ОЦЕНКА РАЗНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Торшина Ольга Анатольевна
Магнитогорский государственный университет

Пусть M - n-мерное многообразие; $H = L^2(M, dx)$ - гильбертово пространство функций, квадрат которых интегрируем на M по dx; dx - положительная мера на M такая, что функция $e(x) \equiv 1$ интегрируема на M, причем $\int_M e(x)dx > 0,$ T - дискретный полуограниченный, P - самосопряженный ограниченный операторы, действующие в H, $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ - собственные значения операторов T и T+P соответственно, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, $\upsilon_i(x)$ и $u_i(x)$ - ортонормированные собственные функции операторов T и T+P соответственно, отвечающие $i-M$ собственным значениям. Предположим, что $\lambda_i \approx C_1 i^a$, $C_1 > 0,\ a > 1.$

Известна следующая лемма [Дубровский, 1994]:

Лемма 1. *Существует последовательность натуральных чисел* $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$d_{n_m} = \left|\lambda_{n_m} - \lambda_{n_m+1}\right| \ge C n_m^{a-1},\ \ C > 0.$$

Возьмем равномерно сходящиеся в H на компактной части комплексной плоскости, где отсутствуют собственные числа операторов T, T+P, разложения по λ:

$$K(T,x,y,\lambda) = \sum \upsilon_i(x)\overline{\upsilon_i(y)}\ \left(\lambda_i - \lambda\right)^{-1},$$

$$K(T+P,x,y,\lambda) = \sum u_i(x)\overline{u_i(y)}\ \left(\mu_i - \lambda\right)^{-1},$$

где, $K(T,x,y,\lambda)$ и $K(T+P,x,y,\lambda)$ - ядра операторов $\left(T-\lambda E\right)^{-1}$ и $\left(T+P-\lambda E\right)^{-1}$ соответственно. Обозначим через γ_{n_m} вертикальную прямую $\gamma_{n_m} = \left\{\lambda \middle| \operatorname{Re}\lambda = (\lambda_{n_m} + \lambda_{n_m+1})2^{-1}\right\}.$

Известно, что при $\lambda \notin \sigma(T+P) \cup \sigma(T)$ имеет место следующая формула:

$$K(T+P,x,y,\lambda) = K(T,x,y,\lambda) - K(T,x,y,\lambda)\circ P \circ K(T,x,y,\lambda) + ... +$$
$$+(-1)^t \left(K(T,x,y,\lambda)\circ P\right)^t \circ K(T,x,y,\lambda) + (-1)^{t+1}\left(K(T,x,y,\lambda)\circ P\right)^{t+1} \circ K(T,x,y,\lambda), \qquad (1)$$

где под операцией $\circ$ понимается следующее:

$$\left(K \circ P \circ K\right)(x,z,\lambda) = \int_M K(T,x,y,\lambda)(PK)(y,z,\lambda)dy.$$

Лемма 2. *На прямой* γ_{n_m} *при* $(1-\varepsilon)a > 1$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\lambda_i - \lambda\right|^{-1} \le const n_m^{-(a-1)(1-\varepsilon)+1}\left(|p|+1\right)^{-\varepsilon},\ \textit{где}\ \ p = \operatorname{Im}\lambda.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\lambda_i - \lambda\right|^{-1} = \sum_{i=1}^{n_m} \left|\lambda_i - \lambda\right|^{-1} + \sum_{i=n_m+1}^{\infty} \left|\lambda_i - \lambda\right|^{-1} \equiv I_1 + I_2.$$

Оценим I_1, I_2:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n_m} \left|\lambda_i - \lambda\right|^{-1} = \sum_{i=1}^{n_m} \left(p^2 + \left(\lambda_i - \left(\lambda_{n_m} + \lambda_{n_m+1}\right)2^{-1}\right)^2\right)^{-1/2} \le$$
$$\le const\left(|p|+1\right)^{-\varepsilon}\left|\lambda_i - \left(\lambda_{n_m} + \lambda_{n_m+1}\right)2^{-1}\right|^{-(1-\varepsilon)} \le const n_m^{-(a-1)(1-\varepsilon)+1}\left(|p|+1\right)^{-\varepsilon}.$$

