Табл. 2. *Формула (3),* $w(x) = w_1(x)$

		число слагаемых	погрешность
0,5	51	5408	10^{-13}
0,4	51	5408	10^{-13}
0,3	51	5408	10^{-13}
0,2	81	13448	10^{-13}

Табл. 3. *Формула (4),* $w(x) = w_2(x)$

		число слагаемых	погрешность
0,5	6	28561	10^{-13}
0,4	6	28561	10^{-13}
0,3	6	28561	10^{-13}
0,2	6	28561	10^{-13}

Табл. 4. *Формула (3),* $w(x) = w_2(x)$

		число слагаемых	погрешность
0,5	49	5000	10^{-13}
0,4	49	5000	10^{-13}
0,3	85	14792	10^{-13}
0,2	187	70688	10^{-13}

Список использованной литературы

1. **Осипов Н. Н.** О минимальных кубатурных формулах с тригонометрическим d -свойством в двумерном случае // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. № 1. Т. 45. С. 8-16.
2. **Половинкин В. И.** Весовые кубатурные формулы в периодическом случае // Матем. заметки. 1968. № 3. Т.3. С. 319-326.
3. **Соболев С. Л., Васкевич В. Л.** Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. 484 с.

ПОИСК АЛЬТЕРНАТИВНЫХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ СТОКСА

Устинова Людмила Геннадьевна
Филиал ГОУ ВПО «Московский энергетический институт» в г. Волжском

В настоящее время в вычислительной гидродинамике существует большое количество программных продуктов, которые в качестве модели жидкости используют различные дискретные аналоги уравнений переноса вещества, энергии, импульса. Сама модель представляет собой сеточное (разностное) приближение соответствующих дифференциальных уравнений. При этом, конечно, точность подобного приближения тем больше, чем больше количество клеток.

Чтобы замкнуть систему уравнений для всех сеточных объемов, необходимо добавить значения вектора напряжения и теплового потока на стенке, выраженные через соответствующие значения сеточных функций. Причем, во многом эффективность полученной системы определяется именно тем, как этот метод замыкания был применен.

В данной статье идет речь о поиске подсеточной модели пристеночного слоя в неньютоновских средах. Использование этой модели представляет собой альтернативу методу пристеночных функций. Последний основан на допущении, что вектор касательных напряжений $\vec{\tau}$ не зависит от расстояния до стенки.

Отказ от подобного допущения и использование более реалистичных зависимостей $\vec{\tau}(y)$ представляют собой основу метода пристеночных и пограничных слоев, у которых область применения существенно шире, чем у метода пристеночных функций. Практическая реализация всех разработанных моделей сводится к численному решению систем нелинейных уравнений. В качестве коэффициентов в них используются определенные интегралы, значения которых не представляется возможным вычислить аналитически - допустимы только численные методы. Этот подход и называется подсеточным разрешением.

Модели пристеночного слоя (неньютоновская жидкость)

Неньютоновская жидкость - это среда, в которой сдвиговые напряжения нелинейно зависят от скорости сдвиговой деформации. Отношение сдвигового напряжения к скорости сдвига будем называть сдвиговой вязкостью (обозначается μ).

Обычно, для определения вязкости используется степенной закон вида:

$$\mu(\dot{\gamma}) = K\left|\dot{\gamma}\right|^{n-1},$$

где K - константа модели вязкости.

При этом на μ можно наложить ограничения типа максимального и минимального значений. Далее, нижними индексами e и w обозначаем значения величин при значениях координаты $y=\delta$ и $y=0$.

Условие прилипания жидкости к стенке реализуется тогда, когда напряжения сдвига не больше некоторого предельного значения τ_s. При превышении этого предельного напряжения на стенке начинается проскальзывание, описываемое законом вида:

$$u_w(\tau_w) = sign(\tau_w)\cdot\begin{cases} 0 & |\tau_w| \le \tau_s \\ C_s\left(|\tau_w| - \tau_s\right)^{n_s} & |\tau_w| > \tau_s \end{cases}.$$

При протекании густых жидкостей через всякого рода фильтрующие системы скорости течений очень малы, следовательно, малы и силы инерции, а это значит, что можно пренебречь конвективными потоками. Тогда упрощенные уравнения переноса импульса и энергии выглядят так:

$\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial \tau}{\partial y} + pG$ - уравнение переноса импульса,

$\dfrac{\partial q}{\partial y} = \tau\dfrac{\partial u}{\partial y}$ - уравнение переноса энергии.

