Пыркова Ольга Анатольевна

УЧЕТ АДИАБАТИЧНОСТИ ДЛЯ ВОЛН В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2009/12-1/27.html

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2009. № 12 (31): в 2-х ч. Ч. I. C. 87-90. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2009/12-1/

Список литературы

1. **Автоматизированные информационные технологии в экономике**: учебник / под общ. ред. И. Т. Трубилина. М.: Финансы и статистика, 2000. 416 с.
2. **Годин В. К., Корнеев И. К.** Информационное обеспечение управленческой деятельности: учебник. М.: Мастерство; Высш. шк., 2001. 240 с.
3. **Корнеев И. К., Машурцев В. А.** Информационные технологии в управлении. М.: Инфра-М, 2001. 157 с.

УЧЕТ АДИАБАТИЧНОСТИ ДЛЯ ВОЛН В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Пыркова Ольга Анатольевна
ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Работа поддержана АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы", проект 2.1.1/500 и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы

Остановимся несколько подробнее на случае гидростатического равновесия. Рассмотрим случай покоящейся жидкости. Положив в уравнениях движения $\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\vec{f}\quad \vec{v}=0$, получаем ***уравнение гидростатики***

$$\nabla p=\rho\vec{f}\,. \tag{1}$$

Важным является случай, когда внешние силы имеют потенциал $u:\vec{f}=-\nabla u$, тогда (1) запишем следующим образом:

$$\nabla p=-\rho\nabla u\,. \tag{2}$$

Последнее уравнение далеко не всегда имеет решение. Действительно, слева стоит градиент давления, правую же часть можно будет представить в виде градиента только при определенной зависимости плотности от координат. Действительно, применив к правой и левой частям уравнения (2) операцию rot, получим $0=\nabla\rho\times\nabla u$. Следовательно, векторы $\nabla\rho$ и ∇u должны быть коллинеарными.

Рассмотрим подробнее случай жидкости (газа) в поле силы тяжести. При этом $u=gz$ (ось z направлена вертикально вверх) и уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=0\,,\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g\,. \tag{3}$$

Отсюда следует, что $p=p\left(z\right)$ - функция только z, и если предположить, что ρ постоянно, то $p=-\rho g z+\mathrm{const}$.

Постоянная интегрирования определяется из условия на границе; если при $z=z_0$ задано $p=p_0$, то при произвольном z

$$p=p_0-\rho g\left(z-z_0\right). \tag{4}$$

Однако если рассматривать большие перепады высот, плотность ρ уже нельзя считать постоянной. Температура также может зависеть от высоты z.

Выясним теперь при каких условиях в поле силы тяжести состояние равновесия будет устойчивым для общего уравнения состояния $p=p\left(\rho,s\right)$. Подставив его в (3), получаем

$$-\rho z=\frac{d\,p}{d\,z}=c^2\frac{d\rho}{d\,z}+Y\frac{\partial s}{\partial z}\,, \tag{5}$$

где $Y=\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho$. Рассмотрим частицу жидкости объемом V_0, находящуюся в точке z. На эту частицу действует сила тяжести $-g\rho V_0$ и (если жидкость находится в равновесии) равная ей, но направленная в противоположную сторону ***сила Архимеда***. Если теперь сместить частицу на расстояние ζ по вертикали, то из-за сжимаемости изменится ее объем на величину ΔV, в то время как ее масса и энтропия сохраняются. В результате сила, действующая на смещенную частицу, будет $F=-g\rho\left(z\right)V_0+g\rho\left(z+\zeta\right)\left(V_0+\Delta V\right)$ - снова вес и сила Архимеда. Разложив $\rho\left(z+\zeta\right)$ в ряд и ограничиваясь линейными по ζ и ΔV членами, получим $F=g\rho\left(z\right)V_0\left[\frac{1}{\rho\left(z\right)}\frac{d\rho}{dz}\zeta+\frac{\Delta V}{V_0}\right]$.

Изменение объема можно подсчитать, воспользовавшись уравнением состояния, примененным к нашей частице. С учетом $\Delta s = 0$ с точностью до малых первого порядка имеем $\Delta p = c^2 \Delta \rho = c^2 \Delta \left(\frac{m}{V} \right) = c^2 \rho(z) V_0 \Delta \left(\frac{1}{V} \right) = \; = -c^2 \rho(z) \frac{\Delta V}{V_0}$, где $m = \rho(z) V_0$ - масса частицы жидкости. Отсюда $\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{1}{c^2 \rho(z)} \Delta p$, и $\Delta p = \frac{dp}{dz} \zeta = -\rho(z) g \zeta$.