В этой оценке использовано неравенство $\left(a^2 + b^2\right)^{1/2} \ge C a^{\varepsilon} b^{1-\varepsilon}$, где $1 > \varepsilon > 0, C > 0.$

Далее,

$$I_2 = \sum_{i=n_m+1}^{\infty} \left|\lambda_i - \lambda\right|^{-1} \le const\left(|p|+1\right)^{-\varepsilon} \sum_{i=n_m+1}^{\infty} \left|\lambda_i - \left(\lambda_{n_m} + \lambda_{n_m+1}\right)2^{-1}\right|^{-1+\varepsilon}.$$

Так как

$$\left|\lambda_i - \left(\lambda_{n_m} + \lambda_{n_m+1}\right)2^{-1}\right|^{-1} \le const\left|\lambda_i\right|^{-1} n_m,$$

то

$$I_2 \le const\left(|p|+1\right)^{-\varepsilon} n_m^{1-\varepsilon} \sum_{i=n_m+1}^{\infty} \left|\lambda_i\right|^{-1+\varepsilon} \le const\left(|p|+1\right)^{-\varepsilon} n_m^{1-(a-1)(1-\varepsilon)}.$$

Здесь было использовано равенство $(1-\varepsilon)a>1.$ Лемма 2 доказана.

Введем

$$\beta_{t+1}(x,y,\lambda)=(-1)^{t+1}\left[K(T,x,y,\lambda)\circ P\right]^{t+1}\circ K(T+P,x,y,\lambda).$$

Лемма 3. На прямой γ_{n_m} при $(1-\varepsilon)a>1$ справедлива оценка

$$\int\limits_M\int\limits_M\left|\beta_{T+1}(x,y,\lambda)\right|dxdy\le const\left(|p|+1\right)^{-\varepsilon(t+2)}n_m^{-\left[(a-1)(1-\varepsilon)(t+2)-2\right]}.$$

Доказательство. При $a>1$ имеют место равномерно сходящиеся в H в любой компактной части комплексной плоскости, не содержащей точек спектров операторов T и T+P, разложения по λ

$$\left(K(T,x,\cdot,\lambda)\circ P\right)^{t+1}\circ K(T+P,x,\cdot,\cdot,\lambda)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\upsilon_i(x)\left(\left(P(T-\lambda E)^{-1}\right)^t P\upsilon_i,\upsilon_j(x)\right)\overline{u_j(y)}(\lambda_i-\lambda)^{-1}(\mu_j-\lambda)^{-1},$$

но $\left|\left(\left(P(T-\lambda E)^{-1}\right)^t P\upsilon_i,u_j\right)\right|\le constn_m^{-(a-1)(1-\varepsilon)t}\left(|p|+1\right)^{-\varepsilon t}$, где $\lambda\in\gamma_{n_m}$.

Поэтому

$$\left|\beta_t\right|_{L_1}\le const\sum_{i=1}^{\infty}\left|\lambda_i-\lambda\right|^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\mu_j-\lambda\right|^{-1}n_m^{-(a-1)t(1-\varepsilon)}\left(|p|+1\right)^{-\varepsilon t}\le constn_m^{-\left[(a-1)(1-\varepsilon)(t+2)-2\right]}\left(|p|+1\right)^{-\varepsilon(t+2)}.$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *При* $t>2(a-1)^{-1}$ *справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{n_m}u_i(x)\overline{u_i(y)}=\sum_{i=1}^{n_m}\upsilon_i(x)\overline{\upsilon_i(y)}+a_1(n_m,x,y)+...+a_t(n_m,x,y)+\phi(x,y,m),\qquad(2)$$

где $\int\limits_{M\times M}\left|\phi(x,y,m)\right|dxdy\to 0$ *при* $m\to+\infty,$

$$a_t(n_m,x,y)=(-1)^t(2\pi i)^{-1}\int\limits_{T_{n_m}}\left[K(T,x,y,\lambda)\circ P\right]^t\circ K(T,x,y,\lambda)d\lambda,$$

а рассматриваемый замкнутый регулярный контор, охватывает только собственные значения $\lambda_1,\lambda_{2,}...,\lambda_{n_m}$ *и отстоит от них на расстояние не менее, чем* Cn_m^{a-1}.

