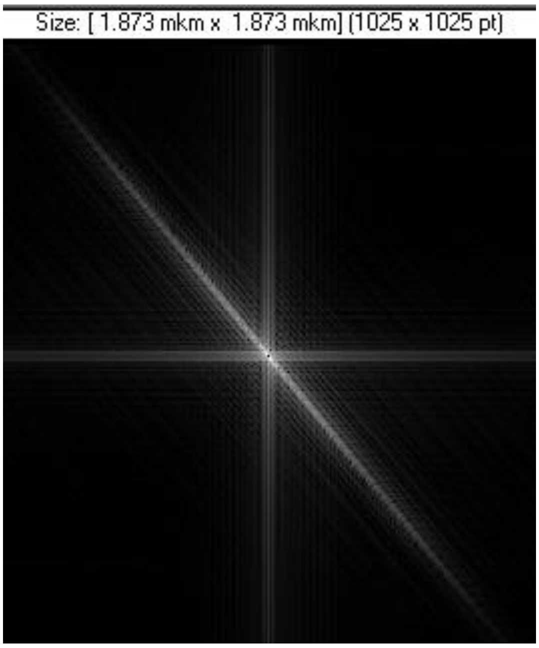

Рис. 6. *Фурье-образ поверхности среза монокристалла висмута*

Использование Фурье-анализа поверхности среза монокристалла висмута показало наличие выделенного направления шероховатости и отсутствие периодичности в расположении объектов [Хрипунов, 2009, с. 113-117].

Итак, в данной работе выявлены некоторые особенности структуры поверхностей монокристаллов висмута, полученной скалыванием и в результате электроискровой резки. Выявление особенностей структуры поверхности монокристаллов висмута, полученной различными способами, позволит объяснить некоторые физические свойства висмута, обусловленные дефектностью его структуры, и уточнить особенности его применения в качестве функционального материала в высокотехнологичном производстве.

Список литературы

1. **Брандон Д., Каплан У.** Микроструктура материалов. Методы исследования и контроля. М.: Техносфера, 2004. 377 с.
2. **Быков В. А.** Приборы и методы сканирующей зондовой микроскопии для исследования и модификации поверхности: дисс. … докт. тех. наук. М., 2000. 393 с.
3. **Логинов Б. А.** Сканирующая туннельная и атомно-силовая микроскопия: пособие по работе на микроскопе СММ-2000. М.: ГОУ МИФИ (ГУ), 2007. 92 с.
4. **Марков О. И., Хрипунов Ю. В.** Диагностика структуры поверхности, полученной при электроискровой резке монокристаллов висмута // Тезисы докладов 1-ой Всероссийской научной конференции «Методы исследования состава и структуры функциональных материалов. МИССФМ-2009». Новосибирск, 2009. С. 275.
5. **Офицеров А. В.** Исследование электронных свойств поверхности висмута методами сканирующей туннельной микроскопии и спектроскопии: дисс. … канд. физ.-мат. наук. М., 2004. 120 с.
6. **Пул Ч. - мл., Оуэнс Ф.** Нанотехнологии. М.: Техносфера, 2009. 336 с.
7. **Хрипунов Ю. В.** Использование Фурье-преобразования для анализа поверхности монокристалла висмута // Труды Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Орел: ОГУ; Полиграфическая фирма «Картуш», 2009. Вып. 7. С. 113-117.
8. **Хрипунов Ю. В., Марков О. И.** Исследование поверхности монокристалла висмута сканирующим туннельным микроскопом // Ученые записки ОГУ. Орел, 2009. № 2 (32). С. 27-37.

ЦЕПИ И ЦИКЛЫ УСЛОВИЙ ШУБЕРТА

Юрков Виктор Юрьевич
Омский государственный педагогический университет

Под сложным условием инцидентности вида

$$e\begin{matrix} m, & m-1, & \dots, & 1, & 0 \\ a_m, & a_{m-1}, & \dots, & a_1, & a_0 \end{matrix}\; e\begin{matrix} m, & m-1, & \dots, & 1, & 0 \\ b_m, & b_{m-1}, & \dots, & b_1, & b_0 \end{matrix} \qquad (1)$$

имеется в виду, что флаг V_m должен быть инцидентен флагу V_a по условию, выраженным первым сомножителем, и должен быть инцидентен флагу V_b по условию, выраженным вторым сомножителем.

