

Игнахин Владимир Станиславович

ИОННЫЙ ТОК НА СФЕРИЧЕСКИЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ЗОНД В ПРИБЛИЖЕНИИ РАДИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ В СЛУЧАЕ МАЛЫХ РАЗМЕРОВ ЗОНДА

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2009/12-1/12.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2009. № 12 (31): в 2-х ч. Ч. I. С. 34-39. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2009/12-1/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

стрируется способ создания новых объектов. Здесь работа носит субъективный характер, зависит от волевых установок, создающего студента данный образ.

Моделирование пространственных отношений является для геометрии главным инструментом. Геометрическое моделирование развивает познание, память, конвергентное и дивергентное мышления, оценку (суждение о правильности). При этом развивается интеллектуальная деятельность: с конкретными, т.е. с реальными образами; символическими объектами, в виде букв, цифр. В результате деятельности осуществляется трансформация, преобразование материала, что ведёт к возникновению или преобразованию геометрического объекта.

Воображение представляет собой активность индивида, единство объективного, чувственного и рационального, образного и знакомого, играет существенную роль в эмпирическом и теоретическом познании. Наглядный образ является результатом переработки чувственного материала под влиянием абстрактного мышления, связывается с речью, что говорит о диалектическом единстве противоположностей чувственного и рационального в процессе познания.

В своей работе с ребятами стремимся проводить рассуждения в ходе решения задач по развитию способности комбинирования и преобразования пространственных представлений, особую роль отводим речи и её развитию.

Описывая процесс изготовления модели третьей звёздчатой формы кубооктаэдра, учащийся даёт следующее объяснение: для изготовления использую квадрат со стороной 5 см. К квадрату подклеиваю два равносторонних треугольников, имеющих стороны по пять сантиметров. Таких заготовок делаю восемь штук. Заготовки склеиваем треугольниками вовнутрь, а четыре остальные заготовки подклеиваем к квадратам первых заготовок. Получится одна деталь кубооктаэдра. Делаем вторую деталь такую же и склеиваем между собой. Грани квадратные группируются в пары таким образом, что грани каждой из них параллельны между собой и перпендикулярны к остальным подобным граням. Данный многогранник представляет собой своего рода соединение шести четырёхугольных пирамид.

Наблюдения за детьми, позволило заметить, что выбор самой модели и качество изготовления зависит от индивидуальных физиологических особенностей детей, от темперамента, техники наблюдения и т.д.

Список литературы

1. Венниджер М. Модели многогранников. М.: Мир, 1974. 236 с.
2. Глейзер Г. Д. Методы формирования и развития пространственных представлений. М.: Просвещение, 1984. 150 с.

ИОННЫЙ ТОК НА СФЕРИЧЕСКИЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ЗОНД В ПРИБЛИЖЕНИИ РАДИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ В СЛУЧАЕ МАЛЫХ РАЗМЕРОВ ЗОНДА

*Игнахин Владимир Станиславович
Петрозаводский государственный университет*

В настоящее время для теоретической интерпретации наиболее часто измеряемой ионной части зондовой характеристики плазмы низкого давления применяются радиальная [Allen, Boyd, Reynolds, 1957, p. 297] и орбитальная [Bernstein, Rabinowitz, 1959, p. 112], [Laframboise. 1966, p. 56] теории. Орбитальная теория применима в том случае, когда ионы обладают значительным моментом количества движения (ионная температура T_i отлична от нуля) и выполняется приближение бесстолкновительного движения ионов. Следует отметить, что даже редкие столкновения ионов с нейтралами разрушают орбитальное движение частиц и сильно влияют на величину ионного тока [Швейгерт, Швейгерт., Беданов, 1999, с. 8], [Зобнин, Нефедов, Синельщиков, Фортов, 2000, с. 554]. Когда модель орбит неприменима (особенно при малой ионной температуре), используется теория радиального дрейфа [Nairn, Annaratone, Allen, 1998, p. 478].

В радиальной теории пренебрегается орбитальным моментом ионов (полагается $T_i / T_e = 0$), которые движутся радиально со скоростями, определяемыми локальным потенциалом и законом сохранения энергии. В этом случае возможно численное решение уравнения Пуассона без разбиения на области квазинейтральной плазмы и слоя [Allen, Boyd, Reynolds, 1957, p. 297]. Ионный ток задается на бесконечности, а ионизацией в объеме пренебрегается.