Доказательство. Выбор такого контура возможен в силу леммы 1. Интегрируем равенство (1) по контуру T_{n_m}. Получаем

$$\sum_{i=1}^{n_m}u_i(x)\overline{u_i(y)}=\sum_{i=1}^{n_m}\upsilon_i(x)\overline{\upsilon_i(y)}+a_1(x,y,n_m)+...+a_t(n_m,x,y)+\phi(x,y,m).$$

Возьмем полукруг $\prod_{n_m}(R)$ с центром $\left(\lambda_{n_m}+\lambda_{n_m+1}\right)2^{-1}$:

$$\prod_{n_m}(R)=\left\{\lambda\left|\lambda=\left(\lambda_{n_m}+\lambda_{n_m+1}\right)2^{-1}+\mathrm{Re}^{i\phi},\pi 2^{-1}\le\phi\le 3\pi 2^{-1}\right.\right\},$$

когда $\lambda\in\prod_{n_m}(R)$ и R достаточно велико,

$$\left|\beta_t(x,y,\lambda)\right|_{L_1}\le constR^{-(t+z)\varepsilon},$$

$$\int\limits_M\int\limits_M\int\limits_{\Pi_{n_m}(R)}\left|\beta_t(x,y,\lambda)\right|dxdyd\lambda\to 0$$

при $(t+2)\varepsilon>1.$ Поэтому возможен переход от контура T_{n_m} к контуру γ_{n_m}. Далее доказательство теоремы завершает Лемма 3.

Замечание 1. Если обозначить через $Q_{T+P}(x,y,\lambda)$ и $Q_T(x,y,\lambda)$ - спектральные функции операторов T+P и T соответственно, то формулу (2) при $\lambda\in\left]\lambda_{n_m}+\|P\|,\lambda_{n_m+1}-\|P\|\right[$ можно переписать в виде

$$Q_{T+P}(x,y,\lambda)=Q_T(x,y,\lambda)+a_1(n_m,x,y)+...+a_t(n_m,x,y)+\phi(x,y,m).$$

Следствие. При $a>3$ и $\lambda_m\in\left]\lambda_{n_m}+\|P\|,\lambda_{n_m+1}-\|P\|\right[$ имеет место формула

$$\lim\int\limits_{M\times M}\left|Q_{T+P}(x,y,\lambda_m)-Q_T(x,y,\lambda_m)\right|dxdy=0.$$

Теорема 2. *При* $a>2$ *верна формула*

$$\lim_{M\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n_m}\left(\mu_i-\lambda_i-\left(P\upsilon_i,\upsilon_i\right)\right)\right\}=0.$$

Доказательство. Имеет место формула

$$\sum_{i=1}^{n_m}\left(\mu_i-\lambda_i\right)=a_1\left(n_m\right)+\ldots+a_t\left(n_m\right)+\beta_{t+1}\left(n_m\right),$$

где

$$a_1\left(n_m\right)=\sum_{i=1}^{n_m}\left(P\upsilon_i,\upsilon_i\right),$$

$$a_t\left(n_m\right)=(-1)^t\left(2\pi i\right)^{-1}Sp\oint_{T_{n_m}}\lambda\left(\left(T-\lambda E\right)^{-1}P\right)^t\left(T-\lambda E\right)^{-1}d\lambda=(-1)^t\left(2\pi i\right)^{-1}Sp\oint_{T_{n_m}}\left(\left(T-\lambda E\right)^{-1}P\right)^t d\lambda,$$

$$\beta_{t+1}\left(n_m\right)=(-1)^{t+1}\left(2\pi i\right)^{-1}Sp\oint_{T_{n_m}}\lambda\left(\left(T-\lambda E\right)^{-1}P\right)^{t+1}\left(T+P-\lambda E\right)^{-1}d\lambda.$$