В данной работе будет предложена иная трактовка сложного условия инцидентности и иные, связанные с ним, формулы редукции. Это позволит расширить класс задач исчислительной геометрии [Волков, Юрков, 2008].

Итак, пусть под условием (1) понимаются два обобщенных условия инцидентности, которым подчиняются два флага V_m и W_m одной и той же размерности m. Понятно, что флаги V_m и W_m не могут быть независимыми. Зависимость двух флагов может быть следующей.

Во-первых, они могут принадлежать какому-либо подпространству размерности от n - 1 до 2m + 1. Эту зависимость выразим условием

$$e\begin{matrix} m, & m-1, & ..., & 1, & 0 \\ a_m, & a_{m-1}, & ..., & a_1, & a_0 \end{matrix} e\begin{matrix} p, & p-1, & ..., & 1, & 0 \\ c_p, & c_{p-1}, & ..., & c_1, & c_0 \end{matrix} e\begin{matrix} m, & m-1, & ..., & 1, & 0 \\ b_m, & b_{m-1}, & ..., & b_1, & b_0 \end{matrix}, \qquad (2)$$

где p - размерность флага V_p, которому принадлежат V_m и W_m. Во-вторых, они могут пересекаться по подпространству размерности от m - 1 до 0. Такую зависимость можно записать в виде

$$e\begin{matrix} m, & m-1, & ..., & 1, & 0 \\ a_m, & a_{m-1}, & ..., & a_1, & a_0 \end{matrix} e\begin{matrix} r, & r-1, & ..., & 1, & 0 \\ d_r, & d_{r-1}, & ..., & d_1, & d_0 \end{matrix} e\begin{matrix} m, & m-1, & ..., & 1, & 0 \\ b_m, & b_{m-1}, & ..., & b_1, & b_0 \end{matrix}, \qquad (3)$$

где r - размерность флага V_d пересечения флагов V_m и W_m. Естественно, что произведение таких условий коммутативно.

Обобщением условий (2) и (3) могут быть условия

$$\prod_{i=1}^{k}\left(e\begin{matrix} m, & m-1, & ..., & 1, & 0 \\ a_{m,i}, & a_{m-1,i}, & ..., & a_{1,i}, & a_{0,i} \end{matrix} \right)_i e\begin{matrix} q, & q-1, & ..., & 1, & 0 \\ b_q, & b_{q-1}, & ..., & b_1, & b_0 \end{matrix}, \qquad (4)$$

где $0 \le q \le n - 1$, $q \ne m$, $k \ge 1$, $V_{m,\,i} \subset (\supset)\ V_q$.

Обозначим

$$\prod_{i=1}^{k}\left(e\begin{matrix} m, & m-1, & ..., & 1, & 0 \\ a_{m,i}, & a_{m-1,i}, & ..., & a_{1,i}, & a_{0,i} \end{matrix} \right)_i e\begin{matrix} q, & q-1, & ..., & 1, & 0 \\ b_q, & b_{q-1}, & ..., & b_1, & b_0 \end{matrix} = \prod_{i=1}^{k}\left(E_a^m\right)_i E_b^q .$$

Определение 1. Условие вида (4) назовем комплексным условием инцидентности k-го порядка с условием связности флагов $V_{m,\,i} \subset (\supset)\ V_q$.

Определение 2. Обобщенное условие инцидентности, которому подчиняется q-флаг в условии (4), назовем базовым условием, а сам q-флаг - базовым флагом или флагом-носителем условия (4).

Определение 3. Обобщенные условия инцидентности, которым подчиняются m-флаги в условии (4), назовем элементными условиями, а сами m-флаги - элементными флагами.

Определение 4. Произведение комплексных условий 1-го порядка вида

$$\prod_{i=1}^{k}\left(E_a^m E_b^q\right)_i, \quad V_{q,i} \subset V_{m,i}, \quad V_{q,i} \subset V_{m,i+1}$$

назовем цепью комплексных условий k-го порядка. Соответствующее многообразие флагов назовем цепью флагов.