При нулевой температуре ионов их скорость направлена по радиусу и определяется потенциалом:

$v_i = \sqrt{\frac{-2e\phi(r)}{M}}$. Концентрация электронов распределена по Больцмановскому закону $n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)$, где

n_0 - концентрация невозмущенной плазмы. Тогда уравнение Пуассона соответственно для цилиндрического и сферического случая запишется:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{e}{\epsilon_0} \left[\frac{I_s}{2\pi r l_s e \sqrt{-2e\phi/M}} - n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) \right] \quad (1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{e}{\varepsilon_0} \left[\frac{I_3}{4\pi r^2 e \sqrt{-2e\phi/M}} - n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) \right] \quad (2)$$

При заданном ионном токе I_3 эти уравнения можно интегрировать численно при граничных условиях: $r \rightarrow \infty$, $n \rightarrow n_0$, $\phi \rightarrow 0$, $d\phi/dr \rightarrow 0$. Однако точный численный расчет при таких граничных условиях затруднен. В [Allen, Turrin, 1964, p. 177] уравнение (2) уравнение нормировалось

$$\eta^{1/2} \xi^2 \left[e^{-\eta} - \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\eta}{d\xi} \right) \right] = \frac{I}{I_\lambda}, \quad (3)$$

где $\eta = \frac{e\phi}{kT_e}$, $\xi = \frac{r}{\lambda_0}$; $\lambda_0 = \left(\frac{\varepsilon_0 kT_e}{n_0 e^2} \right)^{1/2}$, $I_\lambda = 4\pi\varepsilon_0 \frac{kT_e}{e} \sqrt{\frac{2kT_e}{M}} = 4\pi\lambda_0^2 n_0 \sqrt{\frac{2kT_e}{M}}$. На больших расстояниях

$\frac{r}{\lambda_0} \sqrt{\frac{I_\lambda}{I}} \geq 4$ принималось $\eta^{1/2} \xi^2 e^{-\eta} = \frac{I}{I_\lambda}$. Результаты численных расчетов приведены в виде графиков $\frac{I}{I_\lambda}$ от $\frac{e\phi}{kT_e}$ при значениях $\frac{r_3}{\lambda_0}$ от 0,7 до 6,4. Более точные вычисления при $0,25 \leq \frac{r_3}{\lambda_0} \leq 70$ выполнены впоследствии

Ченом [Chen, 1965, p. 47]. В результате решения при заданном $\frac{r_3}{\lambda_0}$ определяется нормированный потенциал зонда $\frac{e\phi_3}{kT_e}$, обеспечивающий плотность тока на зонд $j_3 / en_0 \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi M}}$. Результаты приведены в виде графиков. В [Nairn, Annaratone, Allen, 1998, p. 478] обобщены и расширены расчеты для сферического зонда на области $\frac{e\phi_3}{kT_e} \leq 100$; $0,05 \leq \frac{r_3}{\lambda_0} \leq 5$. Авторы отмечают, что при малых зондах $\frac{r_3}{\lambda_0} \ll 1$ зависимость потенциала от радиуса зонда близка к полю заряда в вакууме $\phi \sim 1/r$. В работе [Kennedy, Allen, 2002, p. 243] рассчитывался плавающий потенциал сферического зонда в широком диапазоне $10^{-4} \leq \frac{r_3}{\lambda_0} \leq 10^4$ для аргона и гелия таким же методом. Вследствие непрерывного роста плотности ионного тока с уменьшением радиуса зонда, плавающий потенциал зонда стремится к нулю.

В литературе отсутствуют расчётные вольтамперные характеристики для радиальной теории в области $r_3 / \lambda_0 = 0.0001 \div 0.05$. Расширение расчётных данных для столь малых r_3 / λ_0 является актуальным для диагностики сильно разреженной плазмы. Помимо этого, зондовая теория применяется для описания процессов зарядки пылевых частиц в плазме и образования плазменных кристаллов, где размеры частиц в эксперименте составляют $0.0001 \div 0.05 r_3 / \lambda_0$ [Сысун, Шелестов, 2008, с. 41].