Оценим $\beta_{t+1}\left(n_m\right)$:

$$\left|\beta_{t+1}\left(n_m\right)\right|\le\left(2\pi\right)^{-1}\left(\max\left\|\left(T-\lambda E\right)^{-1}\right\|\right)^{t+1}\left\|P\right\|^{t+1}\left\|\left(T-\lambda E\right)^{-1}\right\|\left|\lambda_{n_m}\right|2\pi\left|\lambda_{n_m}\right|.$$

Но при $\lambda\in T_{n_m}$

$$\left\|\left(T-\lambda E\right)^{-1}\right\|\le const\sup_i\left|\lambda_i-\lambda_{n_m}-d_{n_m}2^{-1}\right|\le constn_m^{-(a-1)},$$

$$\left\|\left(T-\lambda E\right)^{-1}\right\|\le\sum_{i=1}^{\phi n_m}\left|\lambda_i-\left(\lambda_{n_m}+d_{n_m}2^{-1}\right)\right|^{-1}+\sum_{i=\phi n_m+1}^{\infty}\left|\lambda_i-\left(\lambda_{n_m}+d_{n_m}2^{-1}\right)\right|^{-1}\equiv I_1+I_2,$$

где ϕ подобрано так, что $\lambda_i\ge C2^{-1}\phi^a i^a$ при $i>\phi n_m+1,\phi^a>10$.

Оценим I_1,I_2:

$$I_1=\sum_{i=1}^{\phi n_m}\left|\lambda_i-\left(\lambda_{n_m}+d_{n_m}2^{-1}\right)\right|^{-1}\le constn_m^{-(a-2)},$$

$$I_2\le\sum_{i=\phi n_m+1}^{\infty}\left|c2^{-1}\phi^a i^a-\left(\lambda_{n_m}+d_{n_m}2^{-1}\right)\right|^{-1}\le constn_m^{-(a-2)}.$$

Отсюда при $t=\overline{3,\infty},$ если $a>2,\beta_{t+1}(n_m)\to 0.$

Оценим $\left(T-\lambda E\right)^{-1}$ при $\lambda\in\gamma_{n_m}$. Имеем

$$\left\|\left(T-\lambda E\right)^{-1}\right\|=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|\lambda_i-\lambda_{n_m}-d_{n_m}2^{-1}\right|^2+p^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le const\left(\left|p\right|+1\right)^{-\varepsilon}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\lambda_i-\lambda_{n_m}-d_{n_m}2^{-1}\right|^{-(1-\varepsilon)}\le$$

$$\le const\left(\left|p\right|+1\right)^{-\varepsilon}n_m^{-(a-1)(1-\varepsilon)+1},$$

где $0<\varepsilon<1, p=\mathrm{Im}\,\lambda,$

$$\left\|\left(T-\lambda E\right)^{-1}\right\|\le const\left(\left|p\right|+1\right)^{-\varepsilon}n_m^{-(a-1)(1-\varepsilon)+1},$$

следовательно,

$$\left|a_t\left(n_m\right)\right|=\left|(-1)^t\left(2\pi i\right)^{-1}Sp\oint_{\gamma_{n_m}}\left(\left(T-\lambda E\right)^{-1}P\right)^t d\lambda\right|\le$$

$$\le const\left\|P\right\|^t S\left(\left|p\right|+1\right)^{-\varepsilon t}n_m^{-(a-1)(1-\varepsilon)t+1}dp.$$

Последний интеграл сходится при $\varepsilon>t^{-1}$.

Список литературы

1. **Дубровский В. В.** О регуляризованных следах дифференциальных операторов в частных производных // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1993. Вып. 9. С. 40-44.