованы в качестве учебного материала для абитуриентов, практикующихся в задачах по теме: «Упростить выражение».

Разработанная автором методология аналитического решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела проста и эффективна в статической постановке. Для решения более сложных задач динамики твердого тела потребуются еще более громоздкие математические выкладки, выходящие за рамки настоящей работы.

Список использованной литературы

1. **Вычислительные методы в механике разрушения /** под ред. С. Атлури; пер. с англ. А. С. Кравчука и Е. Г. Кузовкова. М.: Мир, 1990.392 с.
2. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
3. **Доннелл Л. Г.** Балки, пластины и оболочки / пер. с англ.; под ред. Э. И. Григолюка. М.: Наука; Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 568 с.
4. **Корн Т., Корн Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
5. **Сойкин Б. М.** Актуальные проблемы механической обработки тонкостенных цилиндрических оболочек, выполненных из ортотропных материалов // Металлообработка. СПб.: Политехника, 2004. № 3 (21). С. 2-6.
6. **Сойкин Б. М. и др.** Влияние упругих деформаций тонкостенных цилиндрических оболочек из ортотропных материалов на точность и производительность механической обработки // Там же. № 5 (23). С. 7-13.
7. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер.** Пластинки и оболочки / пер. с англ.; под ред. Г. С. Шапиро. М.: Наука; Главная редакция физико-математической литературы, 1966. 636 с.

СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЁННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Трофимова Наталья Федоровна
Сибирский федеральный университет

Сравниваются в двумерном случае результаты применения двух кубатурных формул: решетчатые кубатурные формулы ранга 1 с тригонометрическим d-свойством и весовых кубатурных формул в периодическом случае.

1. Введение и предварительные сведения

При приближенном вычислении интегралов возникает вопрос об оценке качества кубатурных формул. Под кубатурной формулой обычно понимают приближённое равенство вида

$$\int_{\Omega} f(x)w(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j f\left(x^{(j)}\right),$$