Уравнения Пуассона (1), (2) нормировались для возможности использования результатов расчетов вне зависимости от параметров плазмы $x = \frac{r}{\lambda_d} = \frac{re}{\sqrt{\varepsilon_0 kT_e / n_0}}$, $U = \frac{e\phi}{kT_e}$, $n' = \frac{n}{n_0}$, $j'_3 = \frac{j_3}{en_0 \sqrt{kT_e / M}}$. Тогда, соответственно для сферического и цилиндрического случая получим:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{1}{x^2} \frac{dU}{dx} = \frac{-j'_3 a^2}{x^2 \sqrt{-2U}} + \exp(U) \quad (4)$$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dU}{dx} = \frac{-j'_3 a}{x \sqrt{-2U}} + \exp(U) \quad (5)$$

где $a = \frac{r_3}{\lambda_d} = \frac{re}{\sqrt{\varepsilon_0 kT_e / n_0}}$ - нормированный размер зонда. На больших расстояниях x концентрация ионов должна стремиться к концентрации электронов. В [Allen, Boyd, Reynolds, 1957, p. 297], [Allen, Turrin, 1964, p. 177], [Chen, 1965, p. 47] полагалось при $x_0 \gg a$ для сферы - $\frac{c}{x^2 \sqrt{-2U}} \rightarrow 1$, откуда $U_0 = -\frac{c^2}{2x^4}$; для цилиндра - $\frac{c}{x \sqrt{-2U}} \rightarrow 1$ и $U_0 = -\frac{c^2}{2x^2}$. При недостаточно малом x_0 в таком случае начальный потенциал вычисляется достаточно грубо. В случае же очень больших x_0 может сказаться неустойчивость численного расчета при малой величине градиента и накопление счетных ошибок. Это обстоятельство особенно важно в цилиндрическом случае, где потенциал спадает очень медленно с ростом x . Поэтому начальный потенциал в двух первых точках находился более точно, учитывая следующие члены разложения. Решения для U , удовлетворяющие уравнениям (4), (5):

$$U = -\frac{c^2}{2x^4} \left(1 + \frac{c^2}{x^4} - \frac{12c^2}{2x^6} + \frac{3c^4}{2x^8} \right) \tag{6}$$

$$U = -\frac{c^2}{2x^2} \left(1 + \frac{c^2}{x^2} - \frac{4c^2}{x^4} + \frac{3c^4}{2x^4} - 26\frac{c^4}{x^6} + \frac{8c^6}{3x^6} \right) \tag{7}$$

Далее уравнения Пуассона (6), (7) решались численно по трехточечной схеме. На Рис. 1-2 показаны зависимости величины безразмерного ионного тока для сферического и цилиндрического зондов для $a = 0.0001 \div 10$.