Иногда их также называют уравнениями Стокса. Они замыкаются с помощью соотношений $\tau = \mu\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $u_w = u_s(\tau_w)$ (полагается, что $\tau(\dot{\gamma})$ не имеет разрывов), $q = -\lambda(T)\dfrac{\partial T}{\partial y}$ (поток тепла).

В качестве граничных условий можно использовать заданную температуру на стенке $u(\delta)=u_e$, $T(\delta)=T_e$, $T(0)=T_w$ или тепловой поток $u(\delta)=u_e$, $T(\delta)=T_e$, $q(0)=q_w$.

Нашей задачей является решение уравнений Стокса, причем уравнения переноса импульса и энергии можно решать независимо друг от друга.

Решение уравнения переноса импульса

Обозначим

$$g = \frac{\partial p}{\partial x} - pG = const \tag{1}$$

Заметим сразу, что в случае если $\tau(\dot{\gamma})$ является разрывной (а такое встречается в модели «с пределом текучести» $\mu(\dot{\gamma}) = K\left|\dot{\gamma}\right|^{n-1} + \dfrac{\tau_0}{|\dot{\gamma}|}$) проводимые далее вычисления не срабатывают.

В областях непрерывности этой функции, очевидно, верно $\tau(\dot{\gamma}) \equiv \dot{\gamma}\,\mu(\dot{\gamma})$.

Интегрируя (1), имеем $\tau = \tau_w + gy$, и если подставить $y=\delta$, то получим связь напряжений на внешней границе и стенке $\tau_e - \tau_w = g\delta$.

Тогда скорость на внешней границе выражается следующим образом:

$$u_e - u_w = \int_w^e \dot{\gamma}dy = \frac{1}{g}\int_w^e \dot{\gamma}d\tau = \frac{1}{g}\dot{\gamma}\,\tau\Big|_w^e - \frac{1}{g}\int_w^e \tau d\dot{\gamma} = \frac{1}{g}\left(I_e - I_w\right).$$

Обозначено $I = \dot{\gamma}\tau - \int \tau d\dot{\gamma}$, $I\big|_{\dot{\gamma}=0} = 0$.

То есть, для определения пары переменных $\{\tau_w, \tau_e\}$ мы получим систему:

$$\tau_e - \tau_w = g\delta,$$

$$I_e - I_w = g\left(u_e - u_s(\tau_w)\right).$$

Если использовать функцию, обратную к $\tau(\dot{\gamma})$, то вместо системы можно получить одно уравнение, для решения которого необходимо найти корень следующей функции:

$$f(\tau_w) = I\left(\dot{\gamma}(g\delta + \tau_w)\right) - I\left(\dot{\gamma}(\tau_w)\right) - g\left(u_e - u_s(\tau_w)\right).$$

Уравнение разумно искать методом Ньютона, предварительно ограничив его расположение двумя «угловыми» точками.

Решение уравнения переноса энергии

Положим $\theta = \int_{T_w}^{T} \lambda dT$. Тогда справедливо следующее уравнение в частных производных: $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \lambda \frac{\partial T}{\partial y}$. При этом второе уравнение Стокса будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \tau \dot{\gamma} = 0.$$

Воспользуемся тем, что $g\int \tau \dot{\gamma} dy = \int \tau \dot{\gamma} d\tau = \int \frac{\dot{\gamma}}{2} d\tau^2 = \frac{1}{2}\dot{\gamma}\tau^2 - \frac{1}{2}\int \tau^2 d\dot{\gamma}$. Тогда можно ввести функцию $J = \frac{1}{2}\tau^2\dot{\gamma} - \frac{1}{2}\int \tau^2 d\dot{\gamma}$, $J\big|_{\dot{\gamma}=0} = 0$. С использованием этой функции, первый интеграл уравнения переноса энергии примет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = -q_w - \frac{1}{g}\left(J - J_w\right) \quad (2)$$