Определение 5. Произведение комплексных условий 1-го порядка вида

$$\prod_{i=1}^{k}\left(E_a^m E_b^q\right)_i, \quad V_{q,i} \subset V_{m,i}, \quad V_{q,i} \subset V_{m,i+1}, \quad V_{q,k} \subset V_{m,1}$$

назовем замкнутой цепью условий или циклом k-го порядка. Соответствующее многообразие флагов назовем циклом флагов.

Теорема 1. В цикле условий k-го порядка не имеет значения, какие из условий считать базовыми, а какие - элементными.

Оставим эту теорему без доказательства.

Определение 6. Комплексные условия 1-го порядка, входящие в состав цепи k-го порядка или цикла, назовем образующими цепи или цикла. Соответствующие многообразия флагов назовем образующими цепи или цикла флагов.

Теорема 2. Цепь условий или цикл k-го порядка будет совместен, если совместны все его образующие и будет несовместен, если несовместна хотя бы одна его образующая.

Например, цепь комплексных условий вида

$$e\begin{matrix} 2, & 1, & 0 \\ 2, & 1, & 0 \end{matrix} e\begin{matrix} 1, & 0 \\ 3, & 2 \end{matrix} e\begin{matrix} 2, & 1, & 0 \\ 3, & 1, & 0 \end{matrix} e\begin{matrix} 1, & 0 \\ 3, & 1 \end{matrix} e\begin{matrix} 2, & 1, & 0 \\ 3, & 2, & 0 \end{matrix} e\begin{matrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \end{matrix} e\begin{matrix} 2, & 1, & 0 \\ 4, & 1, & 0 \end{matrix} e\begin{matrix} 1, & 0 \\ 3, & 0 \end{matrix} e\begin{matrix} 2, & 1, & 0 \\ 4, & 2, & 0 \end{matrix} e\begin{matrix} 1, & 0 \\ 2, & 0 \end{matrix} e\begin{matrix} 2, & 1, & 0 \\ 4, & 3, & 0 \end{matrix} e\begin{matrix} 1, & 0 \\ 1, & 0 \end{matrix}$$

будет совместна, а цикл этого же вида - несовместен, так как имеет несовместную образующую

$$e\begin{matrix} 2, & 1, & 0 \\ 2, & 1, & 0 \end{matrix} e\begin{matrix} 1, & 0 \\ 1, & 0 \end{matrix}.$$

Различая размерность многообразия флагов и размерность условий, утверждаем, что цепи или циклу флагов максимально возможной размерности соответствует цепь или цикл комплексных условий нулевой размерности. Цепи или циклу комплексных условий максимально возможной размерности соответствует конечное число цепей или циклов флагов.

Теорема 3. 1) Любая цепь или цикл комплексных условий нулевой размерности играет роль единицы в любых произведениях комплексных условий. 2) Любая несовместная цепь или цикл играют роль нуля в любых произведениях комплексных условий. 3) Совместные циклы комплексных условий, размерности образующих которых на единицу меньше их максимальной размерности, эквивалентны натуральным числам в любых произведениях цикла на условия единичной размерности.

Первый и второй пункты очевидны. Доказательство третьего пункта можно построить на следующем рассуждении. Предположим, что имеется произведение совместного цикла комплексных условий, размерность образующих которого на единицу меньше их максимальной размерности, и какого-либо условия единичной размерности, не обязательно комплексного. Последнее условие должно быть условием на какой-либо флаг из числа флагов цикла. Тогда для каждой образующей цикла существует формула редукции. Последовательно применяя редукцию, получим конечное число многообразий флагов данного цикла. Это число есть некоторое натуральное число. В результате получится произведение некоторого натурального числа на условие единичной размерности.

Рассмотрим теперь некоторые исчислительные задачи для многообразий, описанных выше.

Пусть имеется k общих (n - 1)-плоскостей и k общих точек, не лежащих в этих плоскостях. Требуется найти число замкнутых ломаных, звенья которых проходят через данные точки, а вершины лежат в данных (n - 1)-плоскостях.