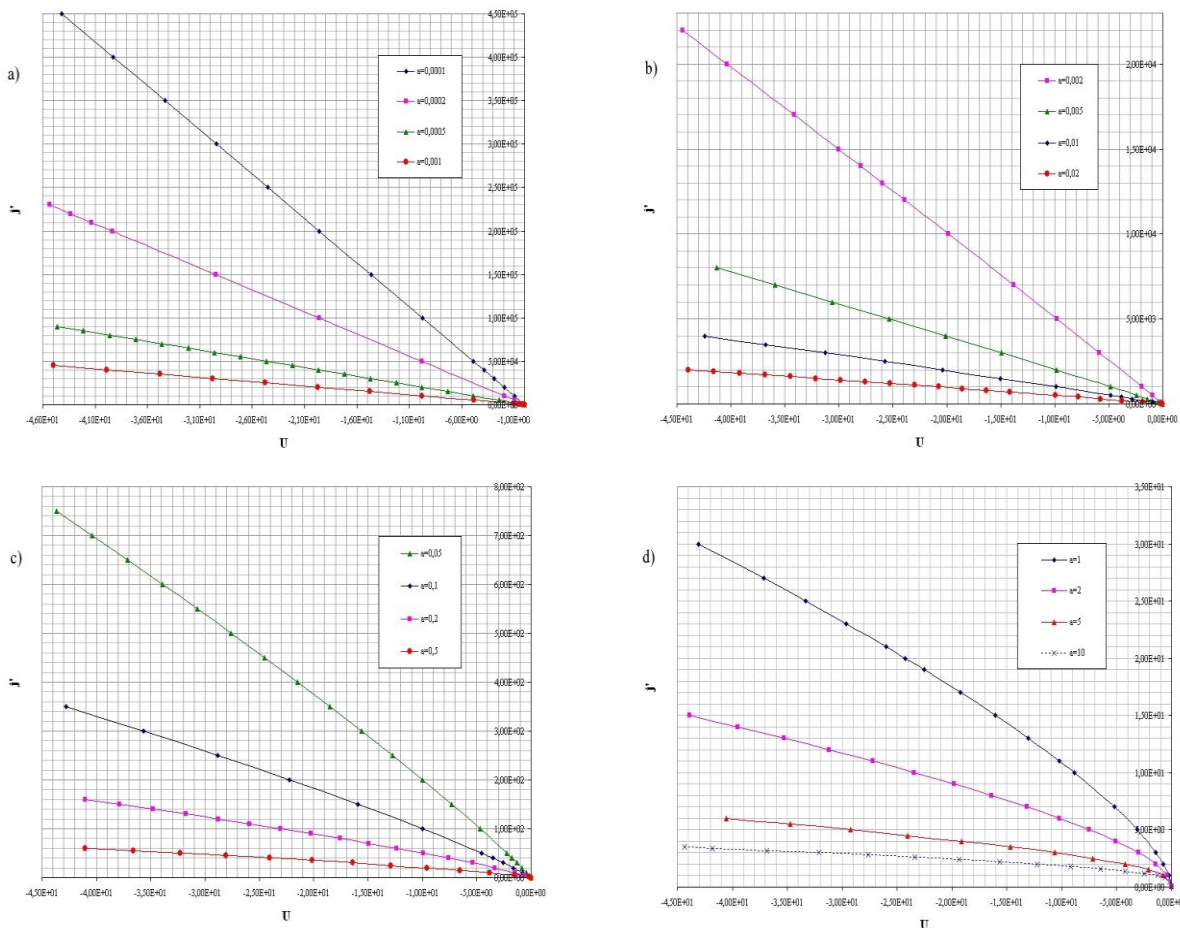


Рис. 1. Расчетные зависимости нормированной плотности тока $j'_3 = \frac{j_3}{en_0 \sqrt{kT_e / M}}$ от нормированного потенциала

для сферического зонда для a : а) $0.0001 - 0.001 \lambda_D$; б) $0.002 - 0.02 \lambda_D$; в) $0.05 - 0.5 \lambda_D$; г) $1 - 10 \lambda_D$

Расчет зондовых характеристик производится при заданном параметре $a = \frac{r_3}{\lambda_D}$. Однако λ_D зависит от

концентрации, которая заранее неизвестна $\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k T_e}{e^2 n_0} \right)^{1/2}$, что требует нескольких итераций с её подбором.

Для исключения итераций необходима перестройка зондовых характеристик в новых переменных. В [Сонин, 1966, с. 108] Сонин показал, что в качестве независимой переменной можно использовать коэффициенты α^2 и β^2 , введенные Ленгмюром при определении толщины слоя пространственного заряда и вычисленные по экспериментальным данным и в то же время являющихся комбинацией использованных безразмерных параметров:

$$\alpha^2, \beta^2 = \frac{4\sqrt{2}}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{e}{M}} \frac{\phi_3^{3/2}}{j_3 r_3^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{U^{3/2}}{j' a^2} \tag{8}$$