Следовательно $\frac{\Delta V}{V_0} = \left(\frac{g}{c^2} \right) \zeta$, и окончательно для силы, действующей на смещенную частицу, получаем $F = g \rho(z) V_0 \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{g}{c^2} \right) \zeta = -m N^2 \zeta$, где

$$N^2 = -g \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{g}{c^2} \right) \tag{6}$$

так называемая ***частота Вяйсяля***, имеющая важное значение в теории внутренних волн. Состояние равновесия будет устойчивым только в том случае, если сила противополложна смещению, для чего необходимо

$$N^2 \geq 0 \text{ или } \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{g}{c^2} \leq 0, \tag{7}$$

т.е. плотность должна достаточно быстро уменьшаться с высотой. Точнее, если $\frac{d\rho}{dz} > -\frac{g\rho}{c^2}$, то состояние равновесия будет неустойчивым, возникнут конвективные движения.

Для замыкания стационарных линейных уравнений гидродинамики, полученных в приближении несжимаемой жидкости [5]

$$\begin{cases} U_0 \dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{\partial p'}{\partial x} = f_x, \\ U_0 \dfrac{\partial v'}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{\partial p'}{\partial y} = f_y, \\ U_0 \dfrac{\partial w'}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{\partial p'}{\partial z} + g \dfrac{\rho'}{\rho_0} = f_z, \\ \dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{\partial v'}{\partial y} + \dfrac{\partial w'}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

в качестве основного уравнения состояния [3] принимается уравнение адиабаты Пуассона

$$pV^\gamma = \text{const}, \tag{9}$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ - отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и объеме. Но $V = \frac{1}{\rho}$ - удельный объем, поэтому $p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$. И уравнение состояния имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \tag{10}$$

или, после линеаризации [4]

$$U_0 \frac{\rho_0}{\gamma p_0} \frac{\partial}{\partial x} p' - U_0 \frac{\partial}{\partial x} \rho' + \rho_0 w' \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dz} \ln \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = 0 \tag{11}$$

Мы условились рассматривать вначале идеальную жидкость, пренебрегая теплообменом между частицами, поэтому энтропия данной жидкой частицы остается постоянной, т.е.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \nabla s = 0. \tag{12}$$

Заметим, что требование изэнтропичности процессов в идеальной жидкости не противоречит возможности изменения энтропии в заданной точке пространства. Это изменение может происходить в связи с приходом в данную точку новых частиц жидкости.

Энтропию s можно исключить из уравнений, для этого нужно взять от уравнения состояния

$$p = p(\rho, s) \tag{13}$$

субстанциональную производную по времени, учитывая что квадрат скорости звука

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s . \tag{14}$$

В результате получаем

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}, \tag{15}$$

где c^2 уже следует считать заданной функцией p и ρ.

Как уже говорилось в предыдущей работе [4], формально переход к несжимаемой жидкости можно осуществить, потребовав постоянства плотности в жидкой частице, то есть в отсутствие сжимаемости и диффузии плотность жидкой частицы не должна изменяться вдоль траектории частицы:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 . \tag{16}$$

В несжимаемой жидкости при условии (16) имеем $\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt} = \frac{d\rho}{dt} = 0$. Но в общем случае $\frac{dp}{dt} \neq 0$, например, из-за изменения гидростатического давления, поэтому в несжимаемой жидкости, как уже отмечалось выше, полагаем скорость звука $c = \infty$. Этот результат отражает тот факт, что в несжимаемой жидкости упругие возмущения распространяются мгновенно.

Кроме того, в силу (9) $\frac{p}{\rho^\gamma} = \mathrm{const}$, а так как $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma\rho^{\gamma-1}\mathrm{const} = \gamma\frac{p}{\rho} = \infty$, то следует положить $\gamma \cong \infty$.

Тогда в уравнении (11) $U_0 \frac{\rho_0}{\gamma p_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \cong 0$;

$$\rho_0 w' \frac{d}{dz}\ln\left(\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}\right) = \rho_0 w' \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\gamma}\ln p_0 - \ln \rho_0\right) \cong \rho_0 w' \frac{d}{dz}\left(-\ln\rho_0\right) = -w'\frac{d\rho_0}{dz} =$$

$$= \frac{\rho_0 w'}{g}\left(-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\right) = \frac{\rho_0 w'}{g} N^2, \text{ где}$$

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}, \tag{17}$$

согласно $N^2 = -g\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz} + \frac{g}{c^2}\right)$, частота Вяйсяля в данном приближении.