Ответ на этот вопрос можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 4.

$$\prod_{i=1}^{k}\left(e^{1,\ 0}_{n,\ 0}\,e^{0}_{n-1}\right)_i = n, \quad k \ge 3.$$

Доказательство. Имеем

$$e^{1,\ 0}_{n,\ 0}\,e^{0}_{n-1} = e^{0}_{0} + e^{1,\ \ 0}_{n-1,\ 0}.$$

Тогда

$$\prod_{i=1}^{k}\left(e^{1,\ 0}_{n,\ 0}\,e^{0}_{n-1}\right)_i = \prod_{i=1}^{k}\left(e^{0}_{0} + e^{1,\ \ 0}_{n-1,\ 0}\right)_i =$$

$$= \prod_{i=1}^{k}\left(e^{0}_{0}\right)_i + \prod_{i=1}^{k-1}\left(e^{0}_{0}\right)_i\left(e^{1,\ \ 0}_{n-1,\ 0}\right)_k + \ldots + \left(e^{0}_{0}\right)_1\prod_{i=2}^{k}\left(e^{1,\ \ 0}_{n-1,\ 0}\right)_i + \prod_{i=1}^{k}\left(e^{1,\ \ 0}_{n-1,\ 0}\right)_i.$$

Очевидно, что все слагаемые в правой части, кроме первого и последнего, несовместны. Первое слагаемое соответствует единственному решению, то есть

$$\prod_{i=1}^{k}\left(e^{0}_{0}\right)_i = 1, \quad k \ge 3.$$

Последнее слагаемое представляет собой условие прохождения k прямых через k точек, по одной через каждую точку. При этом каждая из k прямых и каждая из k точек лежат в своей (n - 1)-плоскости, число которых тоже равно k. Но внутренние условия обязывают каждую из этих k прямых пересекать в точке как предыдущую, так и следующую прямую. Последняя k-я прямая должна пересекать в точке первую. Опуская строгое доказательство, утверждаем, что такое условие, сформулированное в n-мерном пространстве, позволяет понизить размерность пространства на единицу. То есть оно эквивалентно такому же условию, сформулированному для (n - 1)-мерного пространства. Поэтому для k ≥ 3 имеем

$$\prod_{i=1}^{k}\left(e^{1,\ \ 0}_{n-1,\ 0}\right)_{i,(n)} = \prod_{i=1}^{k}\left(e^{1,\ \ 0}_{n-1,\ 0}\,e^{0}_{n-2}\right)_{i,(n-1)}.$$

Разложение правой части дает

$$\prod_{i=1}^{k}\left(e^{1,\ \ 0}_{n-1,\ 0}\,e^{0}_{n-2}\right)_{i,(n-1)} = \prod_{i=1}^{k}\left(e^{0}_{0} + e^{1,\ \ 0}_{n-2,\ 0}\right)_{i,(n-1)} =$$

$$= \prod_{i=1}^{k}\left(e^{0}_{0}\right)_{i,(n-1)} + \ \ldots \ + \prod_{i=1}^{k}\left(e^{1,\ \ 0}_{n-2,\ 0}\right)_{i,(n-1)}.$$

Здесь многоточие означает сумму всех несовместных условий, первое слагаемое дает единственное решение, а последнее слагаемое позволяет снова понизить размерность пространства на единицу.

Продолжая этот процесс, получим

$$\prod_{i=1}^{k}\left(e^{1,\ 0}_{2,\ 0}\,e^{0}_{0}\right)_{i,(2)} = \prod_{i=1}^{k}\left(e^{0}_{0} + e^{1,\ 0}_{1,\ 0}\right)_{i,(2)} = \prod_{i=1}^{k}\left(e^{0}_{0}\right)_{i,(2)} + \prod_{i=1}^{k}\left(e^{1,\ 0}_{1,\ 0}\right)_{i,(2)}.$$

В результате для n = 2 получено два решения. Суммируя все решения, полученные в результате этого процесса, получим n решений.

Этот результат, сформулированный в виде Теоремы 4, подтверждает известную теорему проективной геометрии о числе двойных точек проективного соответствия (n - 1)-мерных плоскостей, которое равно n.

Список литературы

1. **Волков В. Я., Юрков В. Ю.** Многомерная исчислителная геометрия: монография. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2008. 244 с.