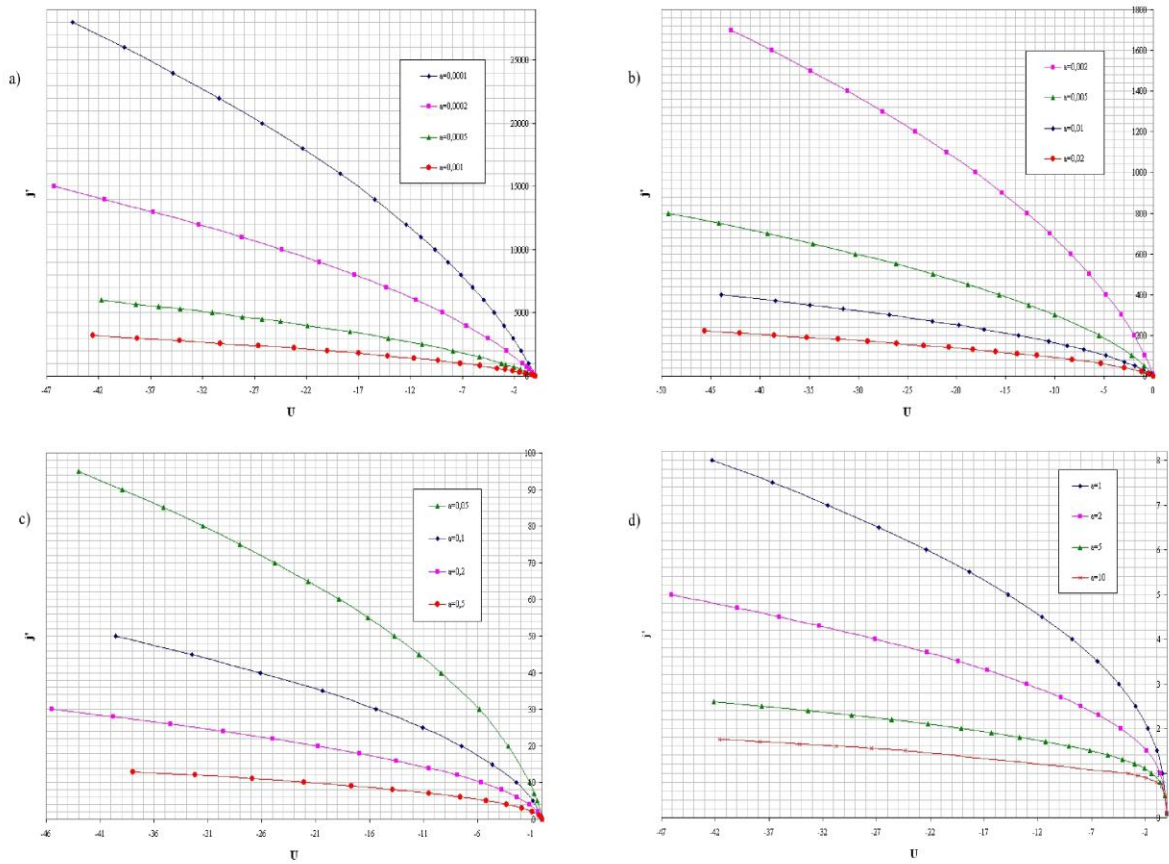


Рис. 2. Расчетные зависимости нормированной плотности тока $j'_3 = \frac{J_3}{en_0 \sqrt{kT_e} / M}$ от нормированного потенциала

$U_0 = \frac{e\phi}{kT_e}$ для цилиндрического зонда для a : а) 0.0001 - 0.001 λ_D ; б) 0.002 - 0.02 λ_D ; в) 0.05 - 0.5 λ_D ; д) 1 - 10 λ_D

Таким образом, вычисляя α^2 , β^2 при фиксированных $\frac{e\phi_3}{kT_e}$, можно перестроить зависимости в координатах j' от α^2 , β^2 . Параметр $a = \frac{r_3}{\lambda_D}$ при этом выпадает. Перестройка показала на незначительную зависимость j' от $\frac{e\phi_3}{kT_e}$ и слабую зависимость j' от α^2 и особенно от β^2 , что повышает точность определения концентрации. Следует заметить, что по теории слоя $j' = 0.607(\frac{r_{cl}}{r_3})^2$ для сферического и $j' = 0.607(\frac{r_{cl}}{r_3})$ для цилиндрического зондов, где $\frac{r_{cl}}{r_3}$ определяется по коэффициентам α^2 , β^2 .

На Рис. 3-4 показаны зависимости j' от α^2 , β^2 для $\frac{e\phi_3}{kT_e} = 5, 25, 40$ для сферы и цилиндра соответственно.

На тех же графиках для сравнения представлены результаты вычисления j' по теории слоя.

Видно, что теория слоя дает примерно вдвое заниженные значения плотности тока для цилиндрического случая и для малых значений α^2 в сферическом случае. Теория слоя дает в этих случаях несколько заниженные значения плотности тока из-за предположений квазинейтральности вплоть до границы слоя и отсутствия отталкивающихся частиц в самом слое. Реальный радиус собирания частиц зондом несколько больше радиуса слоя.