причем, подставляя значения на внешней границе, получим:

$$J_e - J_w = g\left(q_e - q_w\right).$$

Вычислим $L' = g\int J dy$, применяя интегрирование по частям:

$$2g\int J dy = g\int \tau^2 \dot{\gamma} dy - g\iint \tau^2 d\dot{\gamma} dy = \int \tau^2 \dot{\gamma} d\tau - \int \left(\int \tau^2 d\dot{\gamma}\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{3}\int \dot{\gamma} d\tau^3 - \tau\int \tau^2 d\dot{\gamma} + \int \tau^3 d\dot{\gamma} = \frac{1}{3}\tau^3\dot{\gamma} + \frac{2}{3}\int \tau^3 d\dot{\gamma} - \tau\int \tau^2 d\dot{\gamma}.$$

Если проинтегрировать (2) ,то получим

$$\theta_e - \theta_w = C\delta - \frac{1}{g^2}\left(L'_e - L'_w\right) \quad (3)$$

где константа равна $C = -q_w + \frac{1}{g}J_w = -q_e + \frac{1}{g}J_e$. Тогда

$$g^2 C\delta = gC\left(\tau_e - \tau_w\right) = \left(J_e - gq_e\right)\tau_e - \left(J_w - gq_w\right)\tau_w$$

есть преобразованное уравнение (3).

Если переобозначить $L = J\tau - L'$, то уравнение (3) будет выглядеть так:

$$g^2\left(\theta_e - \theta_w\right) + g\left(\tau_e q_e - \tau_w q_w\right) = L_e - L_w.$$

Для компактности дальнейших вычислений, преобразуем выражение для L:

$$L = \tau\left(\frac{1}{2}\tau^2\dot{\gamma} - \frac{1}{2}\int \tau^2 d\dot{\gamma}\right) - \frac{1}{6}\tau^3\dot{\gamma} - \frac{1}{3}\int \tau^3 d\dot{\gamma} + \frac{1}{2}\tau\int \tau^2 d\dot{\gamma} = \frac{1}{3}\tau^3\dot{\gamma} - \frac{1}{3}\int \tau^3 d\dot{\gamma}.$$

Окончательно, получим замкнутую систему для определения переменных $\{\theta_e, \theta_w, q_e, q_w\}$:

$$g\left(q_e - q_w\right) = J_e - J_w,$$

$$g^2\left(\theta_e - \theta_w\right) + g\left(\tau_e q_e - \tau_w q_w\right) = L_e - L_w$$

$$J = \frac{1}{2}\tau^2\dot{\gamma} - \frac{1}{2}\int \tau^2 d\dot{\gamma}, \quad J\big|_{\dot{\gamma}=0} = 0,$$

$$L = \frac{1}{3}\tau^3\dot{\gamma} - \frac{1}{3}\int \tau^3 d\dot{\gamma}, \quad L\big|_{\dot{\gamma}=0} = 0.$$

Вычисления

Для обсчета была выбрана модель протекания жидкости по прямоугольному каналу:

$$\mu(\dot{\gamma}) = K\left|\dot{\gamma}\right|^{n-1}, \; K = 15, \quad n = 1/4, \; \rho = 1200 \text{ кг/м}^3, \; \lambda = 0{,}03.$$

Геометрия канала $2^0 30'$.

В полученной модели с помощью метода подсеточного разрешения удалось получить приемлемую точность в 5%, используя вдвое более редкую сетку, чем при методе пристеночных функций (8 против 14). Это подтверждает эффективность данного метода и делает его целесообразным для внедрения в современные программные комплексы, обсчитывающее течение неньютоновских жидкостей по различным каналам, в разы уменьшая необходимое количество вычислений.

Список использованной литературы

1. Лапин Ю. В., Стрелец М. Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит, 1989. 368 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / пер. с нем. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит, 1974. 742 с.