Теперь линеаризованные уравнения гидродинамики несжимаемой жидкости

$$\begin{cases} U_0 \dfrac{\partial u'}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x} + f_x, \\ U_0 \dfrac{\partial v'}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial y} + f_y, \\ U_0 \dfrac{\partial w'}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial z} - g\dfrac{\rho'}{\rho_0} + f_z, \\ \\ \dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{\partial v'}{\partial y} + \dfrac{\partial w'}{\partial z} = 0, \\ U_0 \dfrac{\partial \rho'}{\partial x} = \rho_0 \dfrac{w'}{g} N^2. \end{cases} \tag{18}$$

Смысл приближения Буссинеска состоит в том, что, хотя избыточная плотность и создает значительную гравитационную восстановительную силу, которая должна быть учтена в уравнении количества движения жидкости, возникающие в результате колебания происходят со столь низкой частотой, что влияние скорости изменения избыточной плотности на уравнение неразрывности будет пренебрежимо малым.

Таким образом, при движении стратифицированной несжимаемой жидкости важно возмущение плотности лишь в слагаемом в третьем уравнении линеаризованной системы (18), содержащем силу тяжести, и его изменение в пятом уравнении (18) также в слагаемом, содержащем силу тяжести. Жидкость находится при этом под действием силы тяжести (или плавучести) с уменьшенным ускорением $g' = g\dfrac{\rho'}{\rho_0}$ и при измененном давлении $p' = p - p_0$. Сила плавучести $-\rho'\vec{g}$ возвращает обратно любую частицу жидкости, отклонившуюся от первоначального равновесного уровня. Эта внутренняя возвращающая сила и приводит к возбуждению внутренних волновых колебаний в устойчиво стратифицированной жидкости.

Состояние гидростатического равновесия для рассматриваемой модели описывается формулами

$$\vec{u} \equiv 0,\ p = p_0(z),\ \rho = \rho_0(z). \tag{19}$$

Уравнение неразрывности при этом удовлетворяется тождественно, а уравнения движения приводятся к виду

$$\frac{\partial p_0(z)}{\partial z} = -\rho_0 g. \tag{20}$$

Таким образом, для любого заданного распределения плотности $\rho_0(z)$ уравнение (20) можно проинтегрировать и получить выражение для p_0. Важным параметром в уравнениях (19), (20), характеризующим статическое состояние, является частота Брента-Вяйсяля $N(z)$.

Согласно линейной модели, для описания движений, нарушающих состояние статического равновесия, вводились малые возмущения плотности, определяемые равенством $\rho = \rho_0 + \rho' = \rho_0\left(1 + \dfrac{\rho'}{\rho_0}\right)$.

Поскольку $\dfrac{\rho'}{\rho_0} << 1$ (колебания плотности ρ' малы по сравнению с ρ_0) во всем океане (в действительности $\dfrac{\rho'}{\rho_0} = O(10^{-3})$), возмущение плотности очень мало меняет силы инерции и Кориолиса в уравнениях движения - оно приводит лишь к малой поправке на инерцию по сравнению с жидкостью плотности ρ_0. Однако, как упоминалось выше, изменение плотности имеет первостепенное значение для слагаемого в уравнениях движения, описывающего силы плавучести. Впервые **приближение** основанное на этих соображениях, было введено **Буссинеском** в 1903 г. [6]: пренебрегается изменениями плотности, влияющими на инерцию, и они сохраняются в слагаемых, описывающих силы плавучести, где эти изменения встречаются в виде $g' = g\dfrac{\rho'}{\rho_0}$; математически оно сводится к замене ρ в уравнениях движения на некоторую постоянную, например характерную плотность ρ_*.

Для практических целей будем считать ρ_* равной среднему по глубине значению плотности $\rho_0(z)$. В этом приближении при учете вязкости и диффузии изменениями свойств жидкости также пренебрегают. Жидкость, в которой принимается приближение Буссинеска, называют ***жидкостью Буссинеска***. Для жидкости Буссинеска обычно употребляется несколько иное определение N^2, а именно

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_*}\frac{d\rho_0}{dz}. \tag{21}$$

Поскольку для океана $\rho_0 = \rho_*\left(1 + O\left(10^{-3}\right)\right)$, то отсюда вытекает, что численное значение N^2, определяемое уравнением (21), почти совпадает со значением (17).

Список литературы

1. **Лайтхилл Джеймс.** Волны в жидкостях. М: Мир, 1981.
2. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: ГИФМЛ, 1963.
3. **Пыркова О. А.** О возможности приближенного учета действия вязкости в плоской задаче обтекания цилиндра в полупространстве потоком стратифицированной жидкости // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики: междувед. сб. МФТИ. М., 1995. С. 154-165.
4. **Пыркова О. А.** Линейные уравнения для волн в жидкости // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2008. № 12 (19): Математика, физика, строительство, архитектура, технические науки и методика их преподавания. С. 129-134.
5. **Пыркова О. А.** Учет несжимаемости для волн в жидкости в линейном приближении // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2009. № 6 (25): Математика, физика, строительство, архитектура, технические науки и методика их преподавания. С. 146-149.
6. **Boussinesq J.** Theorie analytique de la chaleur. Paris: Gathier-Villars, 1903. V. 2.