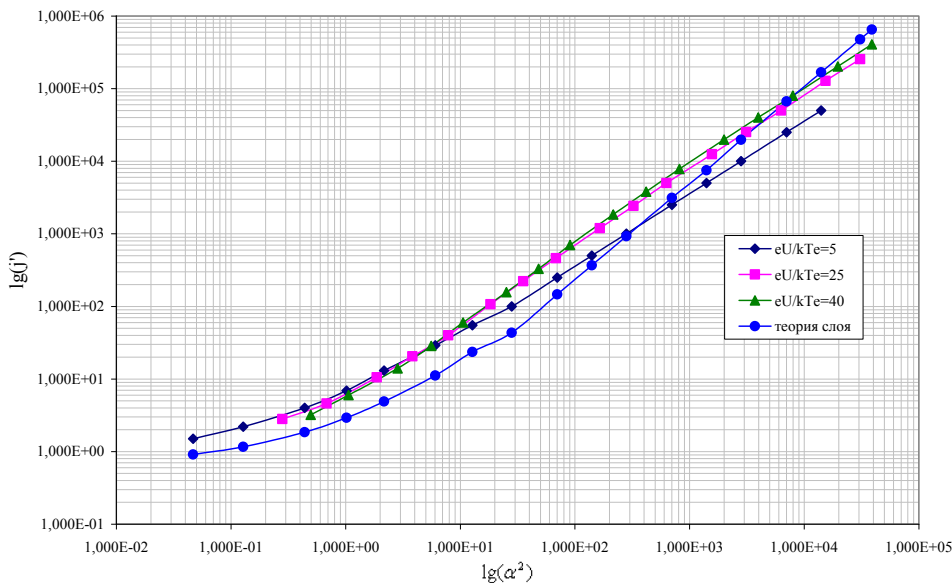


Рис. 3. Зависимости нормированной плотности тока $j'_3 = \frac{j_3}{en_0\sqrt{kT_e/M}}$ от

$\alpha^2 = \frac{4\sqrt{2}}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{e}{M}} \frac{\phi_3^{3/2}}{j_3 r_3^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{U^{3/2}}{j'_3 a^2}$ при $\frac{e\phi_3}{kT_e} = 5, 25, 40$ для сферического зонда в сравнении с теорией слоя (логарифмические координаты)

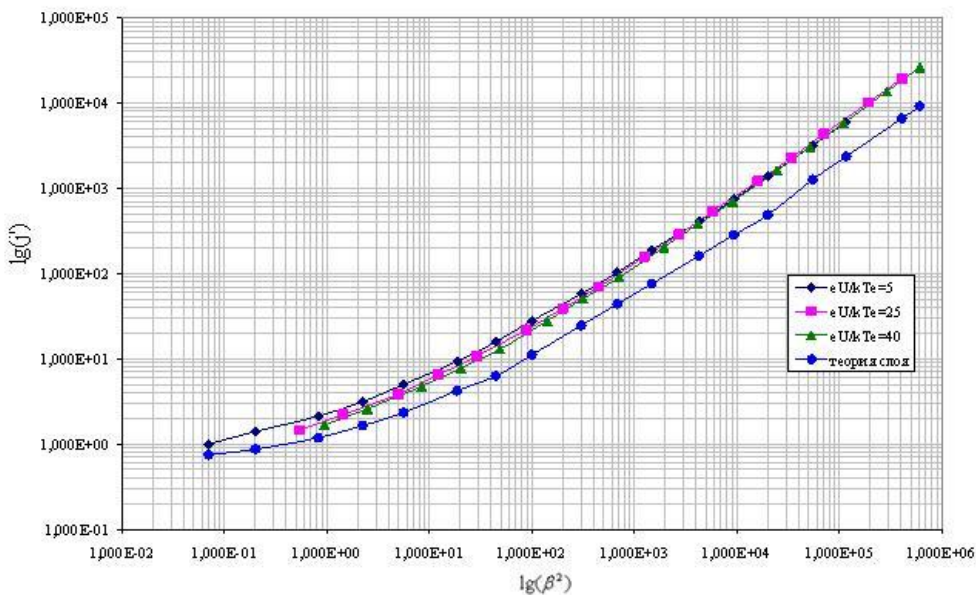


Рис. 4. Зависимости нормированной плотности тока $j'_3 = \frac{j_3}{en_0\sqrt{kT_e/M}}$ от

$\beta^2 = \frac{4\sqrt{2}}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{e}{M}} \frac{\phi_3^{3/2}}{j_3 r_3^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{U^{3/2}}{j'_3 a^2}$ при $\frac{e\phi_3}{kT_e} = 5, 25, 40$ для цилиндрического зонда в сравнении с теорией слоя (логарифмические координаты)

В случае сферического зонда при $a \ll 1$ для величины ионного тока достаточно хорошо подходит аппроксимация:

$$j'_3 = \frac{U}{a} \text{ или } j_3 = \frac{e\phi_3}{r_3} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 n_0}{M}} \tag{9}$$

т.е. ток на зонд пропорционален потенциалу зонда, корню из концентрации плазмы и радиусу зонда, т.к. $I_s = 4\pi r_s^2$ и не зависит от электронной температуры. Для зависимости от α^2 получим

$$j_s = \frac{U^{1/2} \alpha^2 9}{4\sqrt{2}} = 1.59 U^{1/2} \alpha^2 \quad (10)$$

При $a > 1$ и $U < a$ близка формула

$$j_s = 0.8 + \frac{U}{a} \quad (11)$$

Для цилиндра во всех диапазонах параметра a подходит при $U \gg 1$ применимо выражение

$$j_s = \frac{0.44 + a^{1/3}}{2a} U^{2/3} + 0.5 \quad (12)$$

при $a \rightarrow 0$

$$j_s \approx 0.22 \frac{U^{2/3}}{a} = \frac{9}{4\sqrt{2}} \frac{\alpha^2 0.0484}{U^{1/6}} = 0.077 \frac{\alpha^2}{U^{1/6}} \quad (13)$$

Список литературы

1. Зобнин А. В., Нефедов А. П., Синельщиков В. А., Фортгов В. Е. // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. Вып. 3. С. 554.
2. Сонин А. // Ракетная техника и космонавтика. 1966. № 9. С. 108.
3. Сысун А. В., Шелестов А. С. // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 8. С. 41.
4. Швейгерт В. А., Швейгерт И. В., Беданов В. М. и др. // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. Вып. 3. С. 877.
5. Allen J. E., Boyd R. L. F., Reynolds P. // Proc. phys. soc. 1957. V. B70. P. 297.
6. Allen J. E., Turrin A. // Proc. phys. soc. 1964. V. 83. P. 177.
7. Bernstein I. B., Rabinowitz I. N. // Phys. fluid. 1959. V. 2. № 2. P. 112.
8. Chen F. F. // J. nucl. energy. 1965. Part C. V. 7. P. 47.
9. Kennedy R. V., Allen J. E. // J. plasma physics. 2002. Part 4. V. 67. P. 243.
10. Laframboise J. G. The theory of spherical and cylindrical probes in a collisionless, Maxwellian plasma at rest / Institute for aerospace studies, University of Toronto (UTIAS). 1966. Report 100.
11. Nairn C. M. C., Annaratone B. M., Allen J. E. // Plasma sources sci. technol. 1998. V. 7. P. 478.

РАВНОМЕРНЫЙ АТТРАКТОР НЕАВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Ипатова Валентина Михайловна

ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/500) и РФФИ (проект 09-01-00284-а)

Как известно, многие объекты окружающего нас мира представляют собой хаотические системы. Важное значение имеет понимание природы этой хаотичности на основе изучения динамики системы и описания всех её состояний, которые могут наблюдаться по прошествии достаточно большого промежутка времени. Особый интерес представляет минимальное множество состояний, равномерно притягивающее с течением времени все траектории диссипативной системы. Такое минимальное множество принято называть аттрактором. В настоящей работе вопрос о существовании аттрактора изучается на примере нелинейного ОДУ с зависящими от времени коэффициентами и правой частью.

1. Полупроцессы и их аттракторы

Вначале определим понятия полупроцессов и их аттракторов. При этом мы будем придерживаться изложения, принятого в [1, 2].

Пусть E - полное метрическое пространство с метрикой $\text{dist}_E(\cdot, \cdot)$; T - нетривиальная подгруппа аддитивной группы \mathbf{R} вещественных чисел, $T_+ = T \cap [0; +\infty)$ - полугруппа неотрицательных элементов из T . Например, $T_+ = \mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ для систем с непрерывным временем, $T_+ = \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $T_+ = \mathbf{Z}_+ \tau = \{0, \tau, 2\tau, \dots\}$, где $\tau > 0$, для систем с дискретным временем. Пусть при всех $h \in T_+$, $t \in T_+$, $t \geq h$ на E определены непрерывные операторы $U(t, h): E \rightarrow E$ такие, что

$$U(t, s)U(s, h) = U(t, h) \quad \forall t, s, h \in T_+ : t \geq s \geq h \quad (1.1)$$

Тройку $\{U, T_+, E\}$ будем называть *полупроцессом*. Рассмотрим семейство операторов $U_f(t, h)$, функционально зависящих от символа $f = f(t)$, где под $f(t)$ подразумеваются зависящие от времени коэффициенты и члены в правой части уравнения. Пусть F - некоторое множество символов